Lineární prostor (1, 2, 4)

- **Def.:** Těleso je množina $\mathbb{F}$ spolu s funkcemi +: $\mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$, •:$\mathbb{F} \times \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}$
  - *je to kolekce jakýchkoliv objektů, které mezi sebou můžeme sčítat a násobit a chovají se stejně, jako jsme zvyklí*
  - vlastnosti stejné jako níže, ale:
    - násobení je navíc komutativní
    - pro a$\in\mathbb{F}$ platí: a≠0 iff existuje inverze a^{-1} (aka test invertibility)
  - tělesy jsou $\mathbb{N}_p$, kde p je prvočíslo (kvůli testu invertibility)
- **Def.:** Lineární prostor nad tělesem $\mathbb{F}$ je množina L (vektorů) spolu s funkcemi sčítání (+) a násobení skalárem (•)
  - Vlastnosti sčítání (+: L × L → L)
    1. existence nulového prvku (vektoru): x+o = o+x = x
    2. asociativita sčítání (vektorů): (x+y)+z=x+(y+z)
    3. komutativita sčítání (vektorů): x+y=y+x
    4. existence opačného prvku (vektoru): x+y=o (pro každé x ex. právě jedno y)
  - Vlastnosti násobení skalárem (•: $\mathbb{F}$ □ L → L)
    1. existence neutrálního prvku ("jedničky"): 1•**x**=**x**
    2. asociativita násobení skalárem: a•(b•**x**)=(a•b)•**x**
  - Distributivní zákony (*jak se k sobě chovají navzájem*)
    1. distributivita součtu skalárů: (a+b)•**x**=a•**x**+b•**x**
    2. distributivita součtu vektorů: a•(**x**+**y**)=a•**x**+a•**y**
  - Důsledky
    - nulový vektor je jednoznačně určen (kdo si hraje na nulu, je nula)
    - pro vš. x$\in$L platí: 0•**x**=**o**
    - opačný vektor k x je (-1)•x
    - pro vš. a$\in\mathbb{F}$ platí: a•**o**=**o**
    - a•**x**=**o** iff a=0 nebo **x**=**o**
- **Def.:** Seznam vektorů je buď prázdná posloupnost () nebo konečná posloupnost $(x_1,...,x_n)$.
- **Def.:** (lineární kombinace konečného seznamu vektorů):
  - Pro prázdný seznam je **o** jeho jedinou možnou lineární kombinací (s prázdným seznamem koeficientů).
  - Pro $(x_1,...,x_n)$ je vektor $\sum_{i=1}^{n} a_i\mathbf{x_i}$ jeho lineární kombinace (se seznamem koeficientů $(a_1,...,a_n)$).
  - je to *rovný kus prostoru*
- lineární kombinace je triviální, pokud $a_1=a_2=...=a_n=0$
- **Def.:** Seznam vektorů S je lineárně nezávislý, pokud je prázdný nebo kdykoliv $a_1\mathbf{x_1}+a_2\mathbf{x_2}+...a_n\mathbf{x_n}=\mathbf{o}$, pak $a_1=a_2=...=a_n=0$

- prázdný seznam () je vždy lineárně nezávislý, (**o**) je vždy lineárně závislý
- **Def.:** Množina vektorů M je lineárně nezávislá, pokud platí jedna z podmínek:
  - M je prázdná
  - M je neprázdná konečná a navíc platí: $a_1\mathbf{x_1}+a_2\mathbf{x_2}+\dots a_n\mathbf{x_n}=\mathbf{o}$, pak $a_1=a_2=\dots=a_n=0$
  - M je nekonečná a každá její konečná podmnožina je lineárně nezávislá.

Lineární obal a lineární podprostor (3)

- množina M je konečná, když má přesně n prvků, kde $n\in\mathbb{N}$ (tady platí $0\in\mathbb{N}$) (např. $\mathbb{Z}_2$)
- množina M je nekonečná, pokud není konečná ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$)
- **Def.:** Ať M je jakákoliv množina vektorů lineárního prostoru L. Lineární obal množiny vektorů M je množina span(M), definovaná:

$$\operatorname{span}(M) = \begin{cases} \{\vec{o}\}, \text{ pokud } M = \emptyset, \\ \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i \mid a_1,\dots,a_n \in \mathbb{F}, \vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n \in M \Big\}, \\ \quad \text{pokud } M \neq \emptyset. \end{cases}$$

  -
  - množina všech linárních kombinací, které lze z M utvořit
  - *span(M) je "zabalení" množiny M tak, aby výsledkem byl "co nejmenší rovný kus", který obsahuje M*
- Uzávěrové vlastnosti lineárního obalu
  - je-li $M\subseteq N$, potom $\operatorname{span}(M)\subseteq\operatorname{span}(N)$
  - pro vš. M platí: $M\subseteq\operatorname{span}(M)$
  - pro vš. M platí: $\operatorname{span}(\operatorname{span}(M))\subseteq\operatorname{span}(M)$ *(další zabalení už tam nic nepřidá)*
- **Def.:** Ať W je podmnožina lineárního prostoru L. Řekneme, že W je lineární podprostor lineárního prostoru L, když platí $\operatorname{span}(W)\subseteq W$
  - *je to "dobrá" podmnožina prostoru, ze které nejde žádnou lineární kombinací "utéct"*
- span(M) je vždy lineární podprostor a jde zároveň o nejmenší podprostor, který obsahuje M
- M je lineární podprostor iff span(M) = M
- **Jak odhalit podprostor**
  - o je prvkem W (uzavřenost na nulový vektor)
  - **x**+**y** je prvkem W pro každé **x**, **y** $\in$ W (uzavřenost na součet vektorů)
  - a**x** je prvkem W pro každé $a\in\mathbb{F}$ a $\mathbf{x}\in W$ (uzavřenost na skalární násobek)
- Ať W je lineární podprostor L. Potom W je sám o sobě lineárním prostorem, pokud sčítání a násobení ve W definujeme stejně jako v L. Naopak to ale neplatí - když mám jinak definované násobení a sčítání, že to je prostor nad $\mathbb{R}$, tak to ještě nemusí být podprostorem $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ (02A:10)
- průnik systému podprostorů je také lineárním podprostorem
- sjednocení systému podprostorů nemusí být lineárním podprostorem

    - definujeme spojení podprostorů W_1 v W_2 = (span($W_1 \cup W_2$))
- Hrajeme si se závislostí
    - Ať M je lineárně nezávislá množina v L. Každá N⊆M je také lineárně nezávislá.
        - *Když ubereme vektory z linerárně nezávislé množiny, bude výsledná množina stále nezávislá.*
    - Ať M je lineárně závislá v L. Každá N tak, že M⊆N je také lineárně závislá.
        - *Když přidáme něco do lineárně závislé množiny, bude pořád závislá.*
    - Množina M je lineárně nezávislá iff pro všechny $x \notin$span(M) je množina $M \cup \{x\}$ lineárně nezávislá.
    - Množina M je lineárně závislá iff existuje N⊆M, N≠M taková že span(N)=span(M).

