

ПРАВИТЕЛЬСТВО РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(СПбГУ)

Кафедра физики высоких энергий и элементарных частиц  
Направление «Физика»



## ДВУХЧАСТИЧНЫЕ КОРРЕЛЯЦИИ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ РАСПАДЕ ОДИНОЧНОЙ СТРУНЫ

Бакалаврская работа студента

----- **Кравцова Павла Сергеевича**

Научный руководитель:

----- д.ф.-м.н., проф. **Вечернин В. В.**

Рецензент:

----- к.ф.-м.н., ассистент **Алцыбеев И. Г.**

Санкт–Петербург  
2016

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
1.1	Двухстадийное описание множественного рождения частиц . . . . .	3
1.2	"Yo-yo"струна . . . . .	3
1.3	Модели фрагментации струны . . . . .	4
1.4	Виды корреляций . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Цель работы</b>	<b>6</b>
<b>3</b>	<b>Модель одиночной струны</b>	<b>7</b>
<b>4</b>	<b>Вычисление функций распределения</b>	<b>8</b>
4.1	Распределение по импульсу в константном случае . . . . .	8
4.2	Распределение по $\Delta\varphi$ в константном случае . . . . .	9
4.3	Распределение по импульсу в гауссовом случае . . . . .	11
4.4	Распределение по $\Delta\varphi$ в гауссовом случае . . . . .	12
4.5	Компьютерное вычисление функций распределения . . . . .	15
<b>5</b>	<b>Результаты</b>	<b>15</b>
5.1	Константный случай . . . . .	15
5.2	Гауссов случай . . . . .	15
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>18</b>
6.1	Импульсная корреляционная функция . . . . .	18
6.2	Объяснение наличия заднего риджа . . . . .	18
<b>A</b>	<b>Код компьютерной программы для вычислений методом Монте-Карло</b>	<b>18</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>23</b>

# 1 Введение

На данный момент квантовая хромодинамика - признанная теория сильных взаимодействий. Основной метод расчета в этой области, теория возмущений, не применима для расчета множественного рождения частиц в мягкой области спектра при столкновении адронов. Для подобных расчетов используются различные феноменологические модели. Одна из наиболее часто используемых моделей - модель цветных кварк-глюонных струн [1],[2],[3],[4].

## 1.1 Двухстадийное описание множественного рождения частиц

В рамках модели цветных струн цветовое поле между кварками и бикварками заменяется струной с действием

$$S = \gamma \int d\sigma \int d\tau \sqrt{\left(\frac{\partial x_\mu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial x_\mu}{\partial \sigma} \frac{\partial x^\mu}{\partial \sigma}\right) \left(\frac{\partial x_\nu}{\partial \tau} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tau}\right)} \quad (1)$$

где  $\gamma = const$  - натяжение струны,  $\sigma, \tau$  - переменные, параметризующие струну в пространстве времени Минковского,  $x^\mu = x^\mu(\sigma, \tau)$  - координаты струны. Это действие обеспечивает асимптотически-линейный рост потенциальной энергии при увеличении расстояния между кварками.

До столкновения двух адронов считается, что взаимодействие есть только внутри адронов, то есть кварки одного адрона взаимодействуют только с другими кварками этого адрона. При столкновении поля-струны "перцепляются" и образуются струны между кварками и бикварками разных адронов, то есть появляются струны между объектами летящими в противоположные стороны. Это первый этап так называемого двухстадийного механизма множественного рождения частиц.

Далее, эти струны растягиваются и рвутся. Процесс разрыва или, как его чаще называют, фрагментации струны физически соответствует процессу рождения пары кварк-антикварк. После фрагментации образуются две новые струны, которые так же растягиваются и рвутся. Этот процесс продолжается до тех пор, пока энергии образовавшихся струн не станут порядка энергии соответствующего адрона. Тогда струны отождествляются с адронами, которые и являются конечными продуктами распада. В этом состоит второй этап двухстадийного механизма.

## 1.2 "Yo-yo"струна

Действие (1) задает некоторые уравнения движения для струны. Существует целый класс решений этих уравнений. Для описания столкновений адронов, как правило, используется одно из самых простых решений, так называемая струна "yo-yo". Это решение в пространстве-времени размерности 1+1 графически изображено на рис. 1.

В [5] показано, что движение струны, у которой массивные концы движутся со около-световой скоростью, эквивалентно движению струны с безмассовыми концами. Для удобства будем считать концы струн безмассовыми.

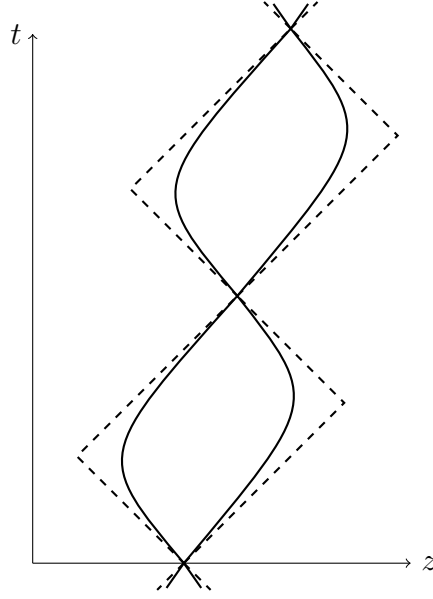


Рис. 1: Движение концов струны "yo-yo" с массами (сплошная линия) и без масс (пунктирная линия).

### 1.3 Модели фрагментации струны

Существуют два подхода к описанию фрагментации струны. Можно описывать фрагментацию по аналогии с механизмом Дж. Швингера [6] рождения электрон-позитронных пар в однородном электрическом поле, считая поле внутри струны приблизительно однородным. Другой подход - придумать феноменологическое правило, которое определяет вероятность разрыва в некоторой точке струны в некоторый момент времени.

Существует несколько различных правил для определения вероятности фрагментации. Остановимся подробнее на правиле, используемом в модели Артру-Меннессиера [7]. Оно формулируется для решения "yo-yo string". Прежде всего введем координаты, которыми оно описывается. Для частиц движущихся со скоростью света удобно ввести координаты светового конуса:

$$b^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(t \pm z) \quad (2)$$

Далее от них перейдем к координатам  $S$  и  $\Delta\eta$ :

$$S = b^{+} \cdot b^{-} \quad (3)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \frac{b^{+}}{b^{-}} \quad (4)$$

Здесь  $S$  имеет смысл площади прямоугольника с длинами сторон  $b^{+}$  и  $b^{-}$  и сторонами параллельными осям координат светового конуса.  $\eta$ , так называемая быстрота, в общем случае параметризует скорость частицы или струны. Выберем начало координат так, что концы струн совпадают в точке  $(t, z) = (0, 0)$ . Тогда модель Артру-Меннессиера  $P$  гласит, что вероятность разрыва струны зависит лишь от  $S$  и не зависит от  $\eta$ . Она пропорциональна соответствующей площади  $S$ , при условии, что в данной области разрыва еще не

