

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА ПЕРВОГО РОДА СЕТОЧНЫМ МЕТОДОМ С РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ ПО А.Н. ТИХОНОВУ

© 2018 г. А.А. Белов^{1,2}, Н.Н. Калиткин³

¹ Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Физический факультет
aa.belov@physics.msu.ru

² Российский университет дружбы народов, Факультет физико-математических и естественных наук, Москва

³ Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва
kalitkin@imamod.ru

Работа поддержана грантом РФФИ 16-31-00062 и Программой РУДН "5-100".

Рассмотрена линейная некорректная задача для интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Для регуляризации используется стабилизатор А.Н. Тихонова. Задача решается сеточным методом, в котором интегральные операторы заменяются простейшими квадратурами, а дифференциальные – простейшими конечными разностями. Экспериментально исследовано влияние параметра регуляризации и сгущения сеток на точность алгоритма. Показано, что наилучшую точность обеспечивает регуляризатор нулевого порядка. Предложенный подход применен к прикладной задаче разрешения двух близко расположенных звезд при известной инструментальной функции телескопа. Показано, что две звезды четко различимы, если расстояние между ними составляет ~ 0.2 от ширины инструментальной функции, а яркости отличаются на 1-2 звездных величины.

Ключевые слова: некорректные задачи, регуляризация по Тихонову, сеточный метод.

SOLUTION OF THE FREDHOLM EQUATION OF THE FIRST KIND BY MESH METHOD WITH TIKHONOV REGULARIZATION

A.A. Belov^{1,2}, N.N. Kalitkin³

¹ Lomonosov Moscow State University, Faculty of Physics, Russia

² Friendship University of Russia (RUDN University), Faculty of Physical, Mathematical and Natural sciences

³ Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Russia

We consider linear ill-posed problem for the Fredholm equation of the first kind. For its regularization, the stabilizer of A.N. Tikhonov is implied. To solve the problem, we use the mesh method in which we replace integral operators by the simplest quadratures and differential ones by the simplest finite differences. We investigate experimentally the influence of the regularization parameter and mesh thickening on the algorithm accuracy. The best performance is provided by the zeroth order regularizer. We explain the reason of this result. We imply the proposed algorithm for an applied problem of recognition of

two closely situated stars if the telescope instrument function is known. Also, we show that the stars are clearly distinguished if the distance between them is ~ 0.2 of the instrumental function width and brightness differs by 1-2 stellar magnitude.

Key words: ill-posed problems, Tikhonov regularization, mesh method.

1. Введение

1.1. Методы решения. Некорректными является большое количество прикладных задач. Для их решения разработан ряд методов. Во-первых, это параметрические методы, в которых решение представляется в виде разложения по некоторому базису, и регуляризованное уравнение сводится к задаче оптимизации коэффициентов разложения (см., например, [1–3]). Успех этого подхода сильно зависит от удачного выбора базиса. Такие методы трудны в исследовании; особенную трудность представляет нахождение оценок точности и обусловленности при расчетах с конечной разрядностью чисел. Большинство доказательств проведены для точных вычислений с бесконечной разрядностью, то есть без ошибок округления.

Во-вторых, для получения приближенного аналитического решения нередко применяют итерационные методы с простыми или неявными итерациями [4, 5]. Число итераций также является регуляризирующим параметром [6]. Это выглядит заманчиво, поскольку не нужно вводить дополнительные стабилизирующие члены и, тем самым, увеличивать невязку. С другой стороны, в общем случае итерации приходится реализовывать численно. Конечно-разностная аппроксимация соответствующих квадратур вносит некоторую систематическую погрешность в оператор и правую часть. Чтобы уменьшить ее, необходимо проводить вычисления на сгущающихся сетках.

Третий подход представлен разнообразными сеточными методами (конечно-разностными или конечно-элементными), в которых решение вычисляется в наборе дискретных узлов сетки, то есть, по существу, заменяется кусочно-постоянной функцией. При таком подходе исходная задача сводится к системе алгебраических уравнений, которая решается любым прямым или итерационным методом [7, 8]. Ю.Л. Гапоненко показал, что конечно-разностная аппроксимация делает задачу корректной, то есть имеет место саморегуляризация [9, 10]. Исследование конечно-элементных аппроксимаций (для конкретных прикладных задач) проведено, например, в [11, 12]. Однако доказательства и оценки сходимости справедливы для вычислений с бесконечной разрядностью, так как не учитывают ошибки округления. Исчерпывающий обзор по методам регуляризации для уравнений в частных производных представлен в [13, 14].

1.2. Сходимость методов. Центральным моментом всех регуляризующих алгоритмов является обоснование сходимости и оценка фактической точности, то есть разности между точным решением и найденным приближенным. Обзор литературы по этому вопросу дан в [15]. Известные апостериорные оценки являются мажорантными и нередко сильно завышают погрешность (до 10 раз и более). Довольно часто они требуют специфической информации о решении, которую в сложных прикладных задачах просто получить [16].

Еще одним важным вопросом является выбор параметра регуляризации. Данная проблема нетривиальна, поскольку в большинстве прикладных расчетов уровень погрешности фиксирован и не стремится к нулю [17]. Наилучшим известным решением этого вопроса является обобщенный принцип невязки [18].

В данной работе, следуя общей идее сеточных методов, вводится прямой сеточный метод решения интегрального уравнения Фредгольма. Для регуляризации используется стабилизатор Тихонова нулевого порядка. Показано, что он позволяет получать гораздо более высокую точность по сравнению со стабилизаторами более высоких порядков. Точность решения линейной системы контролируется с помощью метода сгущения сеток и оценки погрешности по Ричардсону [19]. Фундаментальные теоремы, строго обосновывающие эту оценку, доказаны в [20]. В некорректных задачах такой подход ранее не применялся. Предложен эвристический алгоритм для выбора параметра регуляризации, опирающийся на эти апостериорные оценки.

2. Формулировка метода

2.1. Несамосопряженный оператор. Запишем линейную некорректную задачу в следующем виде:

$$Au = f. \quad (1)$$

Здесь A – линейный оператор, f – известная правая часть, u – неизвестное решение. Функции u и f принадлежат разным пространствам. Если известно некоторое приближенное решение \tilde{u} , то на нем уравнение (1) не обращается в тождество. Величина $\psi = A\tilde{u} - f$ называется невязкой.

Эквивалентная формулировка задачи (1) сводится к минимизации невязки

$$(Au - f, Au - f) \rightarrow \min. \quad (2)$$

Минимум достигается на точном решении и равняется нулю. Однако задача (2) остается некорректно поставленной.