Báze a dimense (5, 6)

- **Def.:** Ať W je lineární podprostor prostoru L. Řekneme, že množina G generuje W (G je množina generátorů W), pokud platí span(G)=W.
- **Def.:** Řekneme, že lineární prostor W je konečně generovaný, pokud existuje konečná množina jeho generátorů.
- **Def.:** Lineárně nezávislé množině B, která generuje prostor L, říkáme báze L. Je-li B konečná, pak seznamu prvků B říkáme uspořádaná báze.
    - Pozn.: ∅ i **o** jsou konečné množiny generátorů triviálního prostoru, ale jen jedna z nich je lineárně nezávislá.
    - Každý lineární prostor L má bázi.
    - *báze je výběr systému souřadnicových os či také "nejúspornější" množina generátorů*
- **Def.:** Označme $K_n=(e_1,...,e_n)$ seznam vektorů v $\mathbb{F}^n$, n>=1, kde e_i má jedničku na i-té pozici, všude jinde nuly. Tuto bázi zoveme kanonická báze $\mathbb{F}^n$
- každý konečně generovaný prostor L má konečnou bázi, všechny možné báze L mají stejný počet prvků
- **Def.:** Lineární prostor má dimensi n (dim(L)=n), když existuje báze B prostoru L, která má n prvků, $n \in \mathbb{N}$.
- Ať M, N jsou konečné množiny vektorů. Potom span(M)=span(N) iff dim(span(M))=dim(span(N))=dim(span($M \cup N$)).
- Ať L je lineární prostor konečné dimense. Potom pro podprostory W_1, W_2 platí: $\dim(W_1 \vee W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$
    - *princip inkluse a exkluse*
- Ať seznam B = ($\mathbf{b_1}$, ..., $\mathbf{b_n}$) tvoří bázi L. Pro každý vektor **x** v L existuje jediný seznam A=(a_1, …, a_n) tak, že $\mathbf{x}= a_1\mathbf{b_1}+...+a_n+\mathbf{b_n}$
- **Def.:** Seznamu A říkáme souřadnice vektoru **x** vzhledem k uspořádané bázi B. Značíme $\mathrm{coord}_B(\mathbf{x})$.
    - $\mathrm{coord}_B(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathrm{coord}_B(\mathbf{x}) + \mathrm{coord}_B(\mathbf{y})$
    - $\mathrm{coord}_B(a\bullet\mathbf{x})=a\bullet\mathrm{coord}_B(\mathbf{x})$
        - je to vlastně lineární zobrazení

Lineární zobrazení (6, 7, 8, 9, 10)

- **Def.:** Zobrazení (funkce) f: A→B je podmnožina A×B taková, že pro všechna a∈A existuje právě jedno b∈B tak, že (a, b) ∈ f.
    - pro libovolnou množinu B existuje právě jedno zobrazení f : ∅ → B
    - pro libovolnou množinu A existuje právě jedno zobrazení f : A → {b} (B jednoprvková množina)
    - je-li A neprázdná, pak B musí být také neprázdná

- Typy zobrazení
  - Zobrazení $f : X \to Y$ je prosté (také: injektivní nebo injekce), když z rovnosti $f(x_1) = f(x_2)$ plyne $x_1 = x_2$. Pro lineární zobrazení monomorfismus.
  - Zobrazení $f : X \to Y$ je na (také: surjektivní nebo surjekce), když pro každé $y \in Y$ existuje x tak, že $f(x)=y$. Pro lineární zobrazení epimorfismus.
  - Zobrazení $f : X \to Y$ je bijekce (také: vzájemně jednoznačné), když f je injekce a surjekce současně. Pro lineární zobrazení isomorfismus.
    - identita je bijekce
    - funkce je bijekce iff existuje jednoznačně určená inverze
  - složení injekcí je injekce, složení surjekcí je surjekce, složení bijekcí je bijekce
- **Def.:** Ať L_1, L_2 jsou lineární prostory nad $\mathbb{F}$. Zobrazení f: $L_1 \to L_2$, pro které platí $f(\mathbf{x} + \mathbf{x'}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x'})$ a $f(a \cdot \mathbf{x}) = a \cdot f(\mathbf{x})$ pro vš. a, $\mathbf{x}$, $\mathbf{x'}$ říkáme lineární zobrazení z L_1 do L_2.
  - $f(\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{x_i}) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(\mathbf{x_i})$ - princip superpozice vyplývá z podmínek
- složení, součet lineárních zobrazení a skalární násobek lineárního zobrazení je lineární
  - množina lineárních zobrazení L_1, L_2 se značí $Lin(L_1, L_2)$
- Ať B je báze lineárního prostoru L_1, ať L_2 je libovolný lineární prostor. Pak zadat h: $B \to L_2$ je totéž jako zadat f: $L_1 \to L_2$
  - *→ abychom znali zobrazení, stačí znát kde skončí prvky báze*
- **Def.:** Matice A nad $\mathbb{F}$ typu r×s je tabulka $A=(a_1, \dots, a_s)$.
  - Matici A ztotožňujeme s lineárním zobrazením A: $\mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$, které je zadáno takto: A: $e_j \mapsto a_j$, j=1,..., s
  - protože je $Lin(L_1, L_2)$ sám o sobě lineárním prostorem, platí pro matice všechny podmínky pro součty a sk. násobky výše
- skládání zobrazení (aka násobení matic) je asociativní, ale obecně ne komutativní
- **Def.:** Ať f: $L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení. Množině $ker(f)=\{x|f(x)=o\}$ říkáme jádro, množině $im(f)=\{y|f(x)=y$ pro nějaké $x\}$ říkáme obraz f.
  - *jádro f říká, jak moc je f monomorfismus, obraz zase, jak moc je to epimorfismus*
- Ať f: $L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení. Pak ker(f) je podprostor L_1, im(f) je podprostor L_2
- **Def.:** Ať f: $L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení. Ať L_1 má konečnou dimensi. Číslo def(f)=dim(ker(f)) říkáme defekt lineárního zobrazení f, číslo rank(f)=dim(im(f)) říkáme hodnost (rank) lineárního zobrazení f.
  - Věta o dimenzi jádra a obrazu: $def(f)+rank(f)=dim(L_1)$
- Charakterisace lineárních zobrazení
  - f je monomorfismus (TFAE)
    - def(f)=0
    - f respektuje lineární nezávislost (obraz lineárně nezávislé množiny je opět lineárně nezávislá množina)
    - soustava Ax=o má pouze triviální řešení
  - f je isomorfismus (TFAE)
    - f je monomorfismus a epimorfismus současně
    - def(f)=0 a $im(f)=L_2$
    - def(f) = 0 a $dim(L_1)=dim(L_2)$

