

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ПРАКТИКУМ

Отчет по первому заданию

Автор: Павел СОБОЛЕВ

30 мая 2021 г.

Часть 1

Теория

Необходимо решить линейную краевую задачу

$$y''(x) + p(x)y' + q(x)y(x) = f(x) \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$y'(a) = \alpha y(a) + A, \quad (1.2)$$

$$y'(b) = \beta y(b) + B \quad (1.3)$$

разностным методом с применением метода разностной прогонки.

1.1 Получение системы линейных уравнений

Выберем равномерную сетку $\{x_k\}$:

$$x_k = a + kh, \quad k \in \{0, \dots, n\}, \quad h = (b - a)/n. \quad (1.4)$$

Система (1.1) – (1.3) представима в виде

$$\begin{cases} -b_0 y_0 + c_0 y_1 & = d_0, \\ a_k y_{k-1} - b_k y_k + c_k y_{k+1} & = d_k \quad \forall k \in \{1, \dots, n-1\}, \\ a_n y_{n-1} - b_n y_n & = d_n, \end{cases} \quad (1.5)$$

где коэффициенты a_k, b_k, c_k, d_k для $k \in \{1, \dots, n-1\}$ находятся из разностного соотношения

$$a_k = 1 - \frac{h}{2}p_k, \quad b_k = 2 - h^2 q_k, \quad c_k = 1 + \frac{h}{2}p_k, \quad d_k = h^2 f_k, \quad (1.6)$$

а граничные значения b_0, c_0, d_0 и a_n, b_n, d_n определяются из выбранных разностных соотношений для границ. Используя формулы численного дифференцирования

$$y'(x) = \frac{y(x+h) - y(x)}{h} + R, \quad (1.7)$$

$$y'(x) = \frac{y(x) - y(x-h)}{h} + R \quad (1.8)$$

и исключив главные части остатков R , получаем

$$y'(a) = \frac{y_1 - y_0}{h} \left(1 + \frac{h}{2}p_0\right) + \frac{h}{2}q_0 y_0 - \frac{h}{2}f_0, \quad (1.9)$$

$$y'(b) = \frac{y_n - y_{n-1}}{h} \left(1 - \frac{h}{2}p_n\right) - \frac{h}{2}q_n y_n + \frac{h}{2}f_n. \quad (1.10)$$

Сопоставляя первое равенство из системы (1.5) с (1.9), определяем, что

$$-b_0 = -\frac{1}{h} \left(1 + \frac{h}{2}p_0\right) + \frac{h}{2}q_0 - \alpha, \quad (1.11)$$

$$c_0 = \frac{1}{h} \left(1 + \frac{h}{2} p_0 \right), \quad (1.12)$$

$$d_0 = \frac{h}{2} f_0 + A. \quad (1.13)$$

Аналогично, сопоставляя последнее равенство из системы (1.5) с (1.10), получаем, что

$$a_n = \frac{1}{h} \left(\frac{h}{2} p_n - 1 \right), \quad (1.14)$$

$$-b_n = -\frac{1}{h} \left(\frac{h}{2} p_n - 1 \right) - \frac{h}{2} q_n - \beta, \quad (1.15)$$

$$d_n = B - \frac{h}{2} f_n \quad (1.16)$$

Таким образом, все коэффициенты системы (1.5) определены.

1.2 Решение системы линейных уравнений

Метод прогонки осуществляется в два этапа.

Прямой ход: для $i \in \{2, \dots, n\}$

$$w_i = \frac{a_i}{b_{i-1}}, \quad (1.17)$$

$$b_i = b_i - w_i c_{i-1}, \quad (1.18)$$

$$d_i = d_i - w_i d_{i-1}, \quad (1.19)$$

и обратный ход:

$$y_n = \frac{d_n}{b_n}, \quad (1.20)$$

$$y_i = \frac{d_i - c_i y_{i+1}}{b_i} \quad \forall i \in \{n-1, n-2, \dots, 1\}. \quad (1.21)$$

Часть 2

Реализация

Алгоритм реализован на языке программирования **Julia** в виде локального модуля **A1** и расположен в GitHub репозитории **paveloom-p/P12** в папке **A1**. Для воспроизведения результатов следуй инструкциям в файле **README.md**. Далее приводятся только сниппеты кода.

2.1 Получение системы линейных уравнений

Листинг 1: Вычисление диагоналей и правого вектор-столбца

```
# Compute the step
h = (b - a) / n

# Compute auxiliary variables
h-1 = 1 / h
hh = h / 2
ax0 = h-1 * (hh * p(a) + 1)
axn = h-1 * (hh * p(b) - 1)

# Compute diagonals and right-hand column
dl = OffsetArray([1 - hh * p(a + k * h) for k in 1:n-1]; axn], 2:n+1)
d = [
    -ax0 + hh * q(a) - α;
    [h2 * q(a + k * h) - 2 for k in 1:n-1];
    -axn - hh * q(b) - β
]
du = [ax0; [1 + hh * p(a + k * h) for k in 1:n-1]]
f = [hh * f(a) + A; [h2 * f(a + k * h) for k in 1:n-1]; B - hh * f(b)]
```

Переменные названы в соответствии с теоретической частью. Конструктор типа **OffsetArray** позволяет создать вид на массив с произвольной индексацией (здесь: начиная с двух).

2.2 Решение системы линейных уравнений

Листинг 2: Метод прогонки

```
# Perform the forward sweep
for i in 2:n+1
    w = dl[i] / d[i-1]
    d[i] = d[i] - w * du[i-1]
    f[i] = f[i] - w * f[i-1]
end

# Prepare the result array
y = Vector{Float64}(undef, n+1)

# Perform the back substitution
y[n+1] = f[n+1] / d[n+1]
for i in n:-1:1
    y[i] = (f[i] - du[i] * y[i+1]) / d[i]
end
```

2.3 Пример

Дана линейная краевая задача

$$p(x) = \frac{2}{\sqrt{x+1}}, \quad q(x) = -2\sqrt{x^2+1}, \quad f(x) = \frac{10}{1+x(1-x)} \quad (2.1)$$

с граничными условиями

$$y'(0) = 0.5, \quad y'(1) = -y(1). \quad (2.2)$$

Листинг 3: Определение и решение проблемы

```
include("src/A1.jl")
using .A1

y = solve(
    Problem(
        (x) -> 2 / sqrt(x + 1), # p(x)
        (x) -> -2 * sqrt(x^2 + 1), # q(x)
        (x) -> 10 / (1 + x * (1 - x)), # f(x)
        0, # a
        0, # α
        0.5, # A
        1, # b
        -1, # β
        0, # B
    ),
    Options(1000), # n
)
```

Листинг 4: Результат

```
-2.9190387032932716,  
-2.918537123911357,  
-2.918032397389765,  
-2.9175245384392823,  
-2.9170135616958115,  
-2.9164994817207774,  
-2.9159823130015385,  
-2.9154620699517837,  
-2.914938766911938,  
-2.914412418149557,  
<...>  
-1.7775374532252,  
-1.7757967977418432,  
-1.7740536919877776,  
-1.772308126705395,  
-1.7705600925995977,  
-1.768809580337628,  
-1.7670565805488976,  
-1.7653010838248149,  
-1.7635430807186119,  
-1.7617825617451692
```

Смотри полный вывод для данного примера в файле [result](#).

Рисунок 1: Графики решений для $n = 10$ и $n = 100$