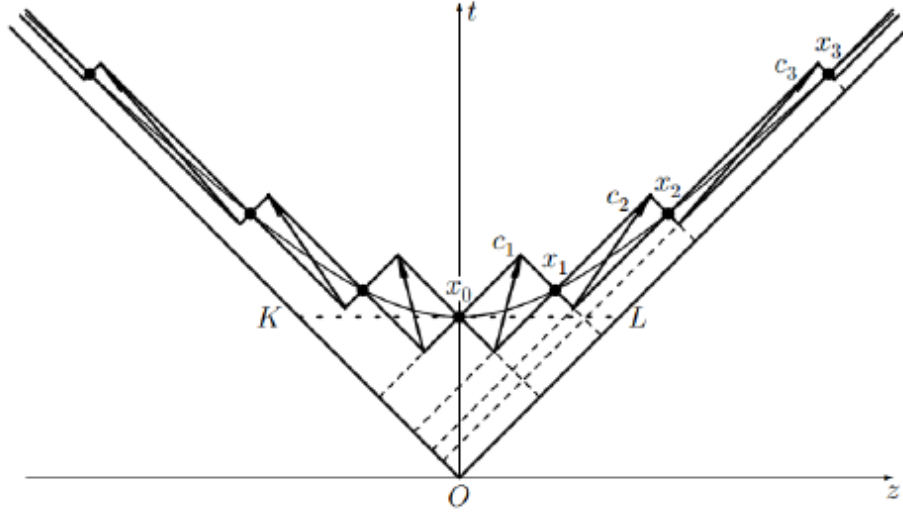


Рис. 2: Доминирующий процесс фрагментации струны. Иллюстрация из [8]

было:

$$dP(S) = \frac{1}{S_0} (1 - P(S)) dS, \quad (5)$$

где  $S_0$  - параметр модели. Таким образом вероятность распада

$$P(S) = 1 - \exp\left(-\frac{S}{S_0}\right) \quad (6)$$

Из этой формулы можно вывести, что в среднем разрыв происходит с площадью  $S_0$ . Сделаем упрощение, и будем считать, что разрыв происходит только при  $S = S_0$ . Тогда все события фрагментации будут лежать на гиперболе (см. рис. 2). В [8] показано, что при данных предположениях струны будут рождаться равномерно распределенными по быстрой, причем разность быстрот соседних струн порядка 1 (для рождения  $\pi$ -мезона  $\Delta\eta = 1,5$ ; для  $\rho$ -мезона  $\Delta\eta = 0,75$ ; для нуклона  $\Delta\eta = 0,63$ ).

И в подходе с механизмом Швингера и в модели Артру-Меннисиера получается один и тот же важный результат: в среднем частицы от фрагментации соседних частей струны попадают в соседние интервалы быстрой, а частицы от удаленных друг от друга частей струны попадают в дальние друг от друга интервалы.

## 1.4 Виды корреляций

В струнном описании процесса рассеяния существует два источника для корреляций частиц. Им соответствуют два типа корреляций: ближние и дальние. Впервые на эти типы корреляций было указано в работах [9].

Ближние корреляции возникают между частицами, соответствующими струнам, которые были соседними в процессе фрагментации. Одна из струн имеет на конце некоторый кварк, образованный в результате рождения пары кварк-антикварк, в то время как другая содержит антикварк, образовавшийся в том же процессе. Из-за закона сохранения

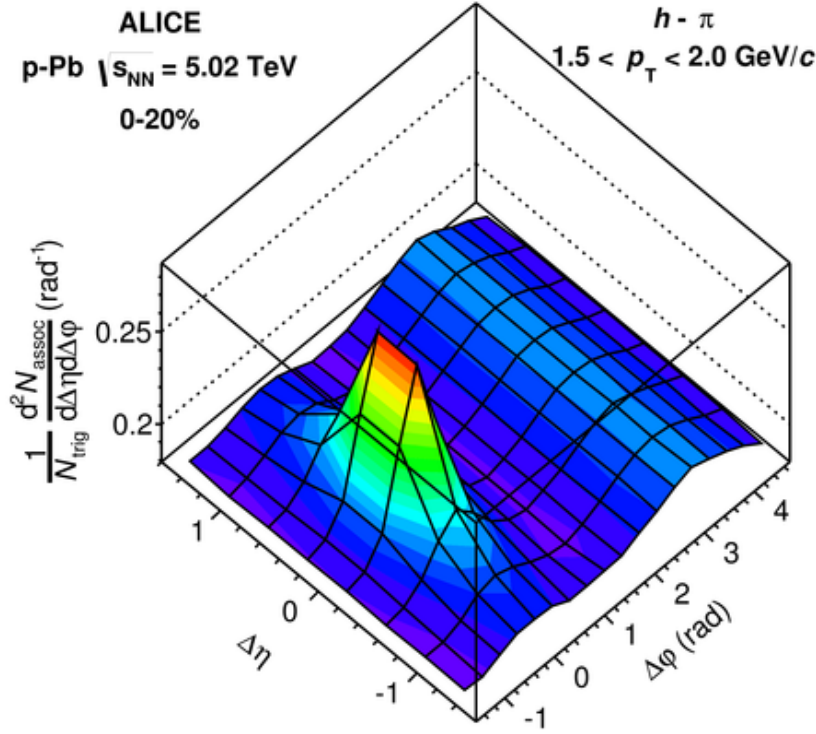


Рис. 3: Распределение по разности быстрот  $\Delta\eta$  и углу разлета  $\Delta\varphi$  частиц в процессе множественного рождения ( $1.5\text{ GeV} < p_T < 2.0\text{ GeV}$ ). График из [10]

импульса кварк и антикварк имеют скоррелированные импульсы, поэтому импульсы частиц тоже оказываются скоррелированными. Так-как подобные корреляции имеют место между соседними струнами, соответствующие частицы имеют близкие по величине быстроты, другими словами явление наблюдается в близких бысротных окнах.

Дальние корреляции, наоборот, наблюдаются в разнесенных по быстроте окнах. Они обусловлены в первую очередь флуктуациями числа образовавшихся струн. В работах [11], [12] была предложена модификация струнной модели, учитывающая процессы слияния струн, перед началом второго этапа двухстадийного механизма. Слияние струн так же приводит к дальним корреляциям, что подробно изучалось в работах [13], [14], [15], [16].

В данной работе исследуются именно ближние корреляции, возникающие в одиночной струне.

## 2 Цель работы

На рис. 3 изображена характерная двухчастичная функция распределения зависящая от разности быстрот  $\Delta\eta$  и углу разлета  $\Delta\varphi$  частиц, образовавшихся после столкновения. На нем выделяются два пика. Острый пик с центром в точке  $(\Delta\eta, \Delta\varphi) \approx (0, 0)$  говорит о том, что образуется много пар частиц летящих в одну сторону с одной бысротой. Это объясняется тем, что в после фрагментации образуются не только частицы с основным состоянием, но и частицы с резонансным состоянием. Подобные резонансы до улавливания детекторами сами распадаются на две и более стабильные частицы. Детекторы регистрируют именно эти стабильные частицы, которые разумеется будут иметь схожие бысроты

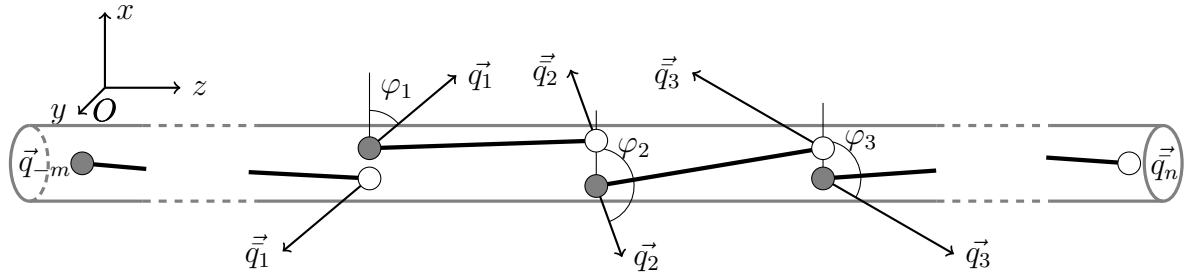


Рис. 4: Модель цветной кварк-глюонной струны

и направления. Для процессов образования и последующего распада резонансов в рамках струнного подхода существуют различные модели. Например, в генераторе событий VENUS используется так называемая модель AMOR (Artru-Mennessier off-shell resonance model) [17]. Это расширение модели Артру-Меннессиера в которой модифицируется формула для вероятности распада струны так, чтобы учесть возможное рождение резонансов. В данной работе подобные процессы не рассматриваются.