        - f respektuje lineární nezávislost a každá rovnice f(x)=b má alespoň jedno řešení pro b z L_2
        - A: $\mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$, s=r a každá rovnice f(x)=b má alespoň jedno řešení pro b z L_2
- **Def.:** Matice A je regulární (invertibilní/isomorfismus), pokud existuje jednoznačně určená matice A^{-1} taková, že $A^{-1}A=E_n$.
    - jinak je matice singulární
- Ať $\dim(L_1) = \dim(L_2) = n$. Potom je, pro lineární zobrazení f: $L_1 \to L_2$, ekvivalentní:
    - f je monomorfismus
    - f je epimorfismus
    - f je isomorfismus
- Ať B = ($\mathbf{b_1}$, ..., $\mathbf{b_n}$) je uspořádanou bází prostoru L. Potom výpočet souřadnice v bázi B coord_B: $L \to \mathbb{F}^n$, $x \mapsto \text{coord}_B(x)$ je isomorfismus.
- Ať f: $L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, ať B= ($\mathbf{b_1}$, ..., $\mathbf{b_s}$) a C=($\mathbf{c_1}$, ..., $\mathbf{c_r}$) jsou uspořádané báze prostorů L_1 a L_2. Matie zobrazení f (vzhledem k B a C) je taková matice A_f, pro kterou platí $A_f \cdot \text{coord}_B(x)=\text{coord}_C(f(x))$ pro každý vektor x
    - Matice A_f má r řádků a s sloupců. Navíc j-tý sloupec matice A_f je tvořen souřadnicemi $\text{coord}_C(f(b_j))$ zapsanými do sloupce.
    - *můžeme lepit diagramy k sobě, jak se nám hodí, když najdeme “švy”*
- matice isomorfismu A_f^{-1}: platí $A_f^{-1} \cdot A=E_n$
- jakoukoliv čtvercovou regulární matici T typu n×n můžeme považovat za matici transformace souřadnic
- **Def.:** Matice A, B typu n×n jsou si podobné ($A \approx B$), pokud $B=T^{-1} \cdot A \cdot T$ pro nějakou regulární matici T
    - jedná se o matice stejného zobrazení, ale v jiné bázi

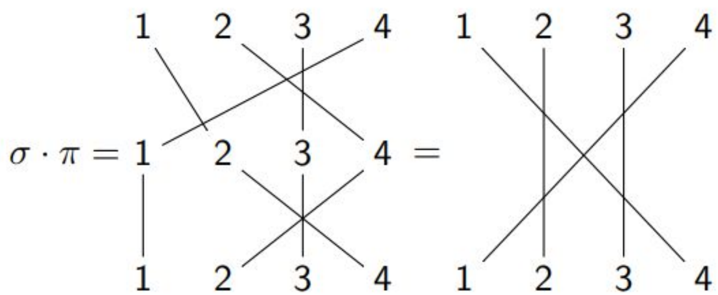
GEM a soustavy lineárních rovnic (11, 12)

- **Def.:** Matice (A | b), kde A je matice soustavy, b je pravá strana rovnice kóduje soustavu lineárních rovnic A·x=b, kde x je vektor neznámých. Nazývá se rozšířená matice soustavy.
- **Def.:** Matice M je v horním blokovém tvaru, jsou-li splněny následující dvě podmínky:
    a. Každý nenulový řádek matice M je nad jakýmkoliv řádkem samých nul.
    b. Každý pivot (tj. nenulová položka první zleva) jakéhokoliv nenulového řádku matice M je vždy více napravo než pivot předchozího řádku.
- Jakoukoliv matici M nad $\mathbb{F}$ lze konečným počtem řádkových elementárních úprav převést na horní blokový tvar.
    I. Přičtení skalárního násobku řádku matice k jinému řádku matice
    II. Prohození dvou řádků v matici.
    III. Vynásobení řádku matice nenulovým skalárem.
- **Def.:** Řekneme, že soustavy (A | b) a (A’ | b’) r rovnic o s neznámých jsou ekvivalentní ((A | b) ~ (A’ | b’)), když pro každý vektor x z $\mathbb{F}$ platí: A·x=b iff A’·x=b’
    - *ekvivalentní soustavy stejných rozměrů mají stejná řešení*
- Vlastnosti ekvivalence soustav
    - reflexivita: (A | b) ~ (A | b)
    - symetrie: pokud (A | b) ~ (A’ | b’), pak (A’ | b’) ~ (A | b)

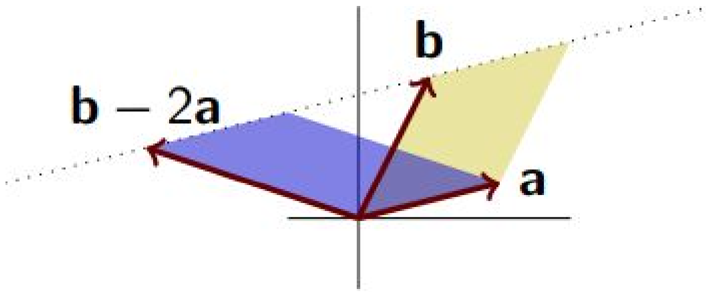
- transitivita: pokud (A | b) ~ (A’ | b’) a (A’ | b’) ~ (A’’ | b’’), pak (A | b) ~ (A’’ | b’’)
- Ať P: $\mathbb{F}^r \to \mathbb{F}^r$ je jakýkoliv isomorfismus. Potom platí:
  - (A | b) ~ (PA | Pb)
  - rank((A | b))=rank((PA | Pb))
- rank(M)=rank(M^T)
- hodnost matice M je rovna počtu nenulových řádků v horním blokovém tvaru po skončení GEM (defekt je s-rank)
- Frobeniova věta
  - Soustava (A | b) má řešení iff platí rovnost rank(A) = rank(A | b)
    - *jinak věci typu 0x+0y+0z=6… to asi těžko člověk vyřeší*
  - Pokud (A | b) má řešení, potom lze říci následující:
    - Zvolme jakékoliv p, splňující rovnost Ap=b. Potom Ax_0=b platí právě tehdy, když $x_0=p+x_h$ pro nějaké $x_h \in$ker(A)
- **Def.:** Jakékoliv bázi prostoru ker(A) říkáme fundamentální systém soustavy s maticí A.
- **Def.:** Soustavě (A | o) budeme říkat homogenní soustava příslušná k matici A.
- jakékoliv řešení soustavy lze vyjádřit ve tvaru $p+x_h$, kde p nazýváme partikulární řešení
- GEM je universální, ale numericky nestabilní → počítače používají jiné metody

Determinant (13, 14)

- **Permutace**
  - **Def.:** Permutace množiny {1,2,...,n} je jakákoliv bijekce π : {1, 2, . . . , n} → {1, 2, . . . , n}.
  - dají se zapsat výčtem, tabulkou nebo strunovým diagramem

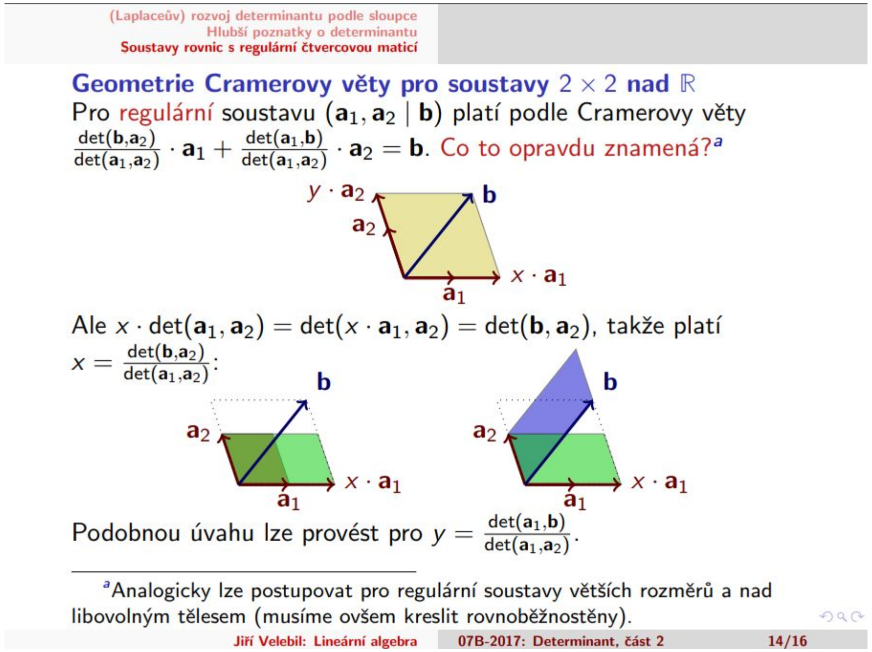


  -
  - množině všech permutací množiny {1,2,...,n} říkáme symetrická grupa permutací, značíme S_n
    - skládání je v S_n asociativní, má neutrální prvek (triviální permutace), každá permutace má inversi
  - **Def.:** Inverse v permutaci π je výskyt situace i<j a zároveň π(i)>π(j)
  - **Def.:** Znaménko permutace π je číslo signπ, které je definováno:

        - $\mathrm{sign}\,\pi=+1$ pokud π obsahuje sudý počet inversí, $\mathrm{sign}\,\pi=-1$ pokud obsahuje lichý počet inversí
        - inverse v permutaci je jedno překřížení strun v diagramu
        - pro identickou permutaci id_n v S_n platí: $\mathrm{sign}(id_n)=1$
        - pro libovolné permutace σ a π v S_n platí: $\mathrm{sign}(\sigma \cdot \pi) = (\mathrm{sign}\ \sigma) \cdot (\mathrm{sign}\ \pi)$
        - $\mathrm{sign}\ \pi = \mathrm{sign}(\pi^{-1})$
        - Ať π je permutace v S_n. Permutace vzniklá z π prohozením dvou hodnot má opačné znaménko.
- **Def.:** Pro matici A typu n × n nad F definujeme determinant jako skalár $\det(A) = \sum_{\pi \in S_n} \mathrm{sign}\ \pi \cdot a_{\pi(1),1} \cdot a_{\pi(2),2} \cdot \ldots \cdot a_{\pi(n),n}$
    - šachová interpretace: vybíráme políčka z determinantu, aby se na nich umístěné věže neohrožovaly a vezmeme součet těch rozestavění
- determinant určuje orientovaný n-dimensionální objem rovnoběžnostěnu určeného danými vektory
- Hrátky s determinanty
    - $\det(A)=\det(A^T)$
    - $\det(B \cdot A) = \det(B) \cdot \det(A)$
    - pro regulární A je $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$
    - $\det(a \cdot A) = a^n \cdot \det(A)$, kde a je libovolný skalár
    - prohození dvou řádků mění znaménko determinantu
    - vynásobení řádku skalárem a změní determinant a-krát
    - přičtení lineární kombinace ostatních řádků k řádku nezmění hodnotu determinantu
        - 

          $$P(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P(\mathbf{a}, \mathbf{b} - 2\mathbf{a})$$
    - Ať A je horní trojúhelníková matice. Potom det(A) = součin prvků na hlavní diagonále.
        - → lze počítat “opatrným” GEMem
- A je regulární iff $\det(A) \neq 0$
- determinant je lineární v každém sloupci, speciálně z $\mathbf{a}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i$ (kde a_j je j-tý sloupec matice A) vychází rovnost:

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot \underbrace{\det(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{j-1}, \mathbf{e}_i, \mathbf{a}_{j+1}, \dots, \mathbf{a}_n)}_{\text{Značení: } A_{ij}.}$$

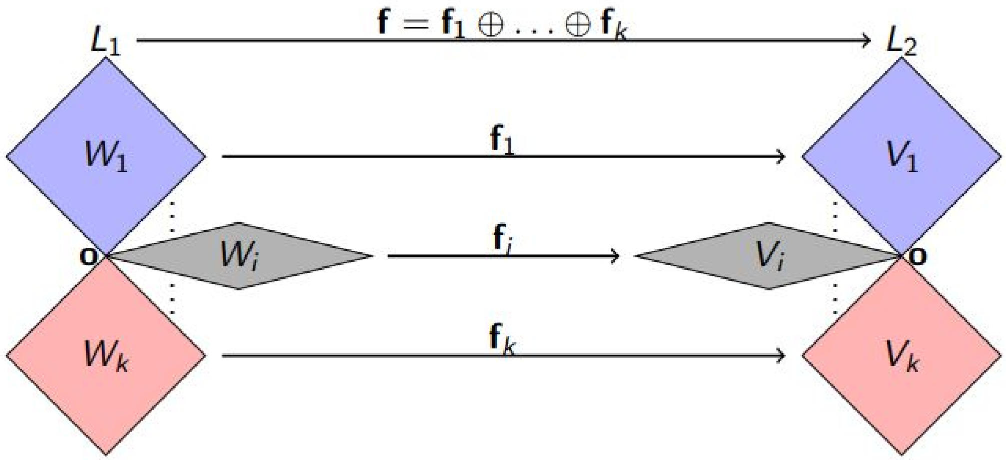
   - \- Laplaceův rozvoj determinantu podle sloupce
- **Def.:** Determinantu A_{ij} říkáme algebraický doplněk pozice (i,j) v matici A.
- Ať A je matice typu n × n nad $\mathbb{F}$, n ≥ 2. Označme jako A_{ij} matici typu (n − 1) × (n − 1) vzniklou z matice A vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce. Potom $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$.
   - umožní rekurzivní výpočet determinantu, ale složitost n! - hodí se hlavně pro řídké matice (s hodně nulami)
- **Def.:** Pro matici A typu n × n je její adjungovaná matice adj(A) transponovaná matice algebraických doplňků posic v matici A.
   - $A \cdot \mathrm{adj}(A) = \det(A) \cdot E_n = \mathrm{adj}(A) \cdot A \rightarrow A^{-1} = \det(A)^{-1} \cdot \mathrm{adj}(A)$.
- **Def.:** Rovnici A·x=b, kde A je matice typu n × n nad $\mathbb{F}$, říkáme soustava se čtvercovou maticí.
   - tato soustava má jediné řešení iff A je regulární *(důkaz vychází z isomorfismu)*
- Cramerova věta
   - Ať A·x=b je soustava se čtvercovou regulární maticí nad F.
     Potom j-tá položka jediného řešení $x=A^{-1}\cdot b$ je tvaru $x_j=\det(A)^{-1}\cdot\det(a_1,\dots, a_{j-1}, b, a_{j+1}\dots,a_n)$
   - matice musí být regulární!
   - 

Vlastní čísla a diagonalizace (15, 16, 17, 18)

