Вычислительный практикум

Отчет по первому заданию

Автор: Павел Соболев

30 мая 2021 г.

Часть 1

Теория

Необходимо решить линейную краевую задачу

$$y''(x) + p(x)y' + q(x)y(x) = f(x) \tag{1.1}$$

с граничными условиями

$$y'(a) = \alpha y(a) + A, \tag{1.2}$$
$$y'(b) = \beta y(b) + B \tag{1.3}$$

разностным методом с применением метода разностной прогонки.

1.1 Получение системы линейных уравнений

Выберем равномерную сетку $\{x_k\}$:

$$x_k = a + kh,\ k \in \{0, \dots, n\},\ h = (b - a)/n. \tag{1.4}$$

Система (1.1) – (1.3) представима в виде

$$\begin{cases} \qquad - b_0 y_0 + c_0 y_1 & = d_0, \\ a_k y_{k-1} - b_k y_k + c_k y_{k+1} & = d_k \ \ \forall k \in \{1, ..., n-1\}, \\ a_n y_{n-1} - b_n y_n & = d_n, \end{cases} \tag{1.5}$$

где коэффициенты a_k, b_k, c_k, d_k для $k \in \{1, ..., n-1\}$ находятся из разностного соотношения

$$a_k = 1 - \frac{h}{2} p_k, \quad b_k = 2 - h^2 q_k, \quad c_k = 1 + \frac{h}{2} p_k, \quad d_k = h^2 f_k, \tag{1.6}$$

а граничные значения b_0, c_0, d_0 и a_n, b_n, d_n определяются из выбранных разностных соотношений для границ. Используя формулы численного дифференцирования

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + R, \tag{1.7}$$
$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} + R \tag{1.8}$$

и исключив главные части остатков R, получаем

$$y'(a) = \frac{y_1 - y_0}{h}\left(1 + \frac{h}{2} p_0\right) + \frac{h}{2} q_0 y_0 - \frac{h}{2} f_0, \tag{1.9}$$
$$y'(b) = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}\left(1 - \frac{h}{2} p_n\right) - \frac{h}{2} q_n y_n + \frac{h}{2} f_n. \tag{1.10}$$

Сопоставляя первое равенство из системы (1.5) с (1.9), определяем, что

$$-b_0 = -\frac{1}{h}\left(1 + \frac{h}{2} p_0\right) + \frac{h}{2} q_0 - \alpha, \tag{1.11}$$

$$c_0 = \frac{1}{h}\left(1 + \frac{h}{2}p_0\right), \tag{1.12}$$

$$d_0 = \frac{h}{2}f_0 + A. \tag{1.13}$$

Аналогично, сопоставляя последнее равенство из системы (1.5) с (1.10), получаем, что

$$a_n = \frac{1}{h}\left(\frac{h}{2}p_n - 1\right), \tag{1.14}$$

$$-b_n = -\frac{1}{h}\left(\frac{h}{2}p_n - 1\right) - \frac{h}{2}q_n - \beta, \tag{1.15}$$

$$d_n = B - \frac{h}{2}f_n \tag{1.16}$$

Таким образом, все коэффициенты системы (1.5) определены.

1.2 Решение системы линейных уравнений

Метод прогонки осуществляется в два этапа.

Прямой ход: для $i \in \{2, \ldots, n\}$

$$w_i = \frac{a_i}{b_{i-1}}, \tag{1.17}$$

$$b_i = b_i - w_i c_{i-1}, \tag{1.18}$$

$$d_i = d_i - w_i d_{i-1}, \tag{1.19}$$

и обратный ход:

$$y_n = \frac{d_n}{b_n}, \tag{1.20}$$

$$y_i = \frac{d_i - c_i y_{i+1}}{b_i} \quad \forall i \in \{n-1, n-2, \ldots, 1\}. \tag{1.21}$$

Часть 2

Реализация

Алгоритм реализован на языке программирования `Julia` в виде локального модуля `A1` и расположен в GitHub репозитории `paveloom-p/P12` в папке `A1`. Для воспроизведения результатов следуй инструкциям в файле `README.md`. Далее приводятся только сниппеты кода.

2.1 Получение системы линейных уравнений

Листинг 1: Вычисление диагоналей и правого вектор-столбца

```
# Compute the step
h = (b - a) / n

# Compute auxiliary variables
h⁻¹ = 1 / h
hₕ = h / 2
ax₀ = h⁻¹ * (hₕ * p(a) + 1)
axₙ = h⁻¹ * (hₕ * p(b) - 1)

# Compute diagonals and right-hand column
dl = OffsetArray([[1 - hₕ * p(a + k * h) for k in 1:n-1]; axₙ], 2:n+1)
d = [
        -ax₀ + hₕ * q(a) - α;
        [h^2 * q(a + k * h) - 2 for k in 1:n-1];
        -axₙ - hₕ * q(b) - β
    ]
du = [ax₀; [1 + hₕ * p(a + k * h) for k in 1:n-1]]
f = [hₕ * f(a) + A; [h^2 * f(a + k * h) for k in 1:n-1]; B - hₕ * f(b)]
```

Переменные названы в соответствии с теоретической частью. Конструктор типа `OffsetArray` позволяет создать вид на массив с произвольной индексацией (здесь: начиная с двух).

2.2 Решение системы линейных уравнений

Листинг 2: Метод прогонки

```
# Perform the forward sweep
for i in 2:n+1
    w = dl[i] / d[i-1]
    d[i] = d[i] - w * du[i-1]
    f[i] = f[i] - w * f[i-1]
end

# Prepare the result array
y = Vector{Float64}(undef, n+1)

# Perform the back substitution
y[n+1] = f[n+1] / d[n+1]
for i in n:-1:1
    y[i] = (f[i] - du[i] * y[i+1]) / d[i]
end
```

2.3 Пример

Дана линейная краевая задача

$$p(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}},\ q(x) = -2\sqrt{x^2+1},\ f(x) = \frac{10}{1+x(1-x)} \tag{2.1}$$

с граничными условиями

$$y'(0) = 0.5,\ y'(1) = -y(1). \tag{2.2}$$

Листинг 3: Определение и решение проблемы

```
include("src/A1.jl")
using .A1

y = solve(
    Problem(
        (x) -> 2 / √(x + 1), # p(x)
        (x) -> -2 * √(x^2 + 1), # q(x)
        (x) -> 10 / (1 + x * (1 - x)), # f(x)
        0, # a
        0, # α
        0.5, # A
        1, # b
        -1, # β
        0, # B
    ),
    Options(1000), # n
)
```

Листинг 4: Результат

```
-2.9190387032932716,
-2.918537123911357,
-2.918032397389765,
-2.9175245384392823,
-2.9170135616958115,
-2.9164994817207774,
-2.9159823130015385,
-2.9154620699517837,
-2.914938766911938,
-2.914412418149557,
<...>
-1.7775374532252,
-1.7757967977418432,
-1.7740536919877776,
-1.772308126705395,
-1.7705600925995977,
-1.768809580337628,
-1.7670565805488976,
-1.7653010838248149,
-1.7635430807186119,
-1.7617825617451692
```

Смотри полный вывод для данного примера в файле `result`.

Рисунок 1: Графики решений для $n = 10$ и $n = 100$