# 1 Постановка задачи

Требуется написать программу, решающую численно двумерное уравнение теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} + f(x,y,t,u) \\ 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1 \\ 0 \le t \le T \\ u(x,y,0) = exp(-\frac{1}{\alpha^2}(x^2 - 2\beta xy + y^2))) \\ u(0,y,t) = u(0,y,0) \\ u(1,y,t) = u(1,y,0) \\ u(x,0,t) = u(x,0,0) \\ u(x,1,t) = u(x,1,0) \end{cases}$$

Функция $f(x,y,t,u)$ в первом варианте задания равна 0.

Для решения задачи используется разностная схема типа крест. Шаг по координатам одинаковый, и определяется числом узлов сетки по координатным осям $N$. Шаг по времени требуеся вычислить, исходя из условий устойчивости схемы.

Из аргументов командной строки программа получает значения: $T$, $N$, $\alpha$, $\beta$.

Результат решения записывается в файл result_фамилия.txt в виде матрицы чисел, отражающих значение $u(x,y,T)$ в узлах сетки. i-ая стока матрицы отражает значения $u(x,i,T)$.

Для удобства проверки результатов для записи в файл рекомендуется использовать следующую процедуру:

```
fprintf(fp, "%8.3f", u[i][j]);
```

Также программа должна выводить в стандартный вывод время, потраченное на решение.

# 2 Последовательный алгоритм

Ниже приводится описания последовательного алгоритма для численного решения уравнения теплопроводности на основе явной разностной схемы.

Решение уравнения проводится в области $\Omega = \{x \in [0;L], y \in [0;L], t \in [0;T]\}$. Вводим в этой непрерывной области сетку с шагом $\tau$ по времени и $h$ по координате. Пусть $K = \frac{T}{\tau}$, $N = \frac{L}{h}$. Решения уравнеия будем искать только в узлах выбранной сетки. Подмножество узлов сетки $\{(m,n,k) : 0 \le m \le N, 0 \le n \le N\}$ образуют слой по времени с номером $k$. Узлы этого слоя соответствуют моменту времени $t = k\tau$.

Используя стандартные разностные выражения для первой и второй производных исходное уравнение можно переписать в виде

$$\begin{cases} \frac{U(m,n,k+1)-U(m,n,k)}{\tau} = \frac{U(m-1,n,k)-2U(m,n,k)+U(m+1,n,k)}{h^2} + \frac{U(m,n-1,k)-2U(m,n,k)+U(m,n+1,k)}{h^2} + F(m,n,k) \\ U(m,n,0) = \Phi(m,n) \\ U(0,n,k) = \Phi(0,n) \\ U(N-1,n,k) = \Phi(N-1,n) \\ U(m,0,k) = \Phi(m,0) \\ U(m,N-1,k) = \Phi(m,N-1) \end{cases}$$

Эти уравнения позволяют вычислить значения $U(m,n,k+1)$ во всех точках $k+1$-го слоя, используя известные значения $U(m,n,k)$ на $k$-ом слое.

Схема устойчива при $\frac{2\tau}{h^2} \leq 1$.

Алгоритм выглядит следующим образом.

1. Определить размеры сетки и шаги по времени и координате.
2. Выделить два массива для хранения значений U на текущем и следующем слоях.
3. Заполнить массив U для текущего слоя начальными значениями используя $\Phi(n)$.
4. По известным значениям U на текущем слое вычислить значения U на следующем слое.
5. Если вновь вычесленный временной слой не достиг времени $T$, то возвращаемся на шаг 4.
6. Записываем полученные значения в файл.