# B0B01LAGA - Důkazy

## Týden 2 – lineární obal, lineární podprostor, lineární závislost a nezávislost

1. Dokažte, že je-li $M \subseteq N$, potom:

   - $\text{span}(M) \subseteq \text{span}(N)$.
   - pro všechny $M$ platí: $M \subseteq \text{span}(N)$
   - pro všechny $M$ platí: $\text{span}(\text{span}(M)) = \text{span}(M)$

   *(uzávěrové vlastnosti lineárního obalu)*

2. Dokažte, že $\text{span}(M)$ je vždy lineární podprostor a že množina $M$ je lineární podprostor právě tehdy, když $\text{span}(M) = M$.
3. Dokažte, že průnik libovolného systému $\{W_i \mid i \in I\}$ podprostorů prostoru $L$ je lineárním prostorem prostoru $L$.
4. Dokažte, že sjednocení systému $\{W_i \mid i \in I\}$ lineárních podprostorů prostoru $L$ obecně lineárním podprostorem prostoru $L$ není.
5. Ať $M$ je lineárně nezávislá množina vektorů v lineárním prostoru $L$. Dokažte, že jakmile $N \subseteq M$, je i $N$ lineárně nezávislá množina vektorů.
6. Ať $M$ je lineárně závislá množina vektorů v lineárním prostoru $L$. Dokažte, že jakmile $N$ je množina vektorů z $L$ a platí $M \subseteq N$, je i N lineárně závislá množina vektorů.

## Týden 3 – Báze a dimenze, souřadnice vzhledem k uspořádané bázi

1. Dokažte, že každý konečně generovaný prostor $L$ má konečnou bázi. *(exchange lemma)*
2. Ať $M, N$, jsou konečné množiny vektorů. Dokažte, že $\text{span}(M) = \text{span}(N)$ právě tehdy, když $\dim(\text{span}(M)) = \dim(\text{span}(N)) = \dim(\text{span}(M \cup N))$. *(rovnost dvou lineárních obalů konečných množin)*
3. Ať je $L$ lineární prostor konečné dimense. Dokažte, že potom pro libovolné lineární podprostory $W_1, W_2$, platí rovnost $\dim(W_1 \vee W_2) + \dim(W_1 \cap W_2) = \dim(W_1) + \dim(W_2)$. *(věta o dimenzi spojení a průniku)*
4. Ať seznam $B = (\vec{b_1}, ..., \vec{b_n})$ tvoří bázi lineárního prostoru $L$. Dokažte, že pro každý vektor $\vec{x}$ v $L$ existuje jediný seznam $(a_1, ..., a_n)$ prvků $\mathbb{F}$ tak, že $\vec{x} = a_1 \cdot \vec{b_1} + ... + a_n \cdot \vec{b_n}$. *(existence souřadnic vzhledem k uspořádané bázi)*
5. Ať $B$ je jakákoliv konečná uspořádaná báze lineárního prostoru $L$. Dokažte, že potom pro zobrazení $\vec{x} \mapsto \text{coord}_B(\vec{x})$ platí:

   - $\text{coord}_B(\vec{x} + \vec{y}) = \text{coord}_B(\vec{x}) + \text{coord}_B(\vec{y})$.
   - $\text{coord}_B(a \cdot \vec{x}) = a \cdot \text{coord}_B(\vec{x})$.

   *(linearita výpočtu souřadnic)*

## Týden 4 – Lineární zobrazení

1. Dokažte, že složení lineárních zobrazení je lineární. *(základní algebraické vlastnosti lineárních zobrazení)*
2. Ať $B$ je báze lineárního prostoru $L_1$, ať $L_2$ je libovolný lineární prostor. Dokažte, že potom zadat libovolné zobrazení $h : B \to L_2$ je totéž, jako zadat lineární zobrazení $f : L_1 \to L_2$. *(lineární zobrazení je určeno hodnotami na bázi)*

3. Dokažte, že pro matici $\mathbf{A} : \mathbb{F}^s \to \mathbb{F}^r$ se sloupci $\vec{a_1}, ..., \vec{a_s}$ a vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}$ platí: $\mathbf{A} : \vec{x} \mapsto \sum_{j=0}^{s} x_j \cdot \vec{a_j}$

   *(lineární zobrazení je určeno hodnotami na bázi)*

## Týden 5 – Lineární zobrazení, transformace souřadnic

1. Dokažte, že složení monomorfismů / epimorfismů / isomorfismů je monomorfismus / epimorfismus / isomorfismus.
2. Ať $f : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení. Dokažte, že pak $\ker(f)$ je podprostor $L_1$ a $\mathrm{im}(f)$ je podprostor $L_2$.
3. Ať $f : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, ať prostor $L_1$ má konečnou dimenzi. Dokažte, že pak $\mathrm{def}(f) + \mathrm{rank}(f) = \dim(L_1)$. *věta o dimenzi jádra a obrazu*
4. Ať $f : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, ať prostor $L_1$ má konečnou dimenzi. Dokažte, že je ekvivalentní:
   - $f$ je monomorfismus
   - $\mathrm{def}(f) = 0$
   - $f$ respektuje lineární nezávislost (tj. obraz lineárně nezávislé množiny je opět lineárně nezávislá množina).