- **Def.:** Pro lineární zobrazení f: L→L je λ z 𝔽 vlastní hodnotou (vlastním číslem, eigenvalue), pokud existuje nenulový vektor x, splňující f(x)=λx
  - Každému takovému nenulovému vektoru x říkáme vlastní vektor (eigenvector) příslušný hodnotě λ.
  - {x | f(x) = λ·x} = ker(f − λ·id), nazýváme to vlastní podprostor (eigenspace) eigen(λ, f)
    - pokud není triviální, je λ vlastní číslo
- Ať f: L→L je lineární zobrazení, dim(L)=n. Označme A_f matici f vzhledem k jakékoliv bázi prostoru L. Potom λ je v F vlastní hodnotou f iff $\det(A_f-\lambda E_n)=0$.
  - Dk.: Defekt musí být >0, aby nebyl eigenspace netriviální.
- **Def.:** Ať A je matice typu n×n nad F, n>=1. Výrazu $\det(A-xE_n)$ říkáme charakteristický polynom matice A (značení: $char_A(x)$).
  - jestliže A ≈ B, potom $char_A(x) = char_B(x)$ (pozor - naopak to neplatí)
  - polynom nemusí mít v daném tělese žádný kořen
- Pro matici A typu n x n nad 𝔽 jsou následující podmínky ekvivalentní:
  - A je diagonalisovatelná, tj. A ≈ D pro nějakou diagonální D
  - $char_A(x)$ lze v 𝔽 rozložit na součin a platí: násobnost λ jako kořene charakteristického polynomu je rovna dimensi eigenprostoru
    - algebraická násobnost = geometrická násobnost
    - *jde to, když umím najít dost kořenů a vystačí mi to na bázi*
- *regulární transformace roviny bez 2-násobných vlastních hodnot jsou pouze dvou typů:*
  - *změny měřítka*
  - *rotace následované změnou měřítka stejnou na obou souřadnicových osách*
- Pro diagonalisovatelnou matici A typu n x n nad 𝔽 platí: $A^k=T^{-1}D^kT$
- direktní rozklad: *když se dá prostor rozsekat na invariantní podprostory na dané zobrazení, značíme:* ⊕
  - *diagonální matice už rozsekaná je po eigenprostorech*
  - $\mathbb{F}^n = W_1 \vee W_2 \vee \dots \vee W_n$ a $W_i \cap (\bigvee_{j\neq i} W_j) = \{o\}$, pak značíme $\mathbb{F}^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_n$

Direktní rozklad lineárního prostoru a lineárního zobrazení

Pro $\mathbf{f} : L_1 \to L_2$, kde $L_1 = W_1 \oplus \ldots \oplus W_k$, $L_2 = V_1 \oplus \ldots \oplus V_k$ a $\mathbf{f}(\vec{x})$ je z V_i, jakmile $\vec{x}$ je z W_i, píšeme



- To znamená: $\mathbf{f}(\vec{x}) = \mathbf{f}_1(\vec{x}_1) + \ldots + \mathbf{f}_k(\vec{x}_k)$, kde $\vec{x} = \vec{x}_1 + \ldots + \vec{x}_k$.

- **Def.:** Lineárnímu zobrazení f: L→L, pro které existuje k tak, že f^k=o, říkáme nilpotentní. Nejmenšímu takovému k říkáme index nilpotence, k=nil(f).
    - Pro M≈N: M nilpotentní iff N nilpotentní, nil(N)=nil(M)
- **Def.:** Ať f: L→L je lineární zobrazení. Seznamu $f^{k-1}(v), f^{k-2}(v), \ldots, f^1(v), f^0(v))$, kde $f^k(v) = o$, říkáme f-řetězec délky k vytvořený vektorem v.
- Ať n: L→L je nilpotentní linární zobrazení, dim(L)=n. Potom existuje báze B=(b_1,...,b_n) prostoru L, která vznikla zřetězením n-řetězců. Počet a délka n-řetězců v bázi B jsou určeny jednoznačně.

Příklad (Jordanova báze Jordanovy buňky)

Pro Jordanovu buňku

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{o}, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_{n-1})$$

je příslušný řetězec $\mathbf{e}_n \mapsto \mathbf{e}_{n-1} \mapsto \dots \mapsto \mathbf{e}_1 \mapsto \mathbf{o}$ a to znamená, že kanonická báze

$$(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$$

je Jordanova báze Jordanovy buňky.

- Předpokládejme, že platí $char_M(x) = a\cdot(x - \lambda_1)^{m1}\cdot\ldots\cdot(x - \lambda,)^{mp}$. Pak $M \approx B_1(\lambda_1) \oplus \ldots \oplus B_p(\lambda_p)$, kde:
  - $B_1(\lambda_1)$ má rozměry $m_1\times m_1, \ldots, B_p(\lambda_p)$ má rozměry $m_p\times m_p$, těm budeme říkat Jordanovy segmenty.
  - Platí $B_1(\lambda_1) = N_1 + \lambda_1 E_{m1}, \ldots, B_p(\lambda_p) = N_p + \lambda_p E_{mp}$, kde $N_1 \ldots, N_p$ jsou nilpotentní matice
  - Přičtením matic $\lambda_1 E_{m1}, \ldots, \lambda_p E_{mp}$ k Jordanovu tvaru matic $N_1 \ldots, N_p$ získáme výsledný Jordanův tvar.

2. Tabulka pro vlastní hodnotu 2, tj. pro $\mathbf{N} = \mathbf{M} - 2 \cdot \mathbf{E}_6$

i	$d_i = \mathrm{def}(\mathbf{N}^i)$	počet buněk rozměrů $i \times i$ je: $2d_i - d_{i-1} - d_{i+1}$
0	0	—
1	2	1
2	3	0
3	4	1
4	4	—

To znamená, že $\mathbf{B}_1(2)$ má tvar

$$\mathbf{B}_1(2) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) + 2\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

- $f_{diag}\cdot f_{nil} = f_{nil}\cdot f_{diag}$ - komutují :o

Skalární součin (19, 20, 21, 22)

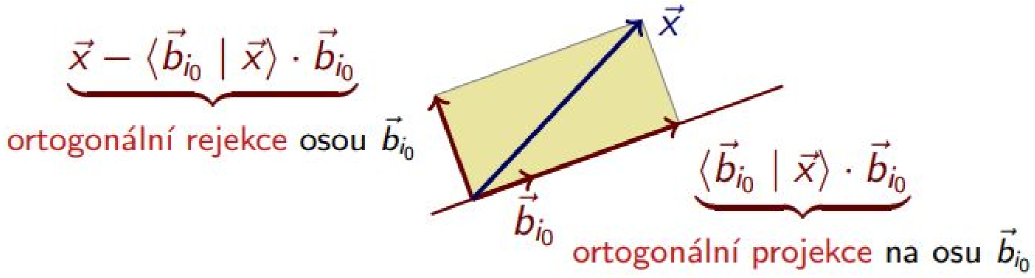
- **Def.:** Ať L je lineární skalární prostor nad $\mathbb{R}$. Funkci <--|--> : L x L → $\mathbb{R}$ říkáme skalární součin, pokud platí následující, pro libovolné x, y:
    - komutativita: <x | y> = <y | x>
    - linearita v druhé souřadnici: zobrazení <x | -->: L→ $\mathbb{R}$ je lineární
    - positivní definitnost: <x | x> ≥ 0, <x | x>=0 iff x=**o**
- nerovnost Cauchy-Schwarz-Bunyakovski (C-S-B) (TA nerovnost)
    - $|\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle| \leqslant \sqrt{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle}$
    - má za důsledek úhel mezi vektory: $$-1 \leqslant \underbrace{\frac{\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{x} \mid \vec{x} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{y} \mid \vec{y} \rangle}}}_{=\cos\varphi \text{ pro jediné } \varphi \in [0;\pi]} \leqslant 1$$
- **Def.:** Normu vektoru x definujeme jako ||x||=sqrt(<x | x>)
    - C-S-B tedy též <x | y> ≤ ||x||·||y||
    - Platí:
        - ||**x**||>=0, ||**x**||=0 iff **x**=**o**
        - ||a·**x**||=|a|·||**x**||
        - IIx+y||<= ||x||+||y|| (trojúhelníková nerovnost)
    - důsledek: <x | y> = ||x||·||y||·cosϕ
    - vektor x je normovaný, pokud ||x||=1
- **Def.:** Pokud <x | y> = 0, mluvíme o ortogonálních (kolmých) vektorech.
    - nulový vektor je kolmý na všechny vektory, protože sk. součin je lineární v druhé souřadnici a musí poslat nulu na nulu
        - naopak: když je x kolmý na každý vektor, musí jít o nulový vektor
    - x je kolmé na všechna v∈span(M) iff je kolmé na všechna m∈M
        - Dk.: **v** je lineární kombinací vektorů **m** z M
- metrika/distance d: L×L→ $\mathbb{R}$: d(x,y)=||x-y||
    - d(x,y)>=0, rovnost nastává, když x=y
    - d(x,y)=d(y,x)
    - d(x,y)<=d(x,z)+d(z,y)
- Pro matici A: $\mathbb{R}^n$→ $\mathbb{R}^n$ jsou následující podmínky ekvivalentní:
    - A zachovává standardní skalární součin v $\mathbb{R}^n$
    - A je regulární a platí $A^T = A^{-1}$

