Lineární algebra

Lineární podprostory

Matěj Dostál

ČVUT v Praze

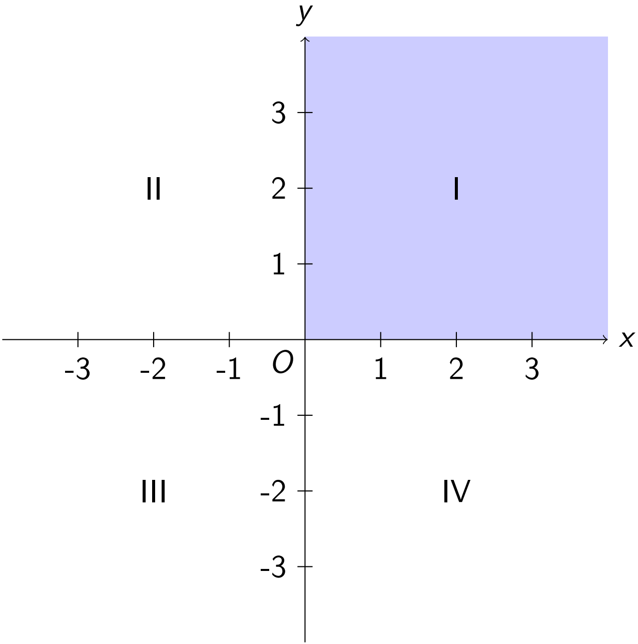
9. října 2024

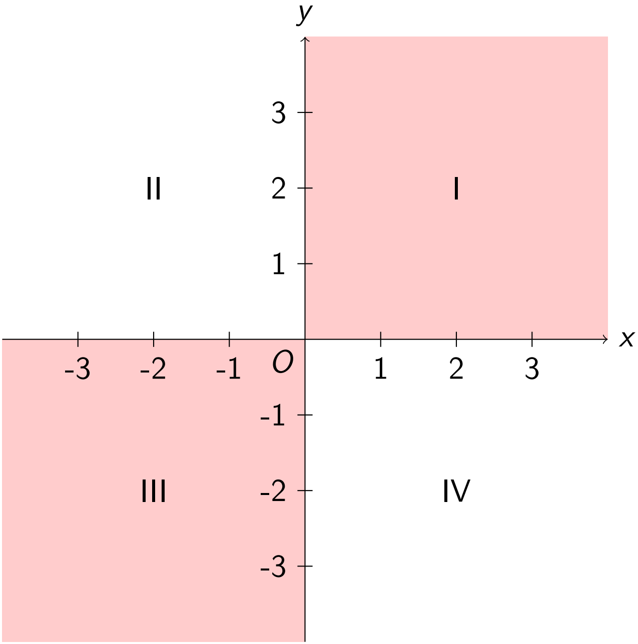
Uzavřenost množiny na operace

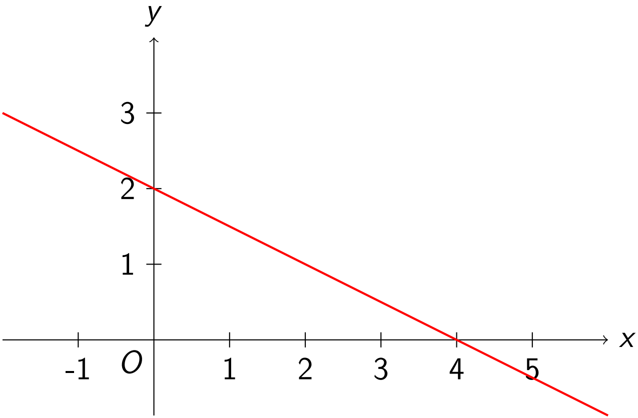
U následujících graficky zadaných podmnožin $\mathbb{R}^2$ (lineárního prostoru $\mathbb{R}^2$ nad tělesem $\mathbb{R}$) rozhodněte, zda

1. obsahují nulový vektor,
2. jsou uzavřené na sčítání vektorů,
3. jsou uzavřené na násobení skalárem.

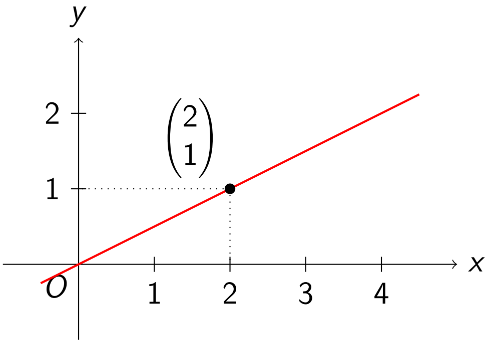
Nejprve zapište dané podmnožiny v množinovém zápisu.


y
x
O
I
II
III
IV
3
2
1
-1
-2
-3
-3
-2
-1
1
2
3


y
x
O
I
II
III
IV
3
2
1
-1
-2
-3
-3
-2
-1
1
2
3



y
x
O
3
2
1
-1
1
2
3
4
5



y
2
1
$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$
x
O
1
2
3
4

Lineární podprostory

Je daná množina lineárním podprostorem $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$? Pokud to jde, přepište do tvaru využívajícího lineární obal. Jaký geometrický objekt popisuje, jaká je jeho dimense?

1. $\{\begin{pmatrix} 2s+4t \\ s-2t \\ 3s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid s,t \in \mathbb{R}\}$, $\{\begin{pmatrix} 2+s \\ 2s+t \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid s,t \in \mathbb{R}\}$
2. $\{\begin{pmatrix} 2+s \\ 5+2s+t \\ t+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid s,t \in \mathbb{R}\}$
3. $\{\begin{pmatrix} 1+2s-4t \\ 2+3s-6t \\ 3+4s-8t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid s,t \in \mathbb{R}\}$
4. $\{\begin{pmatrix} s \\ t \\ \max(s,t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid s,t \in \mathbb{R}\}$

Lineární závislost a nezávislost

Rozhodněte o pravdivosti následujících tvrzení:

1. Pokud je jeden z vektorů v seznamu $S = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$ nulový, pak je S lineárně závislý.
2. Pokud je seznam $S = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$ lineárně nezávislý a vektor $\mathbf{v}_{r+1}$ není lineární kombinací vektorů z S, pak je i seznam $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_{r+1})$ lineárně nezávislý.
3. Pokud je $\mathbf{u}$ lineární kombinací vektorů ze seznamu $S = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$, a pokud je každý z vektorů v seznamu S lineární kombinací vektorů ze seznamu $T = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n)$, pak je i $\mathbf{u}$ lineární kombinací vektorů ze seznamu T.
4. Pokud je seznam $S = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$ lineárně nezávislý, pak žádný vektor $\mathbf{v}_i$ z S není lineární kombinací ostatních vektorů z S.

Lineární závislost a nezávislost

5. Pokud v seznamu $S = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$ není žádný vektor $\mathbf{v}_i$ lineární kombinací ostatních vektorů z S, pak je S lineárně nezávislý.
6. Pokud je seznam $S = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$ lineárně závislý, pak je libovolný vektor $\mathbf{v}_i$ z S lineární kombinací ostatních vektorů z S.
7. Pokud $\mathbf{w}$ není lineární kombinací vektorů ze seznamu $S = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$, pak je seznam $(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r, \mathbf{w})$ lineárně nezávislý.
8. Pokud jsou v seznamu $S = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r)$ všechny podseznamy délky $r - 1$ lineárně nezávislé, pak je i seznam S lineárně nezávislý.