   *(charakterizace monomorfismů)*
5. Ať $f : L_1 \to L_2$ je lineární zobrazení, ať prostor $L_1$ má konečnou dimenzi. Dokažte, že je ekvivalentní:
   - $f$ je isomorfismus
   - $f$ je monomorfismus a epimorfismus současně.
   - $\mathrm{def}(f) = 0$ a $\mathrm{im}(f) = L_2$ současně.
   - $\mathrm{def}(f) = 0$ a $\dim(L_1) = \dim(L_2)$.
   - $f$ respektuje lineární nezávislost (tj. obraz lineárně nezávislé množiny je opět lineárně nezávislá množina), a každá rovnice $f(\vec{x}) = \vec{b}$ má alespoň jedno řešení.

   *(charakterizace isomorfismů)*
6. Ať $B = (\vec{b_1}, ..., \vec{b_n})$ je uspořádaná báze prostoru $L$. Dokažte, že potom výpočet souřadnic v bázi $B$ $\mathrm{coord}_B : L \to \mathbb{F}^n$, $\vec{x} \mapsto \mathrm{coord}_B(\vec{x})$ je isomorfismus.
7. Dokažte, že regulární matice jsou přesně matice isomorfismů.

## Týden 6 – GEM a soustavy lineárních rovnic

1. Ať $P : \mathbb{F}^r \to \mathbb{F}^r$ je jakýkoli isomorfismus. Dokažte, že potom platí:
   - $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b}) \sim (\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P} \cdot \mathbf{b})$
   - $\mathrm{rank}((\mathbf{A} \mid \mathbf{b})) = \mathrm{rank}((\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \mid \mathbf{P} \cdot \mathbf{b}))$

   *(základní vlastnosti ekvivalence soustav)*
2. Dokažte, že soustava $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ má řešení právě tehdy, když platí rovnost $\mathrm{rank}(\mathbf{A}) = \mathrm{rank}(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.
   *(Frobeniova věta)*
3. Dokažte, že ke každému d-dimensionálnímu afinnímu podprostoru $\mathbf{p} + \mathrm{span}(\vec{x_1}, ..., \vec{x_d})$ v $\mathbb{F}^s$ existuje alespoň jedna soustava tvaru $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$, která má $\mathbf{p} + \mathrm{span}(\vec{x_1}, ..., \vec{x_d})$ jako množinu řešení.

## Týden 7 – Determinant

1. Dokažte, že $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$.
2. Ať $\mathbf{A}$ je matice typu $n \times n$ nad $\mathbb{F}, n \geq 2$. Dokažte, že potom platí rovnosti $\mathbf{A} \cdot \mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{E}_n = \mathrm{adj}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{A}$ a pro regulární $\mathbf{A}$ platí $\mathbf{A}^{-1} = \det(\mathbf{A})^{-1} \cdot \mathrm{adj}(\mathbf{A})$.

   *(inverze matice pomocí algebraických doplňků)*
3. Ať $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je soustava se čtvercovou maticí. Dokažte, že tato soustava má jediné řešení právě tehdy, když $\mathbf{a}$ je regulární matice.

   *(řešení čtvercové soustavy s regulární maticí)*
4. Ať $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ je soustava se čtvercovou regulární maticí nad $\mathbb{F}$. Dokažte, že potom j-tá položka jediného řešení $\mathbf{x} = \mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{b}$ je tvaru $x_j = \det(\mathbf{A}^{-1} \cdot \det(\mathbf{a_1}, ..., \mathbf{a_{j-1}}, \mathbf{b}, \mathbf{a_{j+1}}, ..., \mathbf{a_n})$.

   *(kramerova věta)*

## Týden 8 – Vlastní čísla, vlastní vektory a diagonalizace matic

1. Ať $f : L \to L$ je lineární zobrazení, $\dim(L) = n$. $\mathbf{A_f}$ je matice $f$ vzhledem k jakékoliv bázi prostoru $L$. Potom $\lambda$ v $\mathbb{F}$ je vlastní hodnotou $f$ právě tehdy, když $\det(\mathbf{A_f} - \lambda \mathbf{E}_n) = 0$.

## Týden 9 – Jordanův tvar

1. Ať $\mathbf{M} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n, \mathbf{N} : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^n$ jsou podobné matice. Dokažte, že pak $\mathbf{N}$ je nilpotentní právě tehdy, když $\mathbf{M}$ je nilpotentní.
2. Ať $f : L \to L$ je lineární zobrazení, kde $L$ má konečnou dimenzi, a ať $\mathbf{M}$ je matice zobrazení $f$ vzhledem k bázi $B$. Pak $f$ je nilpotentní právě tehdy, když $\mathbf{M}$ je nilpotentní.
3. Ať $\mathbf{n} : L \to L$ je nilpotentní lineární zobrazení, $\dim(L) = n$. Dokažte, že potom existuje báze $(\vec{b_1}, ..., \vec{b_n})$ prostoru $L$, která vznikla zřetězením **n**-řetězců.

   *(existence Jordanova tvaru nilpotentního zobrazení)*