- **Def.:** Řekneme, že matice G typu n×n nad ℝ je positivně definitní, když existuje matice R s lineárně nezávislými sloupci tak, že $G=R^T\cdot R$
    - každá positivně definitní matice G je symetrická
    - *matice R je v určitém smyslu druhá odmocnina z G*
- Charakterisace positivně definitních matic (TFAE)
    - G je positivně definitní
    - G je symetrická a determinanty všech podmatic jsou kladné
    - G je symetrická a nerovnost $x^T\cdot G\cdot x>=0$ platí pro všechna x z $\mathbb{R}^n$ (rovnost platí pouze pro x=o)
    - G je symetrická a $char_G(x)$ má všechny kořeny reálné a kladné
    - existuje regulární R tak, že $G=R^T\cdot R$
- Ať G je positivně definitní matice typu n×n nad ℝ Potom maticový součin $x^T\cdot G\cdot y$ definuje skalární součin v $\mathbb{R}^n$
    - Každý skalární součin v $\mathbb{R}^n$ definuje positivně definitní matici $G = (g_{ij})_{i=1,...,n,=“1,...,n}$, kde $g_{ij} =\langle e_i \mid e_j\rangle$
    - matici G říkáme metrický tensor skalárního součinu
- **Def.:** Báze B je ortonormální, pokud $\langle b_i \mid b_j\rangle = \delta_{ij}$
    - Existuje jediný skalární součin takový, že $\langle b_i \mid b_j\rangle = \delta_{ij}$, metrický tensor $G = (B^{-1})^T B^{-1}$
        - Dk. existence: B^{-1} pošle b_i na e_i
        - Dk. jednoznačnosti: hrajeme si s tou rovností :)
- Ať M je jakákoliv množina nenulových vektorů s vlastností $\langle x \mid y\rangle = 0$ pro jakékoliv různé vektory x, y z M. Pak M je lineárně nezávislá množina.
    - Dk.: začíná $0 = \langle x_{i0} \mid o\rangle$, nulu zapíšeme jako lin. kombinaci a hrajeme si s tím
- *v prostoru dimense n může existovat maximálně n navzájem na sebe kolmých nenulových vektorů*
- každou bázi jde normalizovat - prvky báze vydělíme jejich normou
- Ať B= ($\mathbf{b}_1$, ..., $\mathbf{b}_n$) je ortonormální báze prostoru se skalárním součinem. Pak:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{b}_i \mid \vec{x} \rangle \cdot \vec{b}_i, \text{ čili } \mathbf{coord}_B(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \langle \vec{b}_1 \mid \vec{x} \rangle \\ \vdots \\ \langle \vec{b}_n \mid \vec{x} \rangle \end{pmatrix}$$ (Fourierova řada)

        - Dk.: Chyba je nula, tak vložím tu chybu s nějakým prvkem báze do skalárního součinu a využiju kroneckerovo delta.
    - Důsledky
        - $$\langle \vec{x} \mid \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle \vec{b}_i \mid \vec{x} \rangle \cdot \langle \vec{b}_i \mid \vec{y} \rangle$$
            - *tzn. počítá se to stejně jako standardní skalární součin - bez tensoru :)*
        - $$\cos \varphi_{i_0} = \frac{\langle \vec{b}_{i_0} \mid \vec{x} \rangle}{\|\vec{x}\|}$$

- $$\sum_{i=1}^{n} \cos^2 \varphi_i = 1$$ (Eulerova věta)

- projekce a rejekce
    - 

    - ortogonální rejekce je “nejkratší” ze všech rejekcí (dk. z Pythagorovy věty)
    - projekce na podprostor s ortogonální bází, kde $M=\{u_1,...,u_n\}$ a $W=\text{span}(M)$

$$\mathrm{proj}_W(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \vec{u}_i \mid \vec{x} \rangle}{\langle \vec{u}_i \mid \vec{u}_i \rangle} \cdot \vec{u}_i$$

- ortogonalisační proces (Gram-Schmidt)
    - každou bázi prostoru se skalárním součinem lze převést na ortonormální bázi s vlastností:
      pro každé $k \in \{1,...n\}$ platí: $\text{span}\{\mathbf{b}_1, ..., \mathbf{b}_k\} = \text{span}\{\mathbf{c}_1, ..., \mathbf{c}_k\}$
    - $$\vec{c}_1 := \vec{b}_1, \quad \vec{c}_{k+1} := \underbrace{\vec{b}_{k+1} - \mathrm{proj}_{\mathsf{span}\{\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_k\}}(\vec{b}_{k+1})}_{\text{rejekce vektoru } \vec{b}_{k+1} \text{ podprostorem span}\{\vec{c}_1,\ldots,\vec{c}_k\}}$$
    - posléze normujeme
- $\mathrm{proj}_W(x)=A\cdot(A^T\cdot G\cdot A)^{-1}\cdot A^T\cdot G\cdot x$

SVD (23)

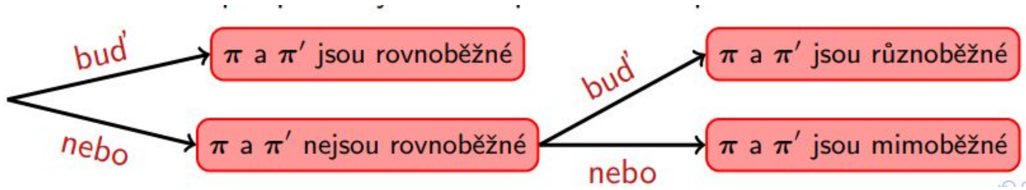
- Věta o hlavních osách: Pro každou symetrickou reálnou matici A: $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ existuje ortonormální báze $\mathbb{R}^n$ složená z vlastních vektorů matice A. Navíc matice A má pouze reálné vlastní hodnoty.
    - **A** vlastně zobrazuje jednotkovou kouli na (degenerovaný elipsoid)
- libovolnou matici M: $\mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$ lze zapsat ve tvaru USV^T, kde:
    - V: $\mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^s$ a U: $\mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^r$ jsou ortogonální, tj. $V^T=V^{-1}$ a $U^T=U^{-1}$