Второй пик, или скорее хребет, сильно "размазан" по быстрой и имеет центр на линии  $\Delta\varphi \approx 3$ . Это так называемый задний ридж (back ridge). **Целью нашей работы** является объяснить его образование в рамках струнного подхода. Мы покажем, что наличие этого пика означает наличие ближних корреляций в процессе фрагментации одиночной струны, которые обусловлены локальным законом сохранения импульса.

### 3 Модель одиночной струны

В соответствии с секцией 1.3 мы считаем, что образовавшиеся струны имеют одинаковую длину. Кроме того считаем, что разность быстрот для соседних струн одинакова и  $\Delta\eta \approx 1$ . Для краткости будем называть и кварки, и бикварки просто кварками. Антикварком для бикварка будем считать кварк, способный дополнить его до адрона. Обозначим поперечные импульсы кварков (антикварков)  $\vec{q}_i, i = -m, -m+1, \dots, n$  и  $\vec{\bar{q}}_i$  - поперечные импульсы парных к ним антикварков (кварков) (см. рис. 4). Фиксируем ось  $Ox$  перпендикулярную струне и будем отсчитывать направления поперечных импульсов  $\varphi_i$  от неё. Поперечные импульсы образовавшихся адронов обозначим  $\vec{p}_i$ . Тогда в наших обозначениях  $\Delta\varphi$  - угол между векторами  $\vec{p}_i$  и  $\vec{p}_j$ .

Закон сохранения импульса накладывает ограничения на процессы рождения пар кварк-антикварк. Мы считаем, что суммарный импульс пары должен быть равен нулю, следовательно

$$\vec{q}_i = -\vec{\bar{q}}_i \quad (7)$$

$$\vec{p}_i = \vec{q}_{i+1} + \vec{\bar{q}}_i = \vec{q}_{i+1} - \vec{q}_i \quad (8)$$

Таким образом, величины  $q_i$  и  $\varphi_i$  однозначно задают все поперечные координаты модели.

Будем обозначать функцию распределения величины  $a$  в точке  $a_0$  как  $\rho_a(a_0)$ . Нас будут интересовать функции распределения  $\rho_{\Delta\varphi}(\Delta\varphi')$  и  $\rho_{p_i}(p'_i)$ . Мы будем искать их на основе различных предположений о распределении величин  $q_i$  и  $\varphi_i$ .

## 4 Вычисление функций распределения

В работе предполагается известными распределения по направлениям разлета кварков  $\rho_{\varphi_i}$  и по величине поперечного импульса  $\rho_{q_i}$ . Из них находятся распределение по углу разлета  $\rho_{\Delta\varphi}$  соседних адронов (адроны с номерами 1 и 2) и распределение по величине импульса  $\rho_p$  одного адрона (для определенности рассматриваем адрона с номером 1 т. е.  $p = p_1$ ). Рассматриваются два варианта распределений импульсов кварков:

- "Константный" случай, когда  $q_i$  фиксированно и одинаково для всех кварков:  $q_i = q_0, \rho_{q_i}(q) = \delta(q - q_0)$ .
- "Гауссовый" случай, когда  $\rho_{q_i}(q) = \frac{q}{2q_0^2} \exp\left(-\frac{q^2}{q_0^2}\right)$ .

В обоих случаях направления разлета считаются распределенными равномерно:  $\rho_{\varphi_i}(\varphi_i) = \frac{1}{2\pi} (\varphi_i \in [-\pi, \pi])$ . В вычислениях используем обозначение для якобиана перехода от координат  $x_1, \dots, x_n$  к координатам  $y_1, \dots, y_n$  -  $\frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ . Иногда нам будет удобнее использовать декартовы координаты:

$$q_i^x = q_i \cdot \cos(\varphi_i), \quad q_i^y = q_i \cdot \sin(\varphi_i) \quad (9)$$

### 4.1 Распределение по импульсу в константном случае

Элементарные события нумеруются парами  $(\varphi_1, \varphi_2)$ . Поперечный импульс мезона

$$\begin{aligned} p(\varphi_1, \varphi_2) &= \sqrt{(\vec{q}_2 - \vec{q}_1)^2} = \sqrt{q_2^2 + q_1^2 - 2q_1q_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} = \\ &= q_0\sqrt{2(1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1))} = 2q_0 \left| \sin\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) \right| \end{aligned} \quad (10)$$

По определению функция распределения величины  $p$  - это вероятность того, что величина  $p$  имеет значение  $p'$ :

$$\begin{aligned} \rho_p(p') &= \int_{-\pi}^{\pi} \rho_{\varphi_1}(\varphi_1) d\varphi_1 \int_{-\pi}^{\pi} \rho_{\varphi_2}(\varphi_2) d\varphi_2 \cdot \delta(p' - p(\varphi_1, \varphi_2)) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi_1 d\varphi_2 \cdot \delta(p' - p(\varphi_1, \varphi_2)) \end{aligned} \quad (11)$$

Сделаем замену

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \\ \theta_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \end{cases}$$

Якобиан преобразования

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\theta_1, \theta_2)} = \left( \frac{\partial(\theta_1, \theta_2)}{\partial(\varphi_1, \varphi_2)} \right)^{-1} = \left( \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \right)^{-1} = 2 \quad (12)$$



Заметим, что  $p$  зависит только от  $\theta_2$  и по переменной  $\theta_1$  можно проинтегрировать

$$\begin{aligned}\rho_p(p') &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_2 \int_{-\pi+|\theta_2|}^{\pi-|\theta_2|} d\theta_1 \left| \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(\theta_1, \theta_2)} \right| \cdot \delta(p' - p(\theta_2)) = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} d\theta_2 (\pi - |\theta_2|) \cdot \delta(p' - p(\theta_2))\end{aligned}\quad (13)$$

Кроме того  $p(-\theta_2) = p(\pi - \theta_2) = p(\theta_2)$ , поэтому

$$\begin{aligned}\rho_p(p') &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi} d\theta_2 (\pi - \theta_2) \cdot \delta(p' - p(\theta_2)) = \\ &= \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} d\theta_2 (\pi - \theta_2) \cdot \delta(p' - p(\theta_2)) + \underbrace{\frac{2}{\pi^2} \int_{\pi/2}^{\pi} d\theta_2 (\pi - \theta_2) \cdot \delta(p' - p(\theta_2))}_{\substack{\theta'_2 = \pi - \theta_2 \\ \frac{2}{\pi^2} \int_0^{\pi/2} d\theta'_2 \theta'_2 \cdot \delta(p' - p(\theta'_2))}} = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} d\theta_2 \cdot \delta(p' - p(\theta_2))\end{aligned}\quad (14)$$

Наконец, перейдем к переменной  $p = 2q_0 \sin\theta_2$

$$\rho_p(p') = \frac{2}{\pi} \int_0^{2q_0} dp \frac{1}{\partial p / \partial \theta_2} \cdot \delta(p' - p) = \frac{2}{\pi} \int_0^{2q_0} \frac{dp \cdot \delta(p' - p)}{\sqrt{(2q_0)^2 - p^2}} = \frac{2}{\pi \sqrt{(2q_0)^2 - p'^2}} \quad (15)$$