А.Н. Тихонов предложил заменить (2) корректной задачей

$$(Au - f, Au - f) + \alpha w(u) \rightarrow \min, \quad 0 < \alpha \ll 1, \quad (3)$$

$$w(u) = p_0(u, u) + p_1(u_x, u_x) + p_2(u_{xx}, u_{xx}) + \dots, \quad p_k \geq 0. \quad (4)$$

Последовательные члены (4) называются стабилизаторами нулевого, первого, второго и т.д. порядков. Уравнение Эйлера для вариационной задачи (3) имеет следующий вид:

$$A^* Au + \alpha(p_0 u - p_1 u_{xx} + p_2 u_{xxxx} + \dots) = A^* f, \quad (5)$$

где A^* – эрмитово сопряженный оператор. Наличие производных в (5) требует постановки граничных условий. Они выводятся из экстремальной задачи (3). Их число равно порядку дифференциального уравнения. Если используется только регуляризатор нулевого порядка ($p_k = 0$ для $k \neq 0$), то граничные условия отсутствуют. Если присутствует только стабилизатор первого порядка ($p_k = 0$ для $k \neq 1$), то необходимо положить $u_x = 0$ на обеих границах. Для стабилизатора нулевого порядка ($p_k = 0$ для $k \neq 2$), граничные условия на обеих границах имеют вид $u_{xx} = 0$, $u_{xxx} = 0$.

Сеточный метод. Идея метода достаточно очевидна. Рассмотрим $u(x)$ на отрезке $x \in [a, b]$ и $f(y)$ на $y \in [c, d]$. Введем сетки $\{x_n, 0 \leq n \leq N\}$ и $\{y_m, 0 \leq m \leq M\}$ на этих отрезках. Заменяем все интегралы суммами, а производные – разностями. Все квадратурные и разностные формулы должны иметь **одинаковый** порядок точности. Тогда (5) переходит в линейную алгебраическую систему порядка $N+1$ относительно сеточных значений функции u_n . Полученная линейная система решается любым прямым методом (например, методом Гаусса).

Однако здесь мы сталкиваемся с рядом трудностей. Во-первых, некорректность задачи (1) означает, что оператор A плохо обусловлен. Обусловленность A^* также плоха. Конечно-разностная аппроксимация этих операторов приводит к матрицам с огромным числом обусловленности $\kappa \gg 1$. Тогда число обусловленности матрицы $A^* A$ равно $\kappa^2 \gg \kappa$. При решении линейной системы с такой матрицей теряется большое число десятичных знаков на ошибки округления. Тем самым, требуются вычисления с большой разрядностью чисел (128 бит и более).

Во-вторых, использование стабилизаторов высокого порядка оказывается неоправданным. Стабилизатор нулевого порядка приводит к добавлению диагональной матрицы αE к линейной системе. Поэтому он улуч-

шает обусловленность. Однако для стабилизатора первого порядка на равномерной сетке с граничными условиями $u_x = 0$ «регуляризирующая» матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Ее определитель равен нулю. Таким образом, добавление этой матрица к A^*A не улучшает, а, наоборот, ухудшает обусловленность линейной системы. Заметим, что в дифференциальной записи граничные условия $u_x = 0$ для дифференциального уравнения второго порядка означают постановку задачи Неймана. Ее решение существует лишь при хорошо известных условиях на правую часть и не единственно. Следовательно, такой стабилизатор сам по себе является некорректным.

Нетрудно убедиться, что добавление стабилизатора второго порядка ухудшает обусловленность еще сильнее.

В третьих, при использовании сеточных аппроксимаций необходимо контролировать сеточную сходимость, то есть проводить расчеты на наборе сгущающихся сеток. Для этого следует использовать метод Рунге-Кутты и одновременно контролировать границы его применимости [19]. Например, при многократном сгущении вдвое (то есть при удвоении числа узлов и уменьшении шага в два раза) разности между решениями на последовательных сетках должны убывать в 2^q раз, где q – это порядок точности используемой аппроксимации (именно по этой причине все формулы следует аппроксимировать с одинаковым порядком точности).

В четвертых, необходимо оптимизировать значение α . Если оно слишком мало, то обусловленность слишком велика, и решение содержит значительную случайную погрешность, вызванную ошибками округления. Если α избыточно велико, то регуляризованная задача заметно отличается от исходной, и в решении появляется большая систематическая погрешность. В обоих случаях конструктивные методы определения этой погрешности отсутствуют.

2.2. Самосопряженный оператор. Если $A^* = A$, то можно построить существенно более хороший алгоритм. Заметим, что в этом случае u и f

принадлежат одному и тому же пространству. Задача (1) эквивалентна следующей вариационной задаче:

$$(u, Au) - 2(u, f) \rightarrow \min. \quad (7)$$

Регуляризованная вариационная задача выглядит следующим образом:

$$(u, Au) - 2(u, f) + \alpha w(u) \rightarrow \min. \quad (8)$$

Запишем уравнение Эйлера для задачи (8)

$$Au + \alpha(p_0 u - p_1 u_{xx} + p_2 u_{xxxx} + \dots) = f. \quad (9)$$

Граничные условия для (9) аналогичны таковым для (5).

К (9) сеточный метод применяется так же, как описано выше. Функции $u(x)$ и $f(y)$ определены на одном и том же отрезке $a = c$, $b = d$, но сетки для этих функций в общем случае могут быть различными.

Уравнение (9) приводит к линейной алгебраической системе с матрицей A . Она имеет существенно более хорошую обусловленность, чем система (5). Следовательно, этот алгоритм значительно более устойчив к ошибкам округления. Он менее требователен к разрядности компьютера и позволяет получать более высокую точность.

2.3. Погрешность входных данных. Разработка алгоритма должна быть дополнена исследованием, как регуляризованное решение зависит от погрешности входных данных: правой части уравнения и самого оператора. Это один из наиболее сложных вопросов теории (особенно погрешности задания оператора). Методы, которые не учитывают эти погрешности, в англоязычной литературе называются «еггор free». Они справедливо критикуются в литературе. В настоящей работе полное исследование этих проблем не представлено. Однако можно построить некоторые косвенные рассуждения. Поясним их.

Следует различать два типа ошибок. Во-первых, это случайные погрешности, связанные с неправильным учетом ряда случайных факторов. Такие ошибки можно легко описать, прибавляя гауссов «шум» с разумно выбранной амплитудой к правой части и ядру оператора. Второй тип ошибок – это систематические погрешности. Их можно учесть, прибавляя некоторое гладкое отклонение с малой амплитудой.

В наших расчетах роль случайной погрешности играют ошибки округления компьютера. Они возникают как при вычислении правой части и оператора, так и при всех арифметических операциях. В данной работе пока-

зано, что благодаря этим ошибкам точность ограничена некоторым неулучшаемым фоном. Замена производных и интегралов конечно-разносными выражениями эквивалентна введению такой систематической погрешности. Влияние этого эффекта также исследуется в данной статье. Показано, что при сгущении сеток систематические погрешности входных данных стремятся к нулю и соответствующая часть погрешности решения также стремится к нулю.

Замечание. Существует большое количество работ, посвященных построению параметрических методов для решения некорректных задач. В них решение аппроксимируется некоторой априорной зависимостью от x , содержащей подгоночные параметры. Возможное отклонение этой аппроксимирующей функции от точного решения также следует считать систематической погрешностью. Вопрос оценки систематической погрешности в указанном подходе очень сложен. Напротив, в сеточном методе такое исследование осуществляется при помощи хорошо разработанной процедуры сгущения сеток. Все теоремы, обосновывающие эту процедуру, доказаны в [20].

