

## LAG definice

- **Lineární kombinace** seznamu vektorů  $(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n)$  je vektor  $\vec{v} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i$ , kde  $(a_1 \dots a_n)$  jsou koeficienty z tělesa  $F$