## 4.2 Распределение по $\Delta\varphi$ в константном случае

$\Delta\varphi$  - угол между векторами  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$ , поэтому

$$\cos\Delta\varphi = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{p_1 p_2} \quad (16)$$

В нашем случае

$$\vec{p}_1 = q_0 \begin{pmatrix} \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \\ \sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = q_0 \begin{pmatrix} \cos\varphi_3 - \cos\varphi_2 \\ \sin\varphi_3 - \sin\varphi_2 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Следовательно

$$\begin{aligned}
& \cos \Delta \varphi = \\
& = \frac{(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)(\cos \varphi_3 - \cos \varphi_2) + (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)(\sin \varphi_3 - \sin \varphi_2)}{\left( ((\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)^2 + (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)^2) ((\cos \varphi_3 - \cos \varphi_2)^2 + (\sin \varphi_3 - \sin \varphi_2)^2) \right)^{1/2}} = \\
& = \frac{1}{2} \frac{\cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \cos(\varphi_3 - \varphi_2) - \cos(\varphi_3 - \varphi_1) - 1}{((1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1))(1 - \cos(\varphi_3 - \varphi_2)))^{1/2}} = \\
& = \frac{1}{2} \frac{\sin^2 \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2} - \sin^2 \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2} - \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\left| \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2} \right|} = \\
& = \operatorname{sign} \left( \sin \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) \cos \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2} \quad (18)
\end{aligned}$$

где  $\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \geq 0 \\ -1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$ .

Ясно что из этого выражения можно найти лишь  $|\Delta \varphi|$ . С учетом того, что  $\varphi_i \in [-\pi, \pi]$ , получаем

$$|\Delta \varphi| = \begin{cases} \left| \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2} \right|, & \text{если } (\varphi_3 - \varphi_2)(\varphi_2 - \varphi_1) \geq 0 \\ \pi - \left| \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2} \right|, & \text{если } (\varphi_3 - \varphi_2)(\varphi_2 - \varphi_1) < 0 \end{cases} \quad (19)$$

Найдем функцию распределения величины  $|\Delta \varphi|$ . Элементарные события нумеруются наборами  $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ . Выражение (19) не изменяется при перестановки  $\varphi_1$  и  $\varphi_3$  местами, поэтому

$$\begin{aligned}
\rho_{|\Delta \varphi|}(\alpha) &= \int_{-\pi}^{\pi} \rho_{\varphi_1} d\varphi_1 \int_{-\pi}^{\pi} \rho_{\varphi_2} d\varphi_2 \int_{-\pi}^{\pi} \rho_{\varphi_3} d\varphi_3 \cdot \delta(\alpha - |\Delta \varphi|(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)) = \\
&= \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi_2 d\varphi_3 \int_{-\pi}^{\varphi_3} d\varphi_1 \cdot \delta(\alpha - |\Delta \varphi|(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)) = \\
&= \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi_3 \int_{-\pi}^{\varphi_3} d\varphi_1 \left[ \int_{\varphi_1}^{\varphi_3} d\varphi_2 \cdot \delta\left(\alpha - \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2}\right) + \int_{\varphi_2 \in [-\pi, \varphi_1] \cup [\varphi_3, \pi]} d\varphi_2 \cdot \delta\left(\alpha - \pi + \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2}\right) \right] = \\
&= \frac{1}{4\pi^3} \int_{-\pi}^{\pi} d\varphi_3 \int_{-\pi}^{\varphi_3} d\varphi_1 \left[ (\varphi_3 - \varphi_1) \cdot \delta\left(\alpha - \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2}\right) + (2\pi - (\varphi_3 - \varphi_1)) d\varphi_2 \cdot \delta\left(\alpha - \pi + \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2}\right) \right]
\end{aligned} \quad (20)$$

Сделаем замену переменных

$$\begin{cases} \theta = \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2} \\ \varphi_1 = \varphi_1 \end{cases} \quad (21)$$

Якобиан преобразования

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_3)}{\partial(\varphi_1, \theta)} = \frac{1}{\frac{\partial(\varphi_1, \theta)}{\partial(\varphi_1, \varphi_3)}} = \frac{1}{\partial\theta/\partial\varphi_3} = 2 \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
\rho_{|\Delta\varphi|}(\alpha) &= \frac{1}{4\pi^3} \int_0^\pi d\theta \int_{-\pi}^{\pi-2\theta} d\varphi_1 \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_3)}{\partial(\varphi_1, \theta)} (2\theta\delta(\theta - \alpha) + (2\pi - 2\theta) \cdot \delta(\theta - (\pi - \alpha))) = \\
&= \frac{2}{\pi^3} \int_0^\pi d\theta (\pi - \theta) (\theta\delta(\theta - \alpha) + (\pi - \theta) \cdot \delta(\theta - (\pi - \alpha))) = \frac{2\alpha}{\pi^2} \quad (23)
\end{aligned}$$

Так как распределение  $\Delta\varphi$  симметрично, получаем

$$\rho_{\Delta\varphi}(\Delta\varphi) = \frac{|\Delta\varphi|}{\pi^2} \quad (24)$$

### 4.3 Распределение по импульсу в гауссовом случае

Ищем распределение величины

$$p = \sqrt{(q_2^x - q_1^x)^2 + (q_2^y - q_1^y)^2} \quad (25)$$

Элементарные события задаются наборами  $(q_1^x, q_1^y, q_2^x, q_2^y)$ .

$$\begin{aligned}
\rho_p(p') &= (q_0\sqrt{\pi})^{-4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1^x dq_1^y dq_2^x dq_2^y \exp\left(-\frac{1}{q_0^2} \left((q_1^x)^2 + (q_1^y)^2 + (q_2^x)^2 + (q_2^y)^2\right)\right) \cdot \\
&\quad \cdot \delta(p' - p(q_1^x, q_1^y, q_2^x, q_2^y)) \quad (26)
\end{aligned}$$

Сделаем замену

$$\begin{cases} p^x = q_2^x - q_1^x \\ p^y = q_2^y - q_1^y \\ q_2^x = q_2^x \\ q_2^y = q_2^y \end{cases} \quad (27)$$

Якобиан преобразования

$$\frac{\partial(q_1^x, q_1^y, q_2^x, q_2^y)}{\partial(p^x, p^y, q_2^x, q_2^y)} = \left(\frac{\partial(p^x, p^y, q_2^x, q_2^y)}{\partial(q_1^x, q_1^y, q_2^x, q_2^y)}\right)^{-1} = \left(\frac{\partial(p^x, p^y)}{\partial(q_1^x, q_1^y)}\right)^{-1} = \left(\det \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)^{-1} = 1 \quad (28)$$

$$\begin{aligned}
\rho_p(p') &= (q_0\sqrt{\pi})^{-4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dp^x dp^y \cdot \delta\left(p' - \sqrt{(p^x)^2 + (p^y)^2}\right) \cdot \\
&\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_2^x dq_2^y \exp\left(-\frac{1}{q_0^2} \left[2\left(q_2^x - \frac{p^x}{2}\right)^2 + \frac{(p^x)^2}{2} + 2\left(q_2^y - \frac{p^y}{2}\right)^2 + \frac{(p^y)^2}{2}\right]\right) = \\
&= (q_0\sqrt{2\pi})^{-2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dp^x dp^y \cdot \delta\left(p' - \sqrt{(p^x)^2 + (p^y)^2}\right) \exp\left(-\frac{(p^x)^2 + (p^y)^2}{2q_0^2}\right) \\
&= 2 \cdot (q_0\sqrt{\pi})^{-2} \int_0^\infty \int_0^\infty dp^x dp^y \cdot \delta\left(p' - \sqrt{(p^x)^2 + (p^y)^2}\right) \exp\left(-\frac{(p^x)^2 + (p^y)^2}{2q_0^2}\right) \quad (29)
\end{aligned}$$