3. Уравнение Фредгольма первого рода

3.1. Интегральная форма. Некорректно поставленная задача имеет следующий вид:

$$\int_a^b K(y, x)u(x)dx = f(y), \quad y \in [c, d]. \quad (10)$$

В общем случае она не является самосопряженной. Регуляризация по Тихонову приводит к самосопряженной задаче, которая является конкретной реализацией (3)

$$\int_a^b Q(z, x)u(x)dx + \alpha(p_0u - p_1u_{xx} + p_2u_{xxxx} + \dots) = F(z), \quad z \in [a, b], \quad (11)$$

$$Q(z, x) = Q(x, z) = \int_c^d K(y, x)K(y, z)dy, \quad F(z) = \int_c^d K(y, z)f(y)dy. \quad (12)$$

Граничные условия имеют такой же вид, как в разделе 2.1.

3.2. Сеточная форма. Выбор квадратур. В принципе сеточная реализация может быть выполнена на произвольной неравномерной сетке. Однако современные требования к точности требуют проведения расчетов на сгущающихся сетках с одновременным нахождением оценки погрешности по методу Ричардсона. Поэтому сетки должны быть квазиравномерными [22]. При

сгущении сеток мы сравниваем профили u_n на последовательных вложенных сетках. Это можно естественно сделать при использовании квадратурной формулы трапеций, которая использует значения функции в узлах сетки и имеет точность $O(h^2)$. При двукратном сгущении узлы каждой текущей сетки совпадают с четными узлами последующей, более подробной сетки. Поэтому возможно сравнение сеточных решений в совпадающих узлах.

Формула средних также имеет точность $O(h^2)$ с вдвое меньшим коэффициентом. Однако она использует значения функции в серединах интервалов. При двукратном сгущении с уменьшением шагов вдвое средние точки вложенных сеток не совпадают, и прямое сравнение профилей решения оказывается невозможным. В принципе можно применять трехкратное сгущение сетки вместо двукратного, тогда полуцелые точки будут совпадать. Однако это уменьшает число доступных сгущений в 1.5 раза. Набор сеток оказывается слишком коротким для проверки применимости метода Рундсона. Таким образом, использование формулы средних нецелесообразно.

Формула Симпсона имеет гораздо более высокую точность $O(h^4)$. Однако при сгущении сеток погрешность убывает настолько быстро, что расчеты выходят на фон ошибок округления на третьей-четвертой сетке. При таком малом числе доступных сеток проверить применимость метода Рундсона практически невозможно. Тем самым, пользоваться формулой Симпсона также не следует.

Итак, формула трапеций оказывается наиболее удобной. Для простоты запишем ее на равномерной сетке с шагами $h = (b - a)/N$ и $\tau = (d - c)/M$.

Схема. Для формулы трапеций на равномерной сетке линейная система для (5) имеет следующий вид:

$$\sum_{n=0}^N \left[(A^* A)_{k,n} + \alpha B_{k,n} \right] u_n = F_k, \quad 0 \leq k \leq N. \quad (13)$$

Здесь используются обозначения

$$(A^* A)_{k,n} = \tau h g_n \sum_{m=0}^M g_m K_{m,k} K_{m,n}, \quad (14)$$

$$F_k = \tau \sum_{m=0}^M g_m K_{m,k} f_m. \quad (15)$$

Веса $g = 1/2$ для наименьшего и наибольшего значений индекса по соответ-

ствующему направлению и $g = 1$ для всех внутренних индексов. Для стабилизатора нулевого порядка с $p_0 = 1$ матрица B диагональна

$$B_{k,n} = \begin{cases} g_k, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases} \quad (16)$$

Напомним, что такая матрица улучшает обусловленность линейной системы. Для регуляризатора первого порядка с $p_1 = 1$ и соответствующими граничными условиями матрица B трехдиагональна

$$B_{k,n} = \frac{1}{h^2} \begin{cases} -1, & k = n = 0, N, \\ -2, & k = n = \overline{1, N-1}, \\ 1, & |k - n| = 1, \\ 0, & |k - n| > 1. \end{cases} \quad (17)$$

Напомним, что определитель этой матрицы равен нулю и обусловленность ухудшается с уменьшением h . Для стабилизатора второго порядка матрица B пятидиагональна и ее элементы имеют порядок $O(h^{-4})$. Мы не выписываем эту матрицу из-за ее громоздкости.

Сеточная сходимость. Выберем грубые начальные сетки с небольшими числами узлов по каждому направлению и вычислим сеточное решение u_n . Затем одновременно уменьшим вдвое шаги по всем переменным и вычислим решение \hat{u}_n . Новая сетка содержит вдвое больше интервалов, и ее четные узлы совпадают с узлами предыдущей сетки. В этих узлах вычислим разность $\hat{u}_{2n} - u_n$ и найдем ее норму L_2

$$\|\hat{u} - u\|^2 = h \sum_{n=0}^N g_n (\hat{u}_{2n} - u_n)^2; \quad (18)$$

здесь шаг h и индекс суммирования относятся к предыдущей сетке. Пусть сгущение проведено несколько раз, и для каждой пары последовательных сеток вычислена разность (18). Если все формулы имеют порядок точности q , то в идеальном случае отношение величин $\|\hat{u} - u\|$ на последовательных парах сеток (то есть пара 1-я–2-я к паре 2-я–3-я и т.д.) должно равняться 2^q . Для формулы трапеций $q = 2$, поэтому указанное отношение должно убывать в 4 раза.

Указанный идеальный случай подразумевал, что погрешность пропорциональна h^q . Однако фактически ошибка представляет собой ряд по степеням h , начинающийся с h^q . Мы используем симметричные формулы для квадратур и разностей. Для них разложение включает только степени h

одинаковой четности. В результате отношение указанных норм отличается от 2^q на величину $O(h^2)$.

Пусть отношение норм $\|\hat{u} - u\|$ близко к 2^q на нескольких последовательных парах сеток (как минимум, на шести-восьми). Тогда выполняются условия применимости метода Ричардсона. В этом случае погрешность можно оценить по следующей формуле:

$$r = \frac{\hat{u} - u}{2^q - 1}. \quad (19)$$

Сетки необходимо сгущать до тех пор, пока норма этой оценки не станет меньше заданной точности ε .

Однако чем подробнее сетка, тем сильнее эффект накопления ошибок округления. Это проявляется в том, что, начиная с некоторой сетки, норма отношения перестает стремиться к 2^q и затем начинает удаляться от этой величины и случайно осциллирует. Этот эффект может наблюдаться раньше, чем достигнуто требуемое ε . В некорректных задачах достигнуть малого ε при стандартных 64-битовых вычислениях зачастую не удастся. В этих случаях рекомендуется использовать 128-битовые числа.

Замечание. Вопрос оценки сеточной точности при решении некорректных задач теоретически исследован в [9, 10]. В них использовалась кусочно-постоянная аппроксимация решения $u(x)$ в интервалах сетки, что достаточно близко к формуле средних. Было показано, что сама по себе сеточная аппроксимация является регуляризирующим алгоритмом. Была доказана сходимость со скоростью $O(h)$, что достаточно естественно для кусочно-постоянной аппроксимации непрерывной функции.

Однако при доказательстве предполагалось, что все расчеты выполняются точно, то есть с бесконечной разрядностью чисел. Однако при решении некорректных задач ошибки округления часто являются основным препятствием к получению высокой точности.

