

Lineární algebra

Opakování soustav lineárních rovnic

Matěj Dostál

ČVUT v Praze

2. října 2024

Jediné řešení

Nalezněte jediné řešení následujících soustav lineárních rovnic.

a)

$$\begin{aligned}x - y &= -1, \\ 2x + 3y &= 13.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}x - z &= 0, \\ 3x + y &= 1, \\ -x + y + z &= 4.\end{aligned}$$

Řešitelnost

Má daná rovnice či soustava rovnic řešení? Kolik jich má?

a)

$$\begin{aligned}2x + 2y &= 5, \\ x - 4y &= 0.\end{aligned}$$

b)

$$x \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 14 \end{pmatrix}$$

d)

$$\begin{aligned}-x - y &= 1, \\ -3x - 3y &= 2.\end{aligned}$$

Řešitelnost

Má daná rovnice či soustava rovnic řešení? Kolik jich má?

a)

$$x \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}$$

b)

$$2x \quad + \quad z + w = 5,$$

$$y \quad - w = 2,$$

$$3x \quad - z - w = 0,$$

$$4x + y + 2z + w = 9.$$

Parametr

Pro které hodnoty reálného parametru k neexistuje žádné řešení, existuje mnoho řešení, popřípadě existuje jediné řešení dané soustavy?

$$\begin{aligned}x - y &= 1, \\ 3x - 3y &= k.\end{aligned}$$

„Široká“ soustava

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení. *Soustava lineárních rovnic, která má více neznámých než rovnic, má alespoň jedno řešení.*

Kvadratická funkce zadaná třemi body

Nalezněte koeficienty a , b a c takové, aby graf funkce $f(x) = ax^2 + bx + c$ procházel bodem $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, bodem $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ a bodem $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Úpravy soustav rovnic

Jednotlivými kroky tzv. Gaussovy eliminační metody jsou

- ▶ prohození dvou různých řádků,
- ▶ vynásobení řádku nenulovým číslem,
- ▶ přičtení násobku jednoho řádku k jinému řádku.

Je některý z těchto kroků nadbytečný? (Dá se některý krok emulovat ostatními kroky?)

Soustavy zapisujte maticově, řešte. Řešení popište vektorově.

a)

$$\begin{aligned}3x + 6y &= 18, \\ x + 2y &= 6.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}x + y &= 1, \\ x - y &= -1.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}x_1 + x_3 &= 4, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 &= 17.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}2a + b - c &= 2, \\ 2a + c &= 3, \\ a - b &= 0.\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}x + 2y - z &= 3, \\ 2x + y + w &= 4, \\ x - y + z + w &= 1.\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}x + z + w &= 4, \\ 2x + y - w &= 2, \\ 3x + y + z &= 7.\end{aligned}$$

Soustavy zapisujte maticově, řešte. Řešení popište vektorově.

a)

$$\begin{aligned}2x + y - z &= 1, \\4x - y &= 3.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}x - z &= 1, \\y + 2z - w &= 3, \\x + 2y + 4z - w &= 7.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}x - y + z &= 0, \\y + w &= 0, \\3x - 2y + 3z + w &= 0, \\-y - w &= 0.\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}a + 2b + 3c + d - e &= 1, \\3a - b + c + d + e &= 3.\end{aligned}$$