Сделаем замену декартовых координат  $(p^x, p^y)$  на полярные  $(p, \alpha)$  и проинтегрируем по углу  $\alpha$ .

$$\rho_p(p') = \frac{1}{q_0^2} \int_0^\infty dp p \cdot \delta(p' - p) \exp\left(-\frac{p^2}{2q_0^2}\right) = \frac{p' e^{-\frac{p'^2}{2q_0^2}}}{q_0^2} \quad (30)$$

#### 4.4 Распределение по $\Delta\varphi$ в гауссовом случае

Ищем распределение  $\Delta\varphi$  на основе формулы

$$\cos\Delta\varphi = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{p_1 p_2} \quad (31)$$

Элементарные события нумеруются наборами  $(q_1^x, q_1^y, q_2^x, q_2^y, q_3^x, q_3^y)$ . Вначале найдем распределение величины

$$\gamma = \cos\Delta\varphi, \quad \gamma \in [-1, 1] \quad (32)$$

Распределение этой величины

$$\begin{aligned} \rho_\gamma(\gamma') &= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{q_1^x}(q_1^x) dq_1^x \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{q_1^y}(q_1^y) dq_1^y \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{q_2^x}(q_2^x) dq_2^x \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{q_2^y}(q_2^y) dq_2^y \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{q_3^x}(q_3^x) dq_3^x \\ &\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_{q_3^y}(q_3^y) dq_3^y \cdot \delta(\gamma' - \gamma(q_1^x, q_1^y, q_2^x, q_2^y, q_3^x, q_3^y)) = \\ &= (q_0 \sqrt{\pi})^{-6} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1^y dq_2^y dq_3^y \exp\left(-\frac{1}{q_0^2} \left((q_1^y)^2 + (q_2^y)^2 + (q_3^y)^2\right)\right) \cdot \\ &\cdot \underbrace{\left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dq_1^x dq_2^x dq_3^x \exp\left(-\frac{1}{q_0^2} \left((q_1^x)^2 + (q_2^x)^2 + (q_3^x)^2\right)\right) \cdot \delta(\gamma' - \gamma(q_1^x, q_1^y, q_2^x, q_2^y, q_3^x, q_3^y)) \right]}_{I_x} \end{aligned} \quad (33)$$

В интеграле  $I_x$  сделаем замену

$$\begin{cases} p_1^x = q_2^x - q_1^x \\ q_2^x = q_2^x \\ p_2^x = q_3^x - q_2^x \end{cases} \quad \frac{\partial(q_1^x, q_2^x, q_3^x)}{\partial(p_1^x, q_2^x, p_2^x)} = \left( \frac{\partial(p_1^x, p_2^x)}{\partial(q_1^x, q_3^x)} \right)^{-1} = -1 \quad (34)$$

и проинтегрируем по  $q_2^x$

$$\begin{aligned}
I_x &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_1^x dp_2^x \exp \left( -\frac{2}{3q_0^2} ((p_1^x)^2 + (p_2^x)^2 + p_1^x p_2^x) \right) \cdot \\
&\cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dq_2^x \exp \left( -\frac{3(q_2^x + (p_2^x - p_1^x)/3)^2}{q_0^2} \right) \cdot \delta(\gamma' - \gamma(p_1^x, p_2^x, q_1^y, q_2^y, q_3^y)) = \\
&= q_0 \sqrt{\frac{\pi}{3}} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_1^x dp_2^x \exp \left( -\frac{2}{3q_0^2} ((p_1^x)^2 + (p_2^x)^2 + p_1^x p_2^x) \right) \cdot \delta(\gamma' - \gamma(p_1^x, p_2^x, q_1^y, q_2^y, q_3^y))
\end{aligned} \tag{35}$$

Теперь в формуле (33) сделаем аналогичную замену для  $y$ -координат. В итоге получим

$$\begin{aligned}
\rho_\gamma(\gamma') &= \frac{1}{3\pi^2 q_0^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_1^x dp_2^x dp_1^y dp_2^y \cdot \\
&\cdot \exp \left( -\frac{2}{3q_0^2} ((p_1^x)^2 + (p_2^x)^2 + (p_1^y)^2 + (p_2^y)^2 + p_1^x p_2^x + p_1^y p_2^y) \right) \cdot \delta(\gamma' - \gamma(p_1^x, p_2^x, p_1^y, p_2^y))
\end{aligned} \tag{36}$$

Сделаем замену

$$\begin{cases} p_1 = \sqrt{(p_1^x)^2 + (p_1^y)^2} \\ p_2 = \sqrt{(p_2^x)^2 + (p_2^y)^2} \\ m = p_1^x p_2^x + p_1^y p_2^y \\ p_2^y = p_2^y \end{cases} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial(p_1^x, p_1^y, p_2^x, p_2^y)}{\partial(m, p_1, p_2, p_2^y)} \right| &= \left| \frac{\partial(m, p_1, p_2)}{\partial(p_1^x, p_1^y, p_2^x)} \right|^{-1} = \left| \det \begin{pmatrix} p_2^x & \frac{p_1^x}{p_1} & 0 \\ p_2^y & \frac{p_1^y}{p_1} & 0 \\ p_1^x & 0 & \frac{p_2^x}{p_2} \end{pmatrix} \right|^{-1} = \\
&= \left| \frac{p_2^x (p_2^x p_1^y - p_2^y p_1^x)}{p_1 p_2} \right|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{(p_2^2 - (p_2^y)^2) \left( 1 - \left( \frac{m}{p_1 p_2} \right)^2 \right)}}
\end{aligned} \tag{38}$$

Это замена не взаимно-однозначная, но ее можно сделать такой. Разобьем исходный интеграл на четыре интеграла с областями интегрирования, различающимися знаками величин  $p_x^2$  и  $(p_2^x p_1^y - p_2^y p_1^x)$ . В каждом из них замена (37) будет взаимно-однозначной, и результат будет одинаков для обоих интегралов, поэтому все сведется к появлению множителя 4

$$\rho_\gamma(\gamma') = \frac{4}{3\pi^2 q_0^4} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dp_1 dp_2 \int_{-p_1 p_2}^{p_1 p_2} dm \frac{\exp \left( -\frac{2}{3q_0^2} (p_1^2 + p_2^2 + m) \right)}{\sqrt{1 - \left( \frac{m}{p_1 p_2} \right)^2}} \underbrace{\int_{-p_2}^{p_2} \frac{dp_2^x}{\sqrt{p_2^2 - (p_2^y)^2}}}_{\pi} \cdot \delta \left( \gamma' - \frac{m}{p_1 p_2} \right) \tag{39}$$

Перейдем от переменной  $m$  к переменной  $\gamma = \frac{m}{p_1 p_2}$

$$\rho_\gamma(\gamma') = \frac{4}{3\pi q_0^4} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} dp_1 dp_2 \int_{-1}^1 d\gamma \frac{p_1 p_2 \exp\left(-\frac{2}{3q_0^2}(p_1^2 + p_2^2 + p_1 p_2 \gamma)\right)}{\sqrt{1-\gamma^2}} \cdot \delta(\gamma' - \gamma) \quad (40)$$

