MA2 – Zápočtové minimum

Tento souhrn pokrývá pouze praktickou aplikaci poznatků z Analýzy 2, která je požadována na zápočtové testy. Látky je mnohem více.

1. semestrální písemka

Množiny a body

- **vnitřní body** $int(M)$ – bod včetně jeho okolí je prvkem množiny (pokud jsou všechny body množiny vnitřní, je otevřená)
- **hraniční body** ∂M – každé okolí bodu zasahuje do množiny
- **uzávěr** $\bar{M}$ – $\bar{M} = M \cup \partial M$
- **hromadný bod** – bod, ke kterému konvergují body z M
- **izolovaný bod** – bod, v jehož okolí není žádný jiný bod

Hladina funkce

- práce s vektorovými funkcemi – stejné, ale po složkách
- kdy je funkční hodnota rovna nějaké konstantě hladiny: $f(x, y) = c$

Směrová derivace

- praktický výpočet podle diferenciálu:

$$\nabla_v f(a) = \nabla f(a) \cdot v$$

- podle definice (směrová derivace podle v v bodě a):

$$\nabla_v f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

  (a, $a + tv$ jsou vektory)

Parciální derivace

- všechny kromě daných proměnných považujeme za konstanty
- parciální derivace podle více proměnných:

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

- **Laplaceův operátor** (součet druhých parciálních derivací podle všech proměnných):

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Diferenciál

- lineární aproximace změny v bodě a ve směru h

$$df(a)(h) = \nabla_h f(a) = \nabla f(a) \cdot h = J_f(a) \cdot h$$

(takže jej zapisujeme buď pomocí gradientu, nebo Jacobiho matice)

Gradient

- $\nabla f(x, y)$: směr největšího **růstu**
- $-\nabla f(x, y)$: směr největšího **poklesu**
- dává normálový vektor tečné roviny

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a), \cdots \right)$$

Jacobiho matice

$$J_{\vec{f}}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Tečné roviny

- výpočet tečné roviny pro funkci f k bodu a:

$$g(\vec{x}) = f(\vec{a}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (\vec{x} - \vec{a}) g(x, y) = f(1, 2) + \nabla f(1, 2) \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)$$

- rovnoběžnost: normálový vektor je násobkem jiného normálového vektoru

Taylorův polynom

- Dám vzorcem:

$$T_k(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} \nabla^i_{x-a} f(a)$$

- speciální případy:

$$T_0(x) = f(a), T_1(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x-a), T_2(x) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x-a) + \tfrac{1}{2}(x-a) \cdot (H_f(a)(x-a))$$

- Příklad – taylorův polynom 2. řádu funkce f v bodě $(1, 2)$:

$$T_2(x, y) = f(1, 2) + \nabla f(1, 2)((x, y) - (1, 2)) + \frac{1}{2} \cdot ((x, y) - (1, 2)) \cdot H_f(a) \cdot ((x, y) - (1, 2))$$

Hessova matice

- počítá se podle ní 2. diferenciál: $d^2 f(a)(h) = h^\top H_f(a)\, h$ (kvadratická forma)
- je symetrická
- obecně:

$$H_f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

- pro funkci $f(x, y, z)$:

$$H_f(\mathbf{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Volné extrémy funkcí

Postup pro hledání extrémů: 1. **stacionární body** funkce $f(x, y)$ – body, kde je platí $\nabla f(x, y) = \vec{o}$: - vypočítám gradient - pro x-ovou část spočítám, kde se rovná 0 - pro y-ovou část spočítám, kdy se rovná 0 - kombinace souřadnic $\implies$ stacionární body 2. **obecná Hessova matice** H_f pro funkci f 3. **vyšetření** H_f v konkrétním stacionárním bodu: - použijeme *Sylvestrovo kritérium* : - projdeme všechny sub-determinanty - pokud jsou pozitivní $\implies$ pozitivně definitní $\implies$ lok. minimum - pokud se střídají ve formátu `-+-+` $\implies$ negativně definitní $\implies$ lok. maximum - jinak $\implies$ indefinitní *implies* sedlový bod

Vázané extrémy funkcí

TODO (nebyly součástí 1. semestrální písemky)

2.semestrální písemka

Změna pořadí integrace

- nakreslím si situaci
- převedu hraniční body pro druhou souřadnici

Převod souřadnicových systémů (substituce)

- zavedu substituci pomocí pravidel pro daný souřadnicový systém
- vyjádřím si hraniční body integrace pro souřadnicový systém
- Φ je transformace souřadnic do daného systému souřadnic

- vytvořím Jakobiho matici J_Φ, spočítám Jakobián $det(J_\Phi)$
- mějme: $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$
- potom: $\iint_{\tilde{D}} f(\Phi(u,v))\,||\det(J_\Phi)||\,du\,dv$ (vynásobíme integrovanou funkci velikostí determinantu J_Φ)
- vybrané souřadnicové systémy:
  - polární: $\Phi(r,\varphi) = (r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi)) \implies det(J_\Phi) = r$
  - cylindrické: $\Phi(r,\varphi) = (r \cdot \cos(\varphi), r \cdot \sin(\varphi), z) \implies det(J_\Phi) = r$
  - sférické: $\Phi(r,\varphi,\theta) = (r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \implies det(J_\Phi) = r^2 \cdot \sin\theta$

Křivkový integrál skalární funkce

- parametricky vyjádříme křivku, najdeme interval parametru – $[a,b]$, označme $\varphi(t)$ vektor parametrizace
- najdeme derivaci parametrizace $\varphi'(t)$
- lifehack pro parametrizaci přímky: $\varphi(t) = (1-t) \cdot A + B \cdot t$, kde $A = (a_1,a_2), B = (b_1,b_2)$ jsou body této přímky
- integrujeme v intervalu parametru danou skalární funkci:

  $$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\varphi(t))\,\|\varphi'(t)\|\,dt.$$

  (původní funkci s parametrickými souřadnicemi vynásobenou velikostí $\varphi'(t)$)
- zde nezáleží na orientaci průběhu funkce

Křivkový integrál vektorového pole

- proces je obdobný, jen ale záleží na orientaci průběhu τ (projeví se znaménkem před integrálem)
- parametricky vyjádříme křivku, najdeme interval parametru – $[a,b]$, označme $\varphi(t)$ vektor parametrizace
- integrujeme:
  $$\int_{(C,\tau)} F \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b F(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt$$

Důležité goniometrické identity

$$\begin{aligned}
1 &= \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \\
\sin(2\varphi) &= 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) \\
\cos(2\varphi) &= \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \\
\cos^2\varphi &= \frac{1+\cos(2\varphi)}{2} \\
\sin^2\varphi &= \frac{1-\cos(2\varphi)}{2}
\end{aligned}$$