4. Численное исследование

4.1. Тестовая задача. Тестирование метода целесообразно проводить на задаче с известным точным решением. Это позволяет определить погрешность численного решения при помощи непосредственного сравнения с точным решением и сопоставить точную величину погрешности с апостериорной оценкой, получаемой методом Ричардсона или любым другим методом в ходе расчета. С этой целью мы построили следующий тест для

несамосопряженного оператора. Ядро имеет вид

$$K(y, x) = \exp(yx), \quad x \in [-1, 1], \quad y \in [1, 2]. \quad (20)$$

Несамосопряженность возникает из-за того, что ядро задано на прямоугольнике. Выберем точное решение

$$u(x) = \exp(x), \quad x \in [-1, 1]. \quad (21)$$

Правая часть получается интегрированием ядра и точного решения

$$f(y) = \frac{2}{y+1} \sinh(y+1), \quad y \in [1, 2]. \quad (22)$$

Вычисления проводились с разными типами регуляризаторов.

4.2. Регуляризатор нулевого порядка. Регуляризатор нулевого порядка дает наилучшие результаты, поэтому опишем их подробно.

Контроль сходимости. Прежде всего рассмотрим влияние выбора шага сетки. Возьмем некоторое значение параметра регуляризации α и выберем начальные сетки с небольшим числом узлов. Для простоты положим $N = M$. Для каждой пары сеток вычислим норму $\|r\|$ оценки (19) и припишем ее более подробной сетке. Такое двукратное сгущение проведем несколько раз.

Пример такого расчета приведен на рис.1. Здесь $\alpha = 10^{-9}$. Начальное число шагов $N = M = 5$, то есть строится последовательность сеток с $N = 5, 10, 20, \dots$. Поскольку теоретическая зависимость $\|r\|$ от N является степенной $O(N^{-2})$, то ее график должен быть прямой линией с наклоном $\tan \gamma = -2$ в двойном логарифмическом масштабе. На рисунке эти точки показаны темными кружками. Первые 5 точек действительно ложатся на прямую линию. На этих сетках метод Рундсона применим и дает хорошую апостериорную оценку сеточной точности. Однако при дальнейших сгущениях погрешность перестает убывать: точки колеблются вокруг горизонтальной линии. Вычисления вышли на ошибки округления, и при данной разрядности получить более высокую точность невозможно.

Напомним, что при расчете требуется решать линейную алгебраическую систему. Попутно мы вычисляли ее число обусловленности κ . Оно оказалось примерно одинаковым для всех сеток. Величина $\lg \kappa$ равна числу десятичных знаков, теряемых на ошибки округления при решении линейной системы. В данном примере $\lg \kappa = 11.1$. При расчетах с 64-битовыми числами доступны 16 десятичных знаков. Видно, что число знаков, остающееся после вычитания $\lg \kappa$, разумно согласуется с фоном $\|r\|$.

Число точек на участке теоретической сходимости невелико. Для дру-

гих значений α оно может быть даже меньше. Поэтому визуальный контроль сходимости становится ненадежным. Опишем полезный способ, позволяющий увеличить число точек на этом графике. Возьмем другое начальное число шагов $N=7$ и построим еще одну последовательность сеток с $N=7, 14, 28, \dots$. Погрешности соответствующих расчетов показаны на рис.1 светлыми кружками. Поскольку $7/5 \approx \sqrt{2}$ с точностью 1%, светлые маркеры ложатся на ту же прямую линию, что и темные, и располагаются между ними. Таким образом, число точек на участке теоретической сходимости удваивается. Это позволяет более четко видеть теоретический участок и определять момент, когда расчеты выходят на фон ошибок округления.

Этот прием работает не для любого числа шагов начальных сеток. На практике применяются два варианта: $N=5$, $N=7$ и $N=12$, $N=17$. Вторым вариант более предпочтителен, так как $17/12 \approx \sqrt{2}$ с точностью 0.17%. Указанные числа шагов особенно удобны для применения метода Рундсона к схемам с точностью $O(h^2)$.

Заметим, что прямое сравнение решений, полученных на сетках с $N=5$ и $N=7$, невозможно, так как никакие узлы этих сеток не совпадают.

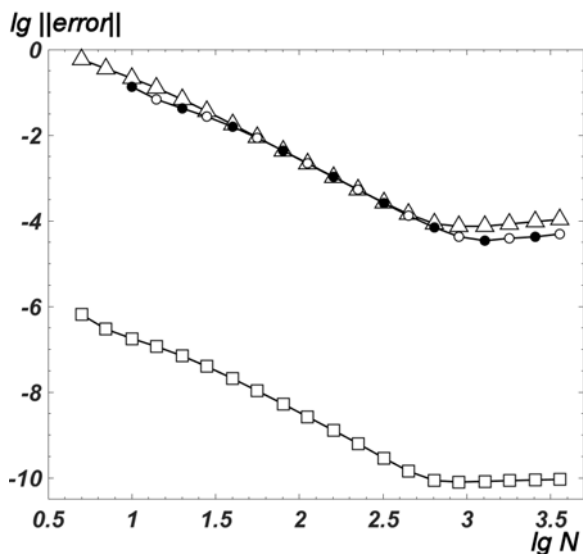


Рис.1. Двукратное сгущение сеток для $\lg \alpha = -10$. Маркеры: оценка по методу Рундсона — • для сеток с $N=5, 10, \dots$ и ○ для сеток с $N=7, 14, \dots$; Δ — реальная точность; □ — невязка.

Реальная точность. Для каждой сетки вычислим отличие численного решения от точного (21), то есть реальную точность δ . Эти значения показаны на рис.1 треугольными маркерами. На теоретическом участке эта линия представляет собой прямую с наклоном -2 и совпадает с кривыми, полученными методом Рундсона. Это показывает, что оценка по Рундсо-

ну (которая не использует никаких предположений о точном решении) позволяет находить точное значение погрешности на теоретическом участке.

Заметим, что вне теоретического участка метод Ричардсона неприменим. Когда расчеты достигают фона ошибок округления, реальная точность и ричардсоновская оценка расходятся. Причина этого заключается в том, что ошибки округления характеризуют только точность решения сеточной системы при заданной разрядности. Реальная точность включает также разницу решений регуляризованной и исходной задач, вызванную введением α . Поэтому на горизонтальном участке треугольники лежат выше кружков.

Невязка. В расчетах мы вычисляли сеточную невязку ψ . На рис.1 показана зависимость $\|\psi\|$ от N в двойном логарифмическом масштабе. Эта величина удобна в том смысле, что вычисляется только по сеточному решению и не требует какой-либо информации о точном решении. Тем самым, ее можно использовать для внутреннего контроля точности. Видно, что при сгущении сеток невязка убывает как $O(N^{-2})$ и затем выходит на горизонтальный фон. Последний возникает по двум причинам: из-за ошибок округления и наличия регуляризатора. В принципе, влияние этих факторов можно разделить, проводя расчеты с расширенной разрядностью: тогда ошибки округления уменьшаются, а влияние регуляризатора сохраняется.

Зависимость от α . Исследуем зависимость характерных величин от α . Пусть значения α меняются в диапазоне от заведомо малых $\alpha \sim 10^{-16}$ (когда регуляризатор сопоставим с ошибками округления) до чрезвычайно больших $\alpha \sim 1$. Для каждого α выполним расчеты на сгущающихся сетках вплоть до выхода на фон ошибок округления.