Теперь заменим переменные  $p_1, p_2$  на  $p \in [0, +\infty), \theta \in [0, \pi]$

$$\begin{cases} p \cos \frac{\theta}{2} = p_1 \\ p \sin \frac{\theta}{2} = p_2 \end{cases} \quad \frac{\partial(p_1, p_2)}{\partial(p, \theta)} = \det \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} & \sin \frac{\theta}{2} \\ -\frac{p}{2} \sin \frac{\theta}{2} & \frac{p}{2} \cos \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \frac{p}{2} \quad (41)$$

Теперь можно проинтегрировать по  $p$

$$\begin{aligned} \rho_\gamma(\gamma') &= \frac{1}{3\pi q_0^4} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_{-1}^1 d\gamma \frac{\delta(\gamma' - \gamma)}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_0^{+\infty} p^3 \, dp \exp\left(-\frac{2}{3q_0^2} p^2 \left(1 + \frac{\gamma}{2} \sin \theta\right)\right) = \\ &= \frac{3}{8\pi} \int_0^\pi d\theta \int_{-1}^1 d\gamma \frac{\delta(\gamma' - \gamma)}{\sqrt{1-\gamma^2}} \cdot \frac{\sin \theta}{\left(1 + \frac{\gamma}{2} \sin \theta\right)^2} = \\ &= -\frac{3}{8\pi} \int_{-1}^1 d\gamma \frac{\delta(\gamma' - \gamma)}{\sqrt{1-\gamma^2}} \cdot \frac{d}{d(\gamma/2)} \left( \int_0^\pi \frac{d\theta}{1 + \frac{\gamma}{2} \sin \theta} \right) = \\ &= \frac{3}{4\pi} \int_{-1}^1 d\gamma \frac{\delta(\gamma' - \gamma)}{\sqrt{1-\gamma^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 - (\gamma/2)^2} - (\gamma/2) \arccos(\gamma/2)}{(1 - (\gamma/2)^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{3}{4\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\gamma'^2}} \cdot \frac{\sqrt{1 - (\gamma'/2)^2} - (\gamma'/2) \arccos(\gamma'/2)}{(1 - (\gamma'/2)^2)^{3/2}} \end{aligned} \quad (42)$$

Здесь использованы формулы для интегралов

$$\int_0^{+\infty} dx \, x^3 e^{-\alpha x^2} = \frac{1}{2\alpha^2} \quad (43)$$

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{1 + a \sin \theta} = \frac{2}{\sqrt{1-a^2}} \cdot \arctg \frac{a + \tg(\theta/2)}{\sqrt{1-a^2}} \Big|_0^\pi = \frac{2 \arccos(a)}{\sqrt{1-a^2}}, \quad \text{при } |a| < 1 \quad (44)$$

Теперь найдем распределение по углу  $\Delta\varphi$

$$|\Delta\varphi| = \arccos \gamma \quad (45)$$

Ясно, что распределение по  $|\Delta\varphi|$  отличается от распределения по  $\gamma$  на множитель  $\left|\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}\right| = |\sin \theta| = \sqrt{1-\gamma^2}$ . Кроме того распределение по  $\Delta\varphi$  должно быть симметрично, поэтому в итоге получаем

$$\rho_{\Delta\varphi}(\Delta\varphi) = \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{\sqrt{1 - (\gamma/2)^2} - (\gamma/2) \arccos(\gamma/2)}{(1 - (\gamma/2)^2)^{3/2}}, \quad \text{где } \gamma = \cos \Delta\varphi \quad (46)$$

## 4.5 Компьютерное вычисление функций распределения

Для подтверждения формул для вычисления функций распределения была написана программа, использующая метод Монте-Карло. В ней генерировалось  $N = 10^4, 10^5$  событий и строились гистограммы исследуемых величин (рис. 5, 6).

## 5 Результаты

### 5.1 Константный случай

В случае фиксированной величины импульса кварков импульс мезона и угол разлета определяются выражениями

$$p = 2q_0 \left| \sin \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right) \right| \quad (47)$$

$$|\Delta\varphi| = \begin{cases} \left| \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2} \right|, & \text{если } (\varphi_3 - \varphi_2)(\varphi_2 - \varphi_1) \geq 0 \\ \pi - \left| \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2} \right|, & \text{если } (\varphi_3 - \varphi_2)(\varphi_2 - \varphi_1) < 0 \end{cases} \quad (48)$$

Их распределения

$$\rho_p(p) = \frac{2}{\pi \sqrt{(2q_0)^2 - p^2}} \quad (49)$$

$$\rho_{\Delta\varphi}(\Delta\varphi) = \frac{|\Delta\varphi|}{\pi^2} \quad (50)$$

Гистограммы распределений этих величин изображены на рисунке 5.

### 5.2 Гауссов случай

В случае нормального распределения импульса кварков импульс мезона и угол разлета определяются выражениями

$$p = \sqrt{(q_2^x - q_1^x)^2 + (q_2^y - q_1^y)^2} \quad (51)$$

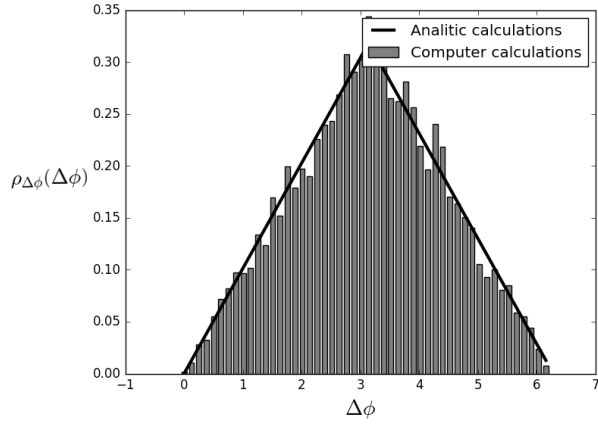
$$\cos\Delta\varphi = \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{p_1 p_2} \quad (52)$$

Их распределения

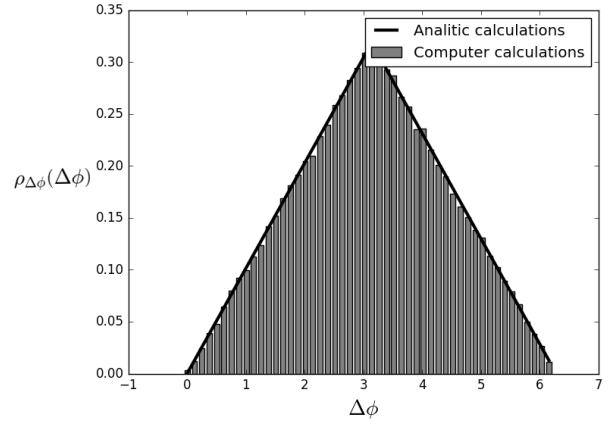
$$\rho_p(p) = \frac{p e^{-\frac{p^2}{2q_0^2}}}{q_0^2} \quad (53)$$

$$\rho_{\Delta\varphi}(\Delta\varphi) = \frac{3}{8\pi} \cdot \frac{\sqrt{1 - (\gamma/2)^2} - (\gamma/2) \arccos(\gamma/2)}{(1 - (\gamma/2)^2)^{3/2}}, \quad \text{где } \gamma = \cos\Delta\varphi \quad (54)$$

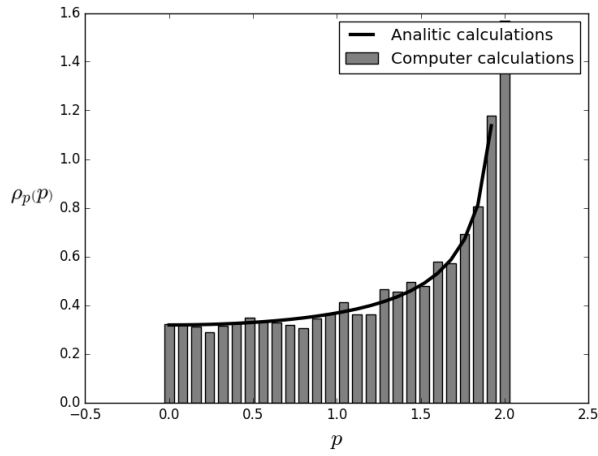
Гистограммы распределений этих величин изображены на рисунке 6.



