Ve všech úlohách implicitně pracujeme nad tělesem reálných čísel.

Úloha 1 [5 bodů]

Napište si tabulku s čísly 1, 2, 3, 4 a 5. Ke každému číslu připište odpověď ANO či NE na otázku, zda je dané tvrzení pravdivé či nepravdivé. Odpovědi nemusíte zdůvodňovat. Správné odpovědi vs. získané body: (0,0),(1,0),(2,0),(3,1),(4,3),(5,5).

1. Matice se dvěma řádky a třemi sloupci může být monomorfismus.
2. Mějme matici $\mathbf{A}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Pak nutně platí $\det(2\cdot\mathbf{A}^2)=4\cdot\det(\mathbf{A})^2$.
3. Zdvojnásobením sloupce matice se nemůže změnit její obraz.
4. Jsou-li vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ řešeními nějaké soustavy lineárních rovnic, pak je nutně řešením dané soustavy i vektor $\vec{u}-2\cdot\vec{v}$.
5. Mějme matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ typu 4x4, obě s determinantem 4. Jejich součin $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ musí mít defekt 0.

Úloha 2 [5 bodů]

U této úlohy nestačí pouze odpověď, svůj postup podrobně zdůvodňujte.

Nalezněte matici $\mathbf{A}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^1$, která má jádro $\mathsf{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.

Úloha 3 [10 bodů]

U této úlohy nestačí pouze odpověď, svůj postup podrobně zdůvodňujte.

Je dáno lineární zobrazení $\mathbf{A}:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ a vektor $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^4$. Nalezněte a popište množinu řešení soustavy $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{b}$.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3 & 10 & 2\\ 6 & 16 & 11\\ 2 & -2 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b}=\begin{pmatrix}5\\-1\\-3\\-1\end{pmatrix}$$

Rozhodněte, zda je zobrazení $\mathbf{A}$ epimorfismus: pokud ano, dokažte to, pokud ne, nalezněte příklad vektoru z $\mathbb{R}^3$ neležícího v $\mathrm{im}(\mathbf{A})$.