Вычислительный практикум

Отчет по второму заданию

Автор: Павел Соболев

29 мая 2021 г.

Часть 1

Теория

Необходимо решить задачу Коши для жесткой системы уравнений

$$y'(x) = \alpha(A)y(x) + \beta(A)z(x) + p(x, z(x)), \tag{1.1}$$

$$z'(x) = \gamma(A)y(x) + \delta(A)z(x) + q(x, y(x), z(x)) \tag{1.2}$$

на промежутке $[a, b]$ с начальными данными

$$y(a) = y_0,\ z(a) = z_0. \tag{1.3}$$

Выберем равномерную сетку $\{x_k\}$:

$$x_k = a + kh,\ k \in \{0, \dots, n\},\ h = (b - a)/n. \tag{1.4}$$

Применим неявный метод Эйлера

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \tag{1.5}$$

для уравнений (1.1) и (1.2). Уравнение (1.1) линейное, что позволяет найти зависимость

$$y_{n+1}(z_{n+1}) = \frac{1}{1 - h\alpha(A)}(y_n + h(\beta(A)z_{n+1} + p(x_{n+1}, z_{n+1}))) \tag{1.6}$$

и подставить её в нелинейное уравнение (1.2):

$$0 = -z_{n+1} + z_n + h\left(\gamma(A)y_{n+1}(z_{n+1}) + \delta(A)z_{n+1} + q(x_{n+1}, y_{n+1}(z_{n+1}), z_{n+1})\right) \tag{1.7}$$

За одну итерацию необходимо найти корень z_{n+1} нелинейного уравнения (1.7), а далее определить y_{n+1} из (1.6).

Часть 2

Реализация

Алгоритм реализован на языке программирования `Julia` в виде локального модуля `A2` и расположен в GitHub репозитории `paveloom-p/P12` в папке `A2`. Для воспроизведения результатов следуй инструкциям в файле `README.md`. Далее приводятся только сниппеты кода.

2.1 Алгоритм

Листинг 1: Решение системы нелинейных уравнений

```
# Compute the step
h = (b - a) / n

# Prepare the result arrays
y = Vector{Float64}(undef, n+1); z = copy(y)

# Put the boundary values first
y[1] = y₀
z[1] = z₀

# Compute the rest
for i in 1:n
    x = a + i * h
    yᵢ₊₁(x, zᵢ₊₁) = (y[i] + h * (β(A) * zᵢ₊₁ + p(x, zᵢ₊₁))) / (1 - h * α(A))
    z[i+1] = find_zero(
        (zᵢ₊₁) -> -zᵢ₊₁ + z[i] + h *
                  (γ(A) * yᵢ₊₁(x, zᵢ₊₁) + δ(A) * zᵢ₊₁ + q(x, zᵢ₊₁)),
        z[i],
    )
    y[i+1] = yᵢ₊₁(x, z[i+1])
end
```

Функция `find_zero` взята из пакета `Roots`.

2.2 Пример

Необходимо решить задачу Коши для жесткой системы уравнений

$$y'(x) = \frac{1}{3}y(x) - Az(x) + \sqrt{\frac{z^2}{2}}, \tag{2.1}$$

$$z'(x) = -2y + Az - \frac{z}{z^2+1} \tag{2.2}$$

на промежутке $[0, 1]$ с начальными данными

$$y(0) = -4, \; z(0) = 4. \tag{2.3}$$

Листинг 2: Определение и решение проблемы

```
y, z = solve(
    Problem(
        (A) -> 1 / 3, # α
        (A) -> -A, # β
        (A) -> -2, # γ
        (A) -> A, # γ
        (x, z) -> sqrt(z^2 / 2), # p
        (x, z) -> - z / (z^2 + 1), # q
        0, # a
        1, # b
        -5, # A
        -4, # y₀
        4, # z₀
    ),
    Options(1000), # n
)
```

Рисунок 1: График решений