Ve všech úlohách implicitně pracujeme nad tělesem reálných čísel.

Úloha 1 [5 bodů]

Napište si tabulku s čísly 1, 2, 3, 4 a 5. Ke každému číslu připište odpověď ANO či NE na otázku, zda je dané tvrzení pravdivé či nepravdivé. Odpovědi nemusíte zdůvodňovat.

Správné odpovědi vs. získané body: (0,0),(1,0),(2,0),(3,1),(4,3),(5,5).

1. Matice se dvěma řádky a třemi sloupci musí být monomorfismus.
2. Mějme matici $\mathbf{A}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Matice $\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A}$ má nutně determinant $(\det(\mathbf{A}))^2 \cdot \det(\mathbf{A})$.
3. Zdvojnásobením řádku matice se může změnit její hodnost.
4. Jsou-li vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$ řešením nějaké soustavy lineárních rovnic, pak je nutně řešením dané soustavy i jejich součet $\vec{u}+\vec{v}$.
5. Mějme matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ typu 4x4, obě s hodností 2. Jejich součin může mít hodnost 2.

Úloha 2 [5 bodů]

U této úlohy nestačí pouze odpověď, svůj postup podrobně zdůvodňujte.

Nalezněte matici $\mathbf{A}:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ takovou, že jejím obrazem je $\mathsf{span}(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix})$.

Úloha 3 [10 bodů]

U této úlohy nestačí pouze odpověď, svůj postup podrobně zdůvodňujte.

Nalezněte množinu řešení soustavy zadané následující rozšířenou maticí $(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Rozhodněte, zda je $\mathbf{A}$ epimorfismus: pokud ano, dokažte to, pokud ne, nalezněte příklad vektoru z $\mathbb{R}^4$ neležícího v $\operatorname{im}(\mathbf{A})$.