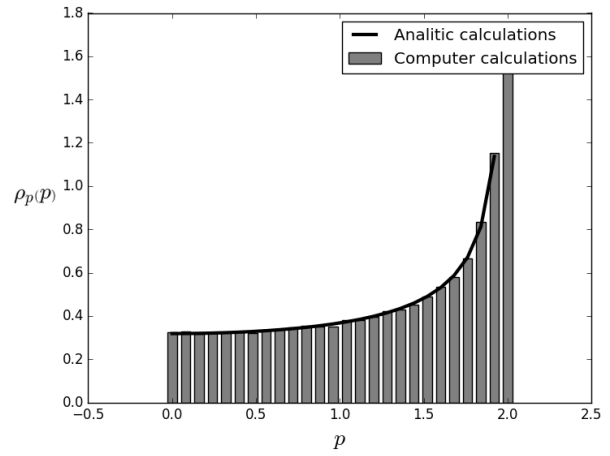
$N = 10^4$



$N = 10^5$



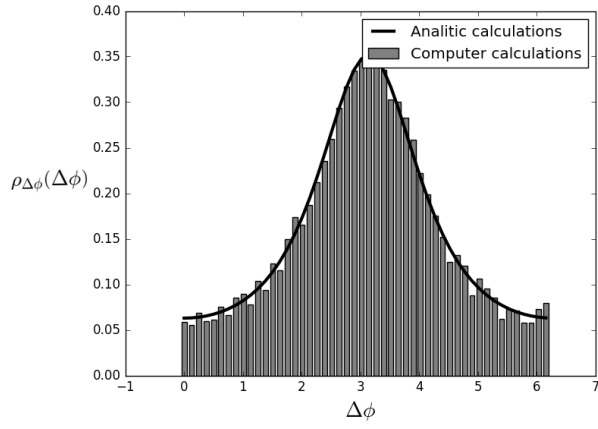
$N = 10^4$



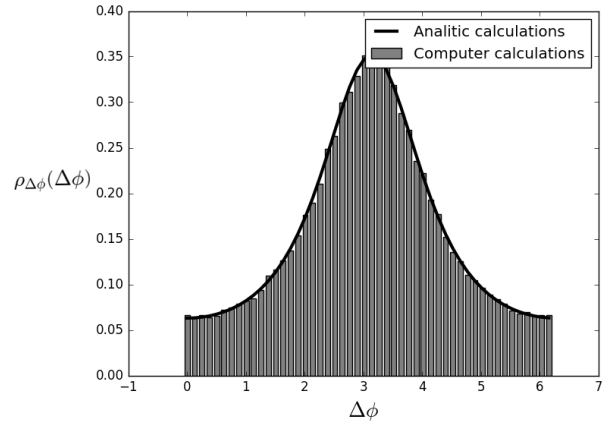
$N = 10^5$

Рис. 5: Распределение по углу разлета и величине импульса в константном случае

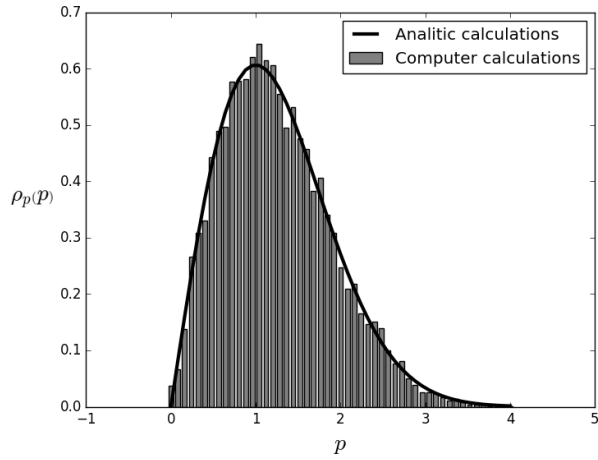




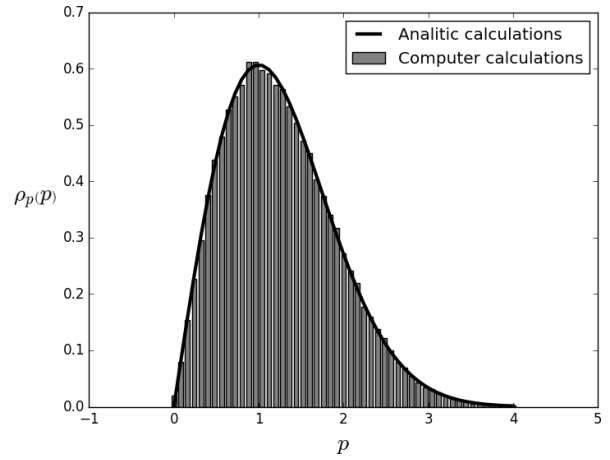
$N = 10^4$



$N = 10^5$



$N = 10^4$



$N = 10^5$

Рис. 6: Распределение по углу разлета и величине импульса в гауссовом случае

## 6 Заключение

### 6.1 Импульсная корреляционная функция

В результате всех вычислений мы можем однозначно сказать, как выглядит импульсная часть двухчастичной корреляционной функции  $G^2$ . Как правило эту функцию определяют для наборов декартовых компонент импульса двух частиц  $G^2 = G^2(p_1^x, p_1^y, p_1^z, p_2^x, p_2^y, p_2^z)$ . Вместо них мы воспользуемся величиной и направлением поперечных импульсов и быстротами:

$$G^2 = G^2(p_1, p_2, \varphi_1, \varphi_2, \eta_1, \eta_2) = \rho_p(p_1) \cdot \rho_p(p_2) \cdot \rho_{\Delta\varphi}(\varphi_2 - \varphi_1) \cdot \rho_\eta(\eta_1) \cdot \rho_\eta(\eta_2). \quad (55)$$

Функция  $\rho_\eta$  для модели Артру-Меннессиера известна. Она равна константе для широкого интервала быстрот.

### 6.2 Объяснение наличия заднего риджа

В нашей модели появляется пик с центром  $\Delta\varphi = \pi$ . Для полной функции распределения (на рис. 3), так как в среднем на одну частицу приходится одна единица быстроты и частицы от соседних струн в среднем разделены интервалом  $|\Delta\eta| = 1$ , это означает появление двух холмов с центрами в точках  $(\Delta\varphi, \Delta\eta) = (\pi, -1)$  и  $(\Delta\varphi, \Delta\eta) = (\pi, 1)$ . На рисунке мы видим их сильно "размазанными" по быстроте, то есть именно они и формируют задний ридж.