В каждом расчете возьмем значение N_b , при котором достигается фон ошибок округления, и соответствующие значения сеточной погрешности r , реальной точности δ и невязки ψ . Перечисленные величины назовем **предельными**. Зависимости предельных величин от α представлены на рис.2. На участке теоретической сходимости зависимости оказываются степенными, поэтому графики также даны в двойном логарифмическом масштабе. Опишем полученные результаты.

Значения N_b монотонно увеличиваются с увеличением α . Линия практически прямая, ее наклон с хорошей точностью равен $\tan \gamma \approx 0.39$. Это означает, что $N_b \approx \text{const} \cdot \alpha^{0.39}$; однако нельзя утверждать, что эта эмпирическая зависимость является общей. Для $\lg \alpha = -8$ число шагов достигало $N_b = 7168$ и программа на языке Matlab начинала работать слишком мед-

ленно. Поэтому для больших α число шагов самой подробной сетки оставалось тем же. Эта часть кривой показана штриховой линией.

График предельной невязки для $\lg \alpha \geq -10$ хорошо описывается прямой линией с наклоном $\tanh \gamma = 1$. Следовательно, на этом участке $\psi = \text{const} \cdot \alpha$, то есть предельная невязка полностью определяется членом $\alpha \|u\|$ в регуляризаторе. Заметим, что такая зависимость сохраняется в том числе и для $\lg \alpha \geq -8$, когда N_b искусственно ограничено. Это показывает, что сделанное ограничение не влияет на невязку.

Для чрезвычайно малых $\lg \alpha \leq -12$ предельная невязка перестает убывать с убыванием α и достигает фона. Это означает, что такие значения α недостаточны для регуляризации: обусловленность линейного оператора становится слишком плохой, и ошибки округления начинают преобладать.

График зависимости предельного числа обусловленности матрицы линейной системы также является практически прямой линией в огромном диапазоне $-12 \leq \alpha \leq -4$. Наклон с хорошей точностью равен -1 , то есть $\kappa \approx \text{const} \cdot \alpha^{-1}$. Это показывает, что разумное решение линейной системы возможно только благодаря регуляризатору.

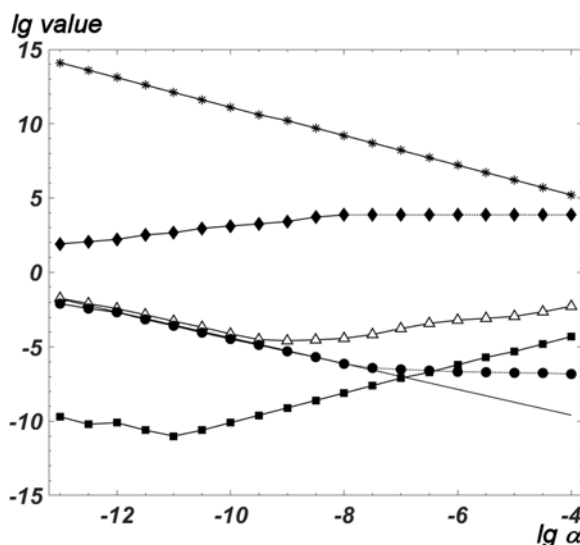
Предельная оценка по Ричардсону убывает с увеличением α . В диапазоне $-13 \leq \lg \alpha \leq -7$ график является практически прямой линией с наклоном $\tan \gamma \approx -0.85$. Это соответствует степенному закону $r_b \approx \text{const} \cdot \alpha^{-0.85}$. Для больших $\lg \alpha \geq -7$ расчеты проводились с искусственно ограниченным N_b . Значения r_b не вполне согласуются с числами обусловленности $\lg \kappa$, поскольку наклон отличается от -1 . Однако это отличие невелико. Таким образом, основное влияние на предельные значения r_b оказывает обусловленность.

График предельной реальной точности δ при малых α убывает и почти совпадает с графиком предельной оценки по Ричардсону r_b . Однако по мере увеличения α убывание δ замедляется. Для $\lg \alpha \approx -9$ график достигает минимума и начинает возрастать. В диапазоне $-8 \leq \lg \alpha \leq -4$ график является практически прямой линией с наклоном $\tanh \gamma \approx 0.55$. В этом диапазоне α реальная точность кардинально отличается от предельной оценки r_b . Здесь реальная точность определяется избыточно большим стабилизатором.

Выбор α . Значение α следует считать оптимальным, если оно обеспечивает минимум реальной точности. Из рис.2 видно, что в данной тестовой задаче оптимальное значение параметра регуляризации равняется $\lg \alpha_{opt} \approx -9$ и оптимальная реальная точность есть $\lg \delta_{opt} \approx -4.58$ (то есть $\delta_{opt} \approx 2.6 \cdot 10^{-5}$).

Однако мы смогли найти это значение только в тестовой задаче с известным точным решением.

Рис.2. Зависимость предельных значений от α ; \bullet – оценки по методу Ричардсона, тонкая линия – их продолжение, Δ – реальная точность, \square – невязка, \diamond – N_b , $*$ – число обусловленности.



В прикладных задачах точное решение неизвестно, и необходимо искать оптимум, пользуясь только численным решением. Подчеркнем, что при увеличении α предельная невязка ψ возрастает, а оценка по Ричардсону r_b убывает. Эти графики пересекаются при $\lg \alpha \approx -7$. При пересечении точность решения сеточной системы приблизительно равна регуляризующему члену. В данном примере эта точность равна $\lg \|\psi\| = \lg \|r_b\| \approx -7$.

Точка пересечения отличается от оптимума, но это отличие не столь велико. Учитывая отсутствие более хорошего апостериорного критерия, можно использовать предложенный подход как паллиативную рекомендацию.

4.3. Другие типы регуляризаторов. Потери точности при решении линейной системы являются чрезвычайно важным фактором в расчетах. Для регуляризатора нулевого порядка обусловленность линейной системы определяется добавлением к матрице αE . Этот член не зависит от шага сетки, поэтому и обусловленность от него также не зависит. Эта особенность позволяет проводить сгущения многократно и получать достаточно малые предельные значения оценки погрешности по методу Ричардсона $\|r_b\|$.

Для регуляризатора первого порядка ситуация кардинально меняется. Здесь мы добавляем член $\alpha B \sim \alpha / h^2$, причем матрица B имеет нулевой определитель. Таким образом, обусловленность матрицы существенно ухудшается, причем число обусловленности увеличивается при сгущении сеток. Поэтому провести большое количество сгущений не удастся; N_b оказывается небольшим, а предельная ричардсоновская оценка $\|r_b\|$ велика. По

этой причине регуляризатор первого порядка дает существенно меньшую точность, чем регуляризатор нулевого порядка. В тестовой задаче (10) удалось достичь лишь точности $2 \cdot 10^{-2}$. Это более чем в 100 раз хуже, чем для регуляризатора нулевого порядка.

Для регуляризатора второго порядка можно сделать аналогичные выводы. Наилучшая достигнутая точность в тестовой задаче (10) равнялась 10^{-2} . Это несколько лучше, чем для регуляризатора первого порядка, но все еще значительно хуже, чем для регуляризатора нулевого порядка.