        - *to btw. znamená, že zobrazení zachová úhly*
      - S: $\mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^r$ má na hlavní diagonále kladná čísla $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_h$ (tzv. singulární hodnoty matice M), kde h=rank(M). Všude jinde má S nuly.
- asi si to projdeme spolu

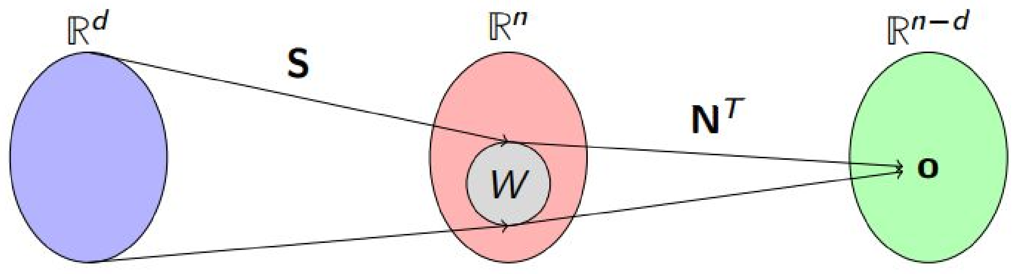
Vektorový součin (25)

- **Def.:** Ať matice A: $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ má sloupcový zápis $(a_1,\ldots,a_k)$, kde k<=n.
  - Matici $A^T \cdot A$: $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ budeme říkat Gramova matice seznamu vektorů $(a_1,\ldots,a_k)$
    - *gramova matice je druhá mocina matice A*
  - Determinantu $\det(A^T \cdot A)$ budeme říkat Gramův determinant seznamu $(a_1,\ldots,a_k)$ a značit jej $\mathrm{Gram}(a_1,\ldots,a_k)$
    - *gramův determinant je druhá mocnina "determinantu" A - ten ale není definován, takže fakt jen jako*
  - v j-tém sloupci a i-tém řádku je hodnota standardního skalárního součinu $\langle a_i \mid a_j \rangle = a_i^T a_j$
- Ať $(a_1,\ldots,a_k)$ je seznam vektoru v $\mathbb{R}^n$, 1 <= k <= n. Potom platí:
  - $\mathrm{Gram}(a_1,\ldots,a_k) \geq 0$
  - $\mathrm{Gram}(a_1,\ldots,a_k) > 0$ iff $(a_1,\ldots,a_k)$ je lineárně nezávislý
  - $\mathrm{sqrt}(\mathrm{Gram}(a_1,\ldots,a_k))$ udává k-dimensionální objem rovnoběžnostěnu v $\mathbb{R}^n$, určeného seznamem $(a_1,\ldots,a_k)$
- **Def.:** Vektorový součin: $\langle \times(x_1,\ldots, x_{n-1}) \mid x \rangle = \det(x_1, \ldots, x_{n-1}, x)$ pro všechna x z $\mathbb{R}^n$
  - vektor $\times(x_1,\ldots, x_{n-1})$
- $\times(x_1,\ldots, x_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} \langle \times(x_1,\ldots, x_{n-1}) \mid e_j \rangle e_j = \sum_{i=1}^{n} \det((x_1,\ldots, x_{n-1}, e_i) \cdot e_i$
  - plyne to z Fourierových řad (aspoň myslím)
  - $\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} x_{11} & x_{12} & \mathbf{e}_1 \\ x_{21} & x_{22} & \mathbf{e}_2 \\ x_{31} & x_{32} & \mathbf{e}_3 \end{vmatrix}$ - mnemotechincká pomůcka - můžeme používat, ale vědět, že to vychází z toho nadtím
- Vlastnosti vektorového součinu (plynou z vlastností determinantu a definice vektorového součinu)
  - $(x_1,\ldots, x_{n-1}) \mapsto \times(x_1,\ldots, x_{n-1})$ je lineární v každé položce
  - $\times(x_{\pi(1)},\ldots, x_{\pi(n-1)}) = \mathrm{sign}(\pi) \cdot \times(x_1,\ldots, x_{n-1})$ pro $\pi \in S_{n-1}$
  - $\times(e_{\pi(1)},\ldots, e_{\pi(n-1)}) = \mathrm{sign}(\pi) \cdot e_{\pi(n)}$ pro $\pi \in S_n$
  - $\|\times(x_1,\ldots, x_{n-1})\|^2 = \det(x_1,\ldots, x_{n-1}, \times(x_1,\ldots, x_{n-1}))$
  - $\times(x_1,\ldots, x_{n-1}) = \mathbf{o}$, když se seznam lineárně závislý
  - $\|\times(x_1,\ldots, x_{n-1})\| = \mathrm{sqrt}(\mathrm{Gram}(x_1,\ldots, x_{n-1}))$
    - norma je rovna (n-1)-dimensionálnímu objemu rovnoběžnostěnu určeného vektory $(x_1,\ldots, x_{n-1})$

Vzájemná poloha a vzdálenost afinních podprostorů (24, 26)

- **Def.:** Množině $p+W = \{p+x|x\in W\}$, kde W je lineární podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$ a p je bod z $\mathbb{R}^n$ říkáme afinní podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$
  - dimense p+W je dim(W)
  - lineárnímu prostoru W říkáme směr afinního podprostoru
  - dim0 - body, dim1 - přímky, dim2 - roviny
- **Def.:** Mějme afinní podprostory $\pi=p+W$ a $\pi'=p'+W'$ v $\mathbb{R}^n$. Řekneme, že:
  - π a π' jsou rovnoběžné, pokud $W \subseteq W'$ nebo $W' \subseteq W$
  - π a π' jsou různoběžné, pokud nejsou rovnoběžné a mají alespoň jeden společný bod
  - π a π' jsou mimoběžné, pokud nejsou rovnoběžné a nemají žádný společný bod
  - dimensi $W \cap W'$ říkáme stupeň rovnoběžnosti π a π'
  - 