## A Код компьютерной программы для вычислений методом Монте-Карло

Код исполняется интерпретатором языка Python 3.4+ и использует дополнительные модули: matplotlib и numpy.

```
import math
import numpy
import random
from numpy import pi
from functools import partial
import pylab
from matplotlib import mlab

def plot_theory_and_practice(x_list,
                             practice_list,
                             theory_list,
                             string_name,
                             picture_name):
    dx = x_list[1] - x_list[0]
    practice = pylab.bar(x_list, practice_list, width = 0.7 * dx,
                        align = "center", color="gray")
```

```

theory = pylab.plot(x_list, theory_list, color="black", linewidth = 3)
xlabel_ = pylab.xlabel("$" + string_name + "$")
ylabel_ = pylab.ylabel(r"$\rho_{" + string_name + r"} \left( " + \backslash
string_name + r"\right)$")
practice[0].set_label("Computer calculations")
theory[0].set_label("Analytic calculations")
xlabel_.set_size(20)
ylabel_.set_rotation(1)
ylabel_.set_size(20)
ylabel_.set_horizontalalignment("right")
pylab.legend()
#pylab.show()
pylab.savefig(picture_name + ".png", bbox_inches='tight')
pylab.close()

```

```

def plot_distribution(*,
                    string_name,
                    calculate_function,
                    theory_function,
                    left_bound,
                    right_bound,
                    da,
                    N,
                    picture_name):
    a_list = numpy.array([left_bound + i * da
                          for i in range(int((right_bound - left_bound) / da) + 1)])
    dN_list = numpy.zeros(a_list.shape)
    for i in range(N):
        a = calculate_function()
        n = round((a - left_bound) / da)
        if 0 <= n < len(dN_list):
            dN_list[n] += 1
    dN_list[0] *= 2

    rho_a_practice = dN_list / (da * N)
    rho_a_theory = numpy.array([theory_function(a) for a in a_list])
    plot_theory_and_practice(a_list, rho_a_practice, rho_a_theory, string_name, \
picture_name + "_" + str(N))

```

```

def rand_angle():
    return (2 * random.random() - 1) * pi

```

```

def gauss_momentum_component(q0):
    return random.normalvariate(0.0, q0 / math.sqrt(2))

```

```

def gauss_momentum(q0):
    qx = gauss_momentum_component(q0)
    qy = gauss_momentum_component(q0)
    return math.sqrt(qx * qx + qy * qy)

def const_theory_alpha_distribution(a):
    if a <= pi:
        return a / (pi * pi)
    elif pi < a <= 2 * pi:
        return (2 * pi - a) / (pi * pi)
    return 0.0

def const_theory_momentum_distribution(p):
    rho = p / (2 * q0)
    if rho >= 1.0:
        return numpy.nan
    return (2 / pi) * (1 / (2 * q0)) * (1 / math.sqrt(1.0 - rho * rho))

def gauss_theory_alpha_distribution(a):
    y = math.cos(a)
    c = math.sqrt(1 - y * y / 4)
    return (3 / (8 * pi)) * (c - (y / 2) * math.acos(y / 2)) / (c ** 3)

def get_alpha_const():
    f1 = rand_angle()
    f2 = rand_angle()
    f3 = rand_angle()
    f = 1 if (f3 - f2) * (f2 - f1) >= 0 else 0
    alpha = (2 * f - 1) * abs(f3 - f1) / 2 + (1 - f) * pi
    alpha = pi + random.choice((-1, 1)) * (pi - alpha)
    return alpha

def get_momentum_const(q0):
    f1 = rand_angle()
    f2 = rand_angle()
    return 2 * q0 * abs(math.cos((f2 - f1) / 2.0))

def get_momentum_gauss(q0):
    q1 = gauss_momentum(q0)

```

```

q2 = gauss_momentum(q0)
f1 = rand_angle()
f2 = rand_angle()
return math.sqrt(q1 * q1 + q2 * q2 - 2 * q1 * q2 * math.cos(f2 - f1))

def get_alpha_gauss(q0):
    q1x = gauss_momentum_component(q0)
    q2x = gauss_momentum_component(q0)
    q3x = gauss_momentum_component(q0)
    q1y = gauss_momentum_component(q0)
    q2y = gauss_momentum_component(q0)
    q3y = gauss_momentum_component(q0)
    p1x = q2x - q1x
    p2x = q3x - q2x
    p1y = q2y - q1y
    p2y = q3y - q2y
    p1 = math.sqrt(p1x * p1x + p1y * p1y)
    p2 = math.sqrt(p2x * p2x + p2y * p2y)
    alpha = math.acos((p1x * p2x + p1y * p2y) / (p1 * p2))
    alpha = pi + random.choice((-1, 1)) * (pi - alpha)
    return alpha

q0 = 1.0
plot_distribution = partial(plot_distribution, N=100000,
                             calculate_function=lambda: 0,
                             theory_function=lambda x: numpy.nan)
plot_alpha_distribution = partial(plot_distribution, string_name=r"\Delta \phi",
                                   left_bound=0, right_bound=2 * pi, da=2*pi/50)
plot_momentum_distribution = partial(plot_distribution, string_name=r"p",
                                      left_bound=0.0, right_bound=2*q0, da=2*q0/25)

## CONST
plot_alpha_distribution(calculate_function=get_alpha_const,
                       theory_function=const_theory_alpha_distribution,
                       picture_name="const_alpha")

plot_momentum_distribution(calculate_function=partial(get_momentum_const, q0),
                           theory_function=const_theory_momentum_distribution,
                           picture_name="const_momentum")

## GAUSS
plot_momentum_distribution(calculate_function=partial(get_momentum_gauss, q0),
                           theory_function= \
                               lambda p: p * math.exp(-(p * p) / (2 * q0 * q0)) / q0 / q0,
```

```
        right_bound=4*q0,  
        picture_name="gauss_momentum")  
  
plot_alpha_distribution(calculate_function=partial(get_alpha_gauss, q0),  
                        theory_function=gauss_theory_alpha_distribution,  
                        picture_name="gauss_alpha")
```

## Список литературы

- [1] A. B. Kaidalov, Phys. Lett. B 116, p.459 (1982).
- [2] A. B. Kaidalov, K. A. Ter-Martirosyan, Phys. Lett. B 117 p.247 (1982).
- [3] A. Cappela, U. Sukhatme, Chung-I Tan, J. Tran Thanh Van, Phys. Lett. B 81, 68 (1979).
- [4] A. Cappela, U. Sukhatme, Chung-I Tan, J. Tran Thanh Van, Phys. Rep. 236 p.225 (1994).
- [5] Барбашов Б. М., Нестеренко В. В. Модель релятивистской струны в физике адронов, М.: Энергоиздат, 1987.
- [6] J. Schwinger, Phys. Rev. 82, p.664 (1951).
- [7] X. Artru, Phys. Rep. 97, p.147 (1983).
- [8] V. V. Vechernin, arXiv: 0812.0604 [hep-ph].
- [9] A. Capella, A. Krzywicki, Phys. Rev. D 18 p.4120 (1978).
- [10] **ALICE** Collaboration, B. Abelev *et al.*, arxiv:1307.3237 [nucl-ex].
- [11] M. A. Braun, C. Pajares, Phys. Lett. B 287, p.154 (1992).
- [12] M. A. Braun, C. Pajares, Nucl. Phys. B 390, p.542 (1993).
- [13] N. S. Amelin, N. Armesto, M. A. Brown, E. G. Ferreira, C. Pajares, Phys. Rev. Lett. 73, p.2813 (1994).
- [14] M. A. Braun, R. S. Kolevato, C. Pajares, V. V. Vechernin, Eur.Phys. J. C 32, p.535 (2004); arXiv:hep-ph/0307056.
- [15] V. V. Vechernin, R. S. Kolevato, Phys. Atom. Nucl. 70 p.1797 (2007).
- [16] V. V. Vechernin, R. S. Kolevato, Phys. Atom. Nucl. 70 p.1809 (2007).
- [17] K. Werner, Phys. Rep. 232, p.87 (1993).