4.4. Самосогласованность. Мы предприняли интересный численный эксперимент. Для тестовой задачи (10) можно без труда вычислить ядро $Q(x, z)$ и правую часть $F(z)$ посредством точного интегрирования, а не численного

$$Q(x, z) = \frac{1}{x+z} (e^{2x+2z} - e^{x+z}), \quad (23)$$

$$F(z) = e^{-z} (E_i(3z+3) - E_i(2z+2) - E_i(3z-3) + E_i(2z-2)), \quad E_i = \int_{-\infty}^z \frac{e^y}{y} dy. \quad (24)$$

Были рассмотрены три варианта регуляризованной задачи. В первом брались точные значения $Q(x, z)$ и F и численно вычислялись значения A^*Au . Во втором варианте брались точные $Q(x, z)$, а значения $F(z)$ находились численным интегрированием. Напротив, в третьем варианте значения $Q(x, z)$ вычислялись численно, а $F(z)$ были точными. Во всех вариантах использовался регуляризатор нулевого порядка. Все три варианта сравнивались с рассмотренным выше чисто численным решением.

Результаты оказались неожиданными. Может показаться, что чем больше интегрирования выполняется точно, тем лучше должен быть окончательный результат. Однако оптимальная точность в первом варианте оказалась равной $5 \cdot 10^{-3}$. Во втором варианте она равнялась $4 \cdot 10^{-2}$, а в третьем — $2.5 \cdot 10^{-2}$. Все эти точности сильно уступают (до 10^3 раз) чисто численному интегрированию, которое дает $4 \cdot 10^{-5}$.

Эти результаты можно объяснить следующим образом. В чисто численном расчете все интегрирование выполняется единообразно по одинаковым квадратурным формулам. Такой алгоритм можно назвать самосогласованным. В последних трех вариантах интегрирование частично численное и частично выполняется по квадратурным формулам. Поэтому такие алгоритмы не являются самосогласованными.

Среди важных примеров самосогласованных методов следует отметить

консервативные схемы, предложенные А.А. Самарским (в англоязычной литературе они часто называются «нейтральными») [23]. В настоящее время эти схемы являются общепризнанными; они дают значительно лучшее качественные и количественные результаты, чем неконсервативные схемы. Авторы сталкивались и с другими задачами, в которых попытки улучшить отдельные части задачи за счет потери самосогласованности приводили к ухудшению результатов.

Таким образом, несмотря на отсутствие строгого определения самосогласованности, авторы рекомендуют строить именно самосогласованные алгоритмы.

5. Прикладная задача

5.1. Аппаратная функция. Рассмотрим задачу автоматизированной обработки изображений в телескопах. Современные телескопы широко используют ПЗС-матрицы, которые позволяют автоматизировать обработку изображений звездного неба. Хотя угловой размер звезды пренебрежимо мал, ее изображение на ПЗС-матрице не является точечным. Оно претерпевает искажения, и количество этих искажений определяется аппаратной функцией телескопа.

Строго говоря, проблема является двумерной, но мы ограничимся одномерной постановкой, поскольку уже она является достаточно представительной демонстрационной задачей. Пусть на прибор падает пространственно распределенный сигнал $u(x)$. Сигнал $f(y)$, считываемый с матрицы, определяется уравнением свертки (10), где $K(y, x)$ – это аппаратная функция телескопа. Задача состоит в том, чтобы восстановить входной сигнал по записанному матрицей.

Построению аппаратных функций посвящено большое количество работ (см., например, обзор [24]). В этих работах на основе физических соображений определяется влияние различных факторов. Например, дисперсия оценивается следующей аппаратной функцией:

$$K(y, x) = \frac{\sigma / (2\pi)}{(x - y)^2 + (\sigma / 2)^2}. \quad (25)$$

Здесь σ – это ширина кривой на половине высоты. Эта кривая имеет пик и медленно спадающие «крылья». С количественной точки зрения, она преобразует точечное изображение звезды в маленькое пятнышко со слегка размытыми границами.

Дифракционные эффекты описываются аппаратной функцией

$$K(y, x) = \frac{1}{\sigma} \left[\frac{\sin \pi(x - y) / \sigma}{\pi(x - y) / \sigma} \right]^2. \quad (26)$$

Она преобразует точечную звезду в набор дифракционных колец с медленно убывающей интенсивностью. Качественное поведение такого изображения не соответствует исходному сигналу.

Аналогичным образом учитывается влияние других факторов. Используя их, можно построить аппаратную функцию всего прибора в целом. Зачастую ее явное выражение оказывается слишком сложным, поэтому на практике ограничиваются некоторой априорно выбранной зависимостью с эмпирически определяемыми параметрами. Часто используется гауссова функция

$$K(y, x) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{4\ln 2}{\sigma^2}(x - y)^2\right). \quad (27)$$

Такая функция имеет быстро спадающие крылья. Однако ее использование для описания совокупного действия функций, имеющих медленное спадание, представляется сомнительным.

5.2. Сравнение аппаратных функций. Очевидно, выбор аппаратной функции влияет на качество восстановления сигнала. Сравним две аппаратные функции: мягкую унимодальную (25) и жесткую гауссову (27). Обе функции определены на $[-1, 1]$ и нормированы на 1. Ядра представлены на рис.3 для ширины $\sigma = 0.3$. Это значение σ используется во всех расчетах. На левой половине рисунка дана функция (25), на правой – функция (27).

Все ядра симметричны и заданы на квадрате. Поэтому задача (10) оказывается самосопряженной, и в дальнейшем мы будем использовать алгоритм для самосопряженных задач из разд. 2.2 с регуляризатором нулевого порядка. Процедуры сгущения сеток и выбора α аналогичны случаю несамосопряженного оператора.

Для восстановления изображения входной сигнал выбирается в виде δ -функции $\delta(x)$. Во-первых, он соответствует точечному источнику света; во-вторых, с математической точки зрения, это чрезвычайно трудный тест; в-третьих, правая часть вычисляется точно и равняется аппаратной функции при $x = z$. Результаты восстановления изображения одной звезды представлены на рис.4. Здесь левая часть графика соответствует ядру (25), а правая – ядру (27). Расчеты выполнялись с нахождением оптимальных параметров. Последние равны $\alpha = 10^{-9}$ и $N_b = 448$.

Восстановленные изображения имеют качественный дефект: они не являются унимодальными. На рисунке видны дифракционные экстремумы (на плоскости они выглядели бы как кольца). Центральный пик является преобладающим, но с обеих сторон от него имеются чередующиеся мини-

мумы и максимумы. Однако эти экстремумы достаточно быстро убывают. Мягкая аппаратная функция (25) обеспечивает более быстрое убывание экстремумов по сравнению с жесткой (27). Тем самым, она обеспечивает лучшее качество восстановления сигнала.

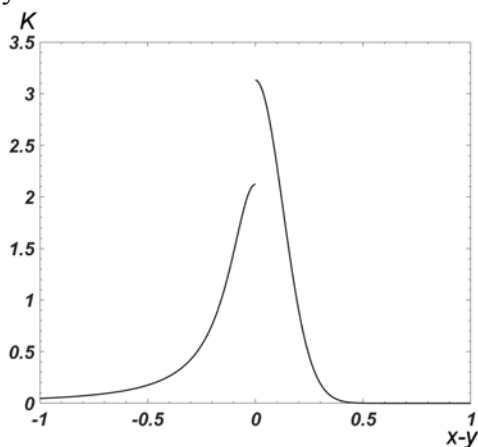


Рис.3. Аппаратные функции: (25) для $x < 0$, (27) для $x > 0$.

