Ecuaciones Diferenciales Ordinarias I

Pável Ernesto Oropeza Alfaro
Formulario 1

1. **Definición** y clasificación de las ecuaciones diferenciales.
   - Es una ecuación que contiene derivadas de una o más variables respecto a una o más variables independientes. $F(x, y, y', y', y^{(n)}) = 0$
   - Se clasifican por **tipo**, **orden** y **linealidad**
   - En la clasificación por orden, el orden de la ODE es el orden de la mayor derivada en la ecuación.
   - Las ODE de primer orden a menudo se escriben como $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$
   - Es común escribir las ODE de primer y segundo orden en su **forma normal**: $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ y $\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y')$
2. **Solución de una ODE**. Es una función ϕ definida en un intervalo I que tiene al menos n derivadas continuas en I, las cuales al sustituirse en una ODE reducen la ecuación a una identidad.
3. **Factor Integrante** $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$**.** Una forma alternativa de escribir una ODE lineal $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ es la siguiente: $y' + p(x)y = g(x)$
   Por ejemplo, $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} - \frac{1y}{2}$ se puede escribir como: $y' + \frac{1y}{2} = \frac{3}{2}$
   Para resolver una ODE lineal de primer orden se puede usar:
   $$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}[\int \mu(x)g(x)dx + C]$$
4. **Clasificación de una ODE lineal de orden 1.**
   - Variables Separables: $\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)}$
   - Lineales: $y' + p(x)y = g(x)$
   - Exactas: $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$
   - Métodos especiales:
   a) Sustitución / Bernoulli
   b) Factor integrante
5. **Ecuaciones lineales de Segundo Orden. (A partir de esta sección se emplea x y t como variables independientes en forma indistinta)**
   $$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, \frac{dy}{dx})$$
   Si f puede escribirse como:
   $$f(x, y, \frac{dy}{dx}) = g(x) - p(x)\frac{dy}{dx} - q(x)y,$$
   se dice que es lineal, donde g, p y q son funciones continuas en el I solución. Reescribiendo y considerando la ecuación como homogénea ($g(x) = 0$):
   $$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0$$
   Los coeficientes p, q y r pueden ser constantes, en cuyo caso la ode se escribe como:
   $$ay'' + by' + cy = 0 \tag{1}$$
   Es una ode homogénea con coeficientes constantes, la cual puede resolverse con:
   $$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \tag{2}$$
   $$y(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t} \tag{3}$$
   - Principio de superposición: Si y_1 y y_2 son soluciones por separado de
     $$L[y] = y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{4}$$
     entonces la combinación lineal $c_1y_1(t)+c_2y_2(t)$ es también solución para cualquier valor de c_1 y c_2. A esto también hay que agregar que:
     El múltiplo constante $y = c_1y_1(t)$ de una solución $y_1(t)$ de una ode lineal homogénea, es también una solución.
   - Conjunto fundamental, independencial lineal y wronskiano.
     $$W(y_1(t_0), y_2(t_0)) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \tag{5}$$
     El valor de $W(y_1(t_0), y_2(t_0))$ debe ser **diferente** de cero, en un valor t_0 para considerar y_1 y y_2 un conjunto fundamental y poder construir la soluciones.
   - **Raíces complejas conjugadas.** A partir del polinomio característico $ar^2+br+c = 0$ al obtener las soluciones r_1 y r_2 se puede dar el caso de que sean imaginarias $r_1 = a+ib$ y $r_2 = a - ib$ En ese caso se emplea la Fórmula de Euler para *eliminar* la parte imaginaria
     $$e^{i\theta} = cos(\theta) + isin(\theta)$$
     $$e^{-i\theta} = cos(\theta) - isin(\theta)$$
     $$e^{a+ib} = e^ae^{ib} = e^a(cos(b) + isin(b))$$
   - Ejemplo de uso de la fórmula de Euler:
     $$2^{1-i} = e^{ln(2^{1-i})} = e^{(1-i)ln(2)}$$
     $$e^{(ln2-iln2)}$$
     $$e^{ln2}(cos(ln2) - isin(ln2))$$
     $$2(cos(ln2) - isin(ln2))$$
     Al resolver 1, la solución general es:
     $$y(t) = c_1e^{(a+ib)t} + c_2e^{(a-ib)t} \tag{6}$$
     o bien, empleando la fórmula de Euler:
     $$y(t) = e^{at}(c_1cos(bt) + c_2sin(bt)) \tag{7}$$
   - Raíces repetidas. Solución General
     $$y = c_1e^{r_1t} + c_2te^{r_2t} \tag{8}$$
   - Ecuación de Euler-Cauchy:
     $$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha t\frac{dy}{dx} + \beta y = 0 \tag{9}$$