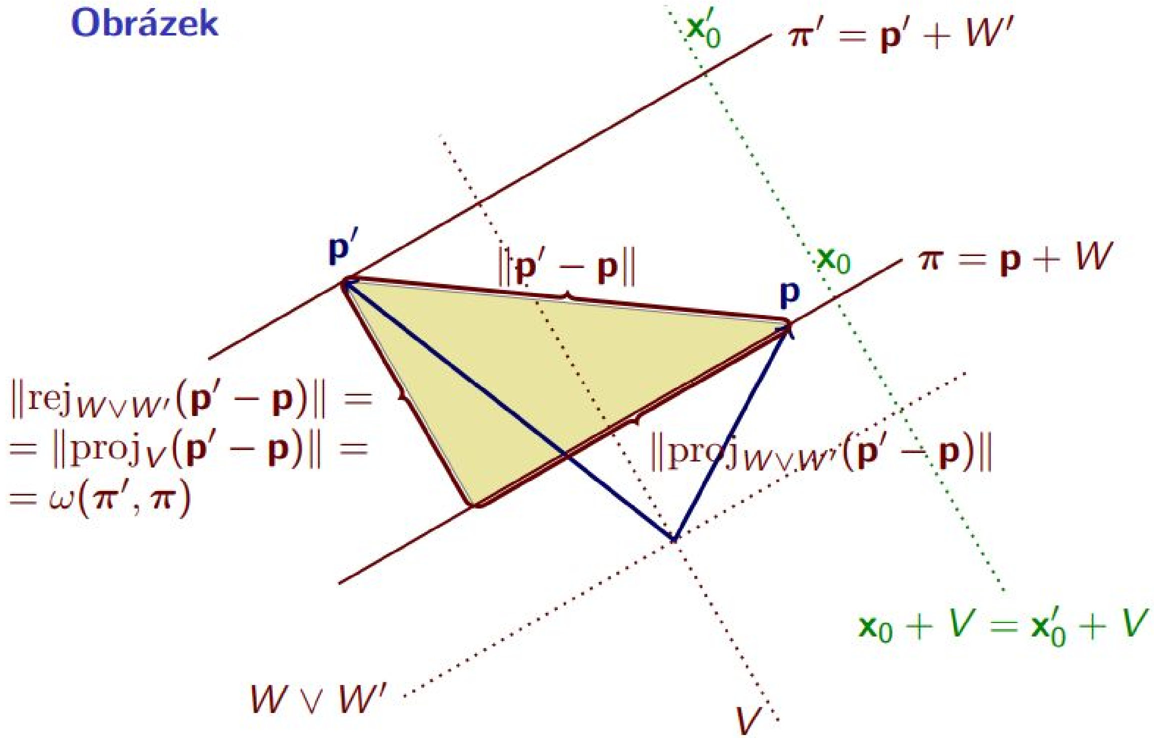
- Charakterisace rovnoběžných disjunktních afinních podprostorů (TFAE)
  - π a π' jsou disjunktní
  - pro jakýkoliv vektor x v π a x' v π' vektor x-x' neleží ve W
  - vektor p-p' neleží ve W
  - existuje vektor x v π a vektor x' v π' tak, že vektor x-x' neleží ve W
- Charakterisace různoběžných afinních podprostorů (TFAE)
  - π a π' jsou různoběžné
  - pro jakýkoliv vektor x v π a x' v π' vektor x-x' leží ve W v W'
  - vektor p-p' leží ve W v W'
  - existuje vektor x v π a vektor x' v π' tak, že vektor x-x' leží ve W v W'
- Charakterisace mimoběžných afinních podprostorů
  - π a π' jsou mimoběžné
  - vektor p-p' neleží ve W v W'
- Ať $\pi = p + W$ je d-dimensionální afinní podprostor prostoru $\mathbb{R}^n$. Potom existují dvě matice S: $\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^n$ a N^T: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-d}$ tak, že platí:
  - $im(S)=W=ker(N^T)$, $rank(N^T)=n-d$ a $rank(S)=d$
  - vektor x leží v π iff $x = p+S\cdot t$ pro nějaké t: parametrický zápis
  - vektor x leží v π iff $N^T(x-p)=0$: rovnicový zápis
    - sloupce matice N si lze představit jako seznam lineárně nezávislých normál příslušného afinního podprostoru



$$\mathrm{im}(\mathbf{S}) = W = \ker(\mathbf{N}^T)$$

- Charakterisace rovnoběžných disjunktních afinních podprostorů, x=p+St
  - TFAE:
    - W’ ⊆ W
    - span(s'_1,...,s'_d) ⊆ span(s_1,..., s_d), kde S’=(s'_1,...,s'_d) a S=(s_1,..., s_d)
    - simultánní soustava (S|S’) má řešení
  - Ať W’ ⊆ W, TFAE:
    - π a π’ jsou disjunktní
    - pro x z π a x’ z π’ soustava (S|x-x’) nemá řešení
    - soustava (S|p-p’) nemá řešení
    - existuje vektor x v π a x’ v π’ tak, že soustava (S|x-x’) nemá řešení
- Charakterisace různoběžných afinních podprostorů (TFAE)
  - π a π’ jsou různoběžné
  - pro jakýkoliv vektor x v π a x’ v π’ soustava (S’, S|x-x’) má řešení
  - soustava (S’, S | p-p’) má řešení
  - existuje vektor x v π a vektor x’ v π’ tak, že soustava (S’, S|x-x’) má řešení
- Charakterisace mimoběžných afinních podprostorů
  - π a π’ jsou mimoběžné
  - soustava (S’, S|p-p’) nemá řešení
- **Def.:** π a π’ jsou dva afinní podprostory prostoru $\mathbb{R}^n$. Reálnému číslu ω(π,π’) = inf{||x − x’|| | x ∈ π, x’∈ π’} říkáme **vzájemná vzdálenost** π a π’.
  - ta množina je neprázdná a zdola omezená - infimum existuje
  - pro n=0: $\mathbb{R}^0$={o}, tedy ω(π,π’)=0
  - pro n=1: $\mathbb{R}^1$ má afinní prostory body nebo celé $\mathbb{R}^1$, takže ω(π,π’)=||p-p’||, nebo ω(p,$\mathbb{R}$)=ω($\mathbb{R}$,$\mathbb{R}$)=0
- Ať π=p+W a π’=p’+W’ jsou dva afinní podprostory v $\mathbb{R}^n$. Potom platí: ω(π,π’) = $\|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(p - p')\|$
  - myšlenky důkazu (máme mít představu):

Obrázek



-
- vzdálenost by měla být délka kolmé příčky mezi prostory (analogicky s dvěma rovnoběžkami v R^2)
- kolmá příčka by měla mít směr V, kde V={v | <w | v> = 0 pro všechna w z W⋁W’} - množina všech vektorů kolmých na W⋁W’
  - je to podprostor? ano je
- najdeme body x_0 v π a x_0’ v π’ tak, že platí: x_0-x'_0=$\mathrm{rej}_{W \vee W'}$(p − p’), tedy x_0-x'_0 je kolmá příčka mezi π,π’ procházející body x_0-x'_0
  - podle definice též x_0-x'_0=proj_V(p − p’)

$$\mathbf{x}' - \mathbf{x} = \underbrace{(\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0)}_{\in V} + \underbrace{(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0') + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})}_{\in W \vee W'}$$

-

-
  -
    - Proto podle Pythagorovy věty[a] platí

      $$\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0\|^2 + \|(\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0') + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x})\|^2$$

      a tedy $\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\|^2 \geq \|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0\|^2$, neboli

      $$\|\mathbf{x}' - \mathbf{x}\| \geq \|\mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0\| = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p}' - \mathbf{p})\| = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$$

      To znamená, že platí[b] $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \|\mathrm{rej}_{W \vee W'}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$. $\blacksquare$
    - [a] Z definice V platí $\langle \mathbf{x}_0' - \mathbf{x}_0 \mid (\mathbf{x}' - \mathbf{x}_0') + (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}) \rangle = 0$.

      [b] Podle definice V platí také $\omega(\boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{\pi}') = \|\mathrm{proj}_V(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\|$
- tipy a triky pro výpočty (dají se odvodit)
  - bod od přímky: $n=\times(s)$ a přímka ve tvaru $n^T(x-p)=0$