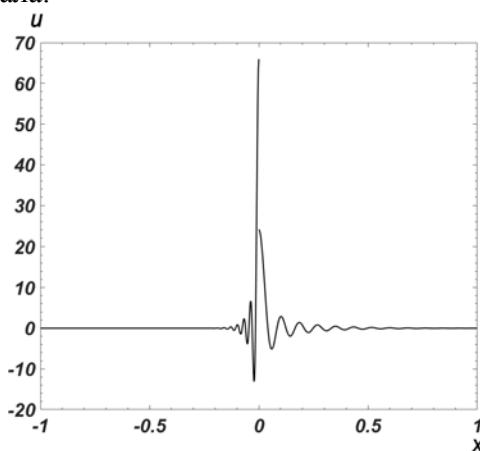


Рис.4. Восстановленное изображение дельта-функции для аппаратных функций: $x < 0$ – (25), $x > 0$ – (27).

Таким образом, для дальнейших расчетов мы будем использовать мягкую инструментальную функцию (25).

5.3. Разрешение близких звезд. Рассмотрим проблему, имеющую большое практическое значение. Пусть имеются две близко расположенные звезды. При каком расстоянии между ними их изображения сливаются и рассматриваются как одна звезда, и при каком расстоянии звезды можно четко различить?

Представим расчеты, которые отвечают на эти вопросы. Возьмем две дельта-функции, расположенные симметрично относительно $x = 0$. Расстояние между ними обозначим $\xi\sigma$, то есть будем измерять его в единицах ширины аппаратной функции.

Прежде всего рассмотрим случай звезд одинаковой яркости (обе дельта-функции умножаются на 1). Восстановленное изображение представлено на рис.5 для различных значений ξ . Видно, что для $\xi=0.1$ звезды неразличимы. Для $\xi=0.125$ виден провал яркости между двумя пиками. Этот случай оказался вблизи порога разрешимости. Для $\xi=0.15$ четко видны две звезды.

Во втором случае звезды отличаются по яркости на 1 звездную величину (то есть в 2.5 раза). Здесь левая дельта-функция умножается на 0.4. Восстановленные изображения для разных ξ представлены на рис.6. Здесь при $\xi=0.1$ звезды сливаются в одну. При $\xi=0.125$ звезды различимы, но с некоторым трудом. Для $\xi=0.15$ четко наблюдаются две звезды.

В третьей серии расчетов левая звезда слабее на 2 звездных величины, то есть левая дельта-функция умножается на 0.16. Восстановленные изображения представлены на рис. 7. Видно, что при $\xi = 0.1$ звезды сливаются. При $\xi = 0.2$ едва заметно присутствие второй звезды. Одна из причин заключается в том, что ближайший нефизичный экстремум («дух»), созданный более яркой звездой, всего лишь в 2 раза слабее, чем вторая звезда. Для $\xi = 0.3$ изображения звезд можно уверенно различить.

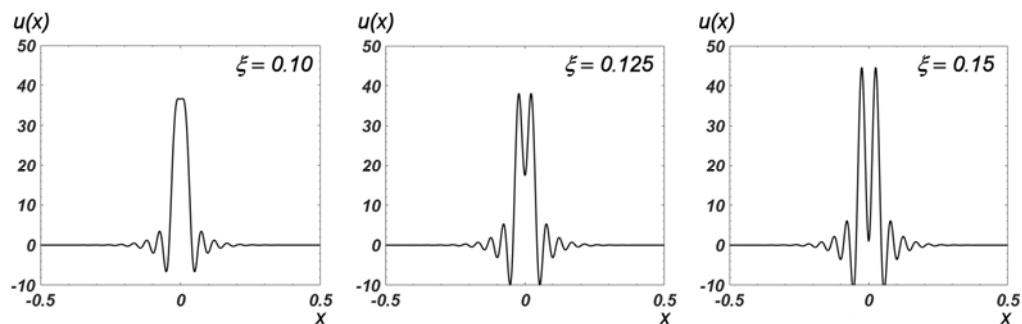


Рис.5. Восстановленное изображение двух звезд одинаковой яркости. Расстояния между звездами указано на графиках.

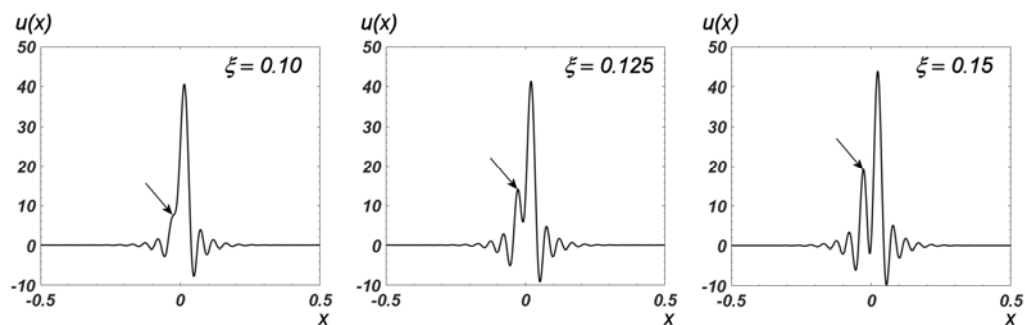


Рис.6. Восстановленное изображение двух звезд, левая звезда слабее правой на 1 звездную величину.

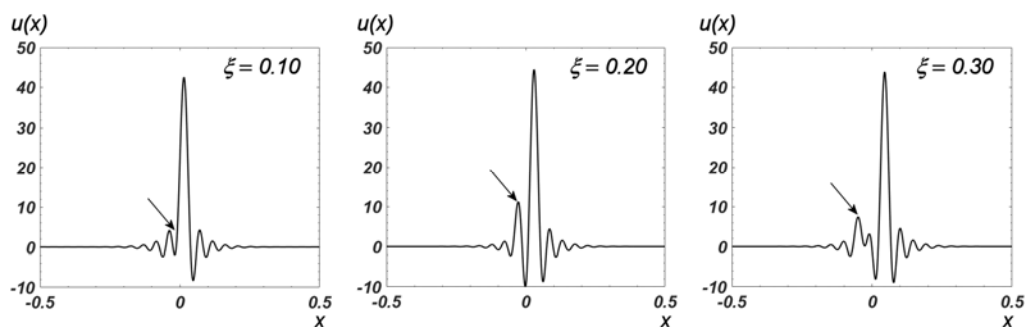


Рис.7. Восстановленное изображение двух звезд, левая звезда слабее правой на 2 звездных величины.

Таким образом, предложенный метод позволяет четко различать звезды, если расстояние между ними $\xi \geq 0.2$ от ширины аппаратной функции, а различие яркостей не превышает 2 звездных величины. Для звезд примерно одинаковой яркости расстояние разрешения уменьшается даже до $\xi = 0.15$, и лишь при $\xi = 0.1$ звезды неразличимы.

Замечание. Достаточно хорошее разрешение удалось получить благодаря учету самосопряженности задачи. Это связано с тем, что числа обусловленности $\kappa \sim 100$. Если применить алгоритм для несамосопряженной задачи из разд. 2.1, то условия разрешения оказываются значительно хуже. Поэтому если исходная проблема является самосопряженной, необходимо использовать это преимущество.

6. Заключение

Предложенный сеточный метод позволяет эффективно решать некорректные задачи для уравнения Фредгольма первого рода с регуляризацией по Тихонову. Такие задачи считаются достаточно сложными. Вычислительная сложность алгоритма невысока. Она приблизительно равняется вычислению на наиболее подробной сетке NM значений ядра и $N^2(N + M)$ арифметических операциям для нахождения матрицы линейной алгебраической системы и решения последней. Задача о разрешении близких звезд демонстрирует перспективы практической реализации метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Jun-Gang Wang, Yan Li, Yu-Hong Ran*, Convergence of Chebyshev type regularization method under Morozov discrepancy principle // *Appl. Math. Lett.*, 2017, v.74, p.174–180.
2. *Белов А.А., Калиткин Н.Н.* Обработка экспериментальных кривых регуляризованным методом двойного периода // *ДАН*, 2016, т.470:3, с.266–270;
Belov A.A., Kalitkin N.N. Processing of Experimental Curves by Applying a Regularized Double Period Method // *Doklady Math.*, 2016, v.94:2, p.539–543.
3. *Белов А.А., Калиткин Н.Н.* Регуляризация метода двойного периода при обработке экспериментальных данных // *ЖВМиМФ*, 2017, т.57:11, с.7–17;
Belov A.A., Kalitkin N.N. Regularization of the Double Period Method for Experimental Data Processing // *Comp. Math. and Math. Phys.*, 2017, v.57:11, p.1741–1750.
4. *Bakushinsky A.B., Smirnova A.* Irregular operator equations by iterative methods with undetermined reverse connection // *J. Inv. Ill-Posed Problems*, 2010, v.18, p.147–165.
5. *Bakushinsky A.B., Smirnova A.* Discrepancy principle for generalized GN iterations combined with the reverse connection control // *J. Inv. Ill-Posed Problems*, 2010, v.18, p.421–431.
6. *Jian-guo Tang*. An implicit method for linear ill-posed problems with perturbed operators // *Math. Meth. in the Appl. Sci.*, 2006, v.29, p.1327–1338.
7. *Леонов А.С.* Решение некорректно поставленных обратных задач. Очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. – М.: Либроком, 2010;
Leonov A.S. Reshenie nekorrektno postavlennykh obratnykh zadach. Ocherk teorii, prakticheskie algoritmy i deomnstratsii v MATLAB. – М.: Librokom. 2010.
8. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. – М.: Наука. 1990;
Tikhonov A.N., Goncharskii A.V., Stepanov V.V., Iagola A.G. Chislennye metody resheniia nekorrektnykh zadach. – М.: Nauka, 1990.

9. Гапоненко Ю.Л. О степени разрешения и точности решения некорректной задачи при фиксированном уровне погрешности // ЖВМиМФ., 1984, т.24:4, p.483–490;
Gaponenko Yu.L. On the degree of decidability and the accuracy of the solution of an ill-posed problem for a fixed level of error // USSR Comp. Math. and Math. Phys., 1984, v.24, p.96–101.
10. Гапоненко Ю.Л. О точности решения нелинейной некорректной задачи при конечном уровне погрешности // ЖВМиМФ, 1985, т.25:5, с.772–777;
Gaponenko Yu.L. The accuracy of the solution of a non-linear ill-posed problem for a finite error level // USSR Comp. Math. and Math. Phys., 1985, v.25, p.81–85.
11. Hon Y. C., Wei T. Numerical computation of an inverse contact problem in elasticity // J. Inv. Ill-Posed Problems, 2006, v.14, p.651–664.
12. Ben Ameur H., Kaltenbacher B. Regularization of parameter estimation by adaptive discretization using refinement and coarsening indicators // J. Inv. Ill-Posed Problems, 2002, v.10, p.561–583.
13. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Разностные схемы для неустойчивых задач // Мат. моделирование, 1990, т.2:11, с.89–98;
Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Raznostnye skhemy dlia neustoiichevykh zadach // Mat. Modelirovanie, 1990, t.2:11, s.89–98.
14. Самарский А.А. О регуляризации разностных схем // ЖВМиМФ, 1967, т.7:1, с.62–93;
Samarskii A.A. Regularization of difference schemes // USSR Comp. Math. and Math. Phys., 1967, v.7, p.79–120.
15. Бакушинский А.Б., Леонов А.С. Новые апостериорные оценки точности для приближенных решений нерегулярных операторных уравнений // Выч. мет. программирование, 2014, т.15:2, с.359–369;
Bakushinskii A.B., Leonov A.S. Novye aposteriornye otsenki tochnosti dlia priblizhennykh reshenii neregulyarnykh operatornykh uravnenii // Vych. met. programmirovaniye, 2014, v.15:2, p.359–369.
16. Bakushinsky A.B., Smirnova A., Hui Liu. A posteriori error analysis for unstable models // J. Inv. Ill-Posed Problems, 2012, v.20, p.411–428.
17. Klivanov M.V., Bakushinsky A.B., Beilina L. Why a minimizer of the Tikhonov functional is closer to the exact solution than the first guess // J. Inv. Ill-posed Problems, 2011, v.19, p.83–105.
18. Гончарский А.В., Леонов А.С., Ягола А.Г. Обобщенный принцип невязки // ЖВМиМФ, 1973, т.13:2, с.294–302;
Goncharskii A.V., Leonov A.S., Yagola A.G. A generalized discrepancy principle // USSR Comp. Math. and Math. Phys., 1973, v.13, p.25–37.
19. Richardson L.F., Gaunt J.A. The deferred approach to the limit // Phil. Trans., 1927, A. v.226, p.299–349.
20. Рябенкий В.С., Филлипов А.Ф. Об устойчивости разностных уравнений. – М.: Государственное изд-во технико-теоретической литературы, 1956;
Riaben'kii V.S., Fillipov A.F. Ob ustoichivosti raznostnykh uravnenii. Gosudarstvennoe izd-vo tekhniko-teoretichskoi literatury, 1956.
21. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979;
Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. Solutions of ill-posed problems. – New York: Halsted, 1977.
22. Калиткин Н.Н., Альшин А.Б., Альшина Е.А., Рогов Б.В. Вычисления на квазиравномерных сетках. – М.: Физматлит, 2005;
Kalitkin N.N., Alshin A.B., Alshina E.A., Rogov B.V. Vychisleniia na kvaziravnomernykh setkah. – М.: Fizmatlit, 2005.
23. Самарский А.А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989;
A.A. Samarskii. The theory of difference schemes. – New York – Basel, Marcel Dekker, Inc, 2001, p.761.
24. Раутиан С.Г. Реальные спектральные приборы // УФН, 1958, т.66:3, с.475–517;
Rautian S.G. Realnye spectralnye pribory // UFN, 1958, t.66:3, s.475–517.

Поступила в редакцию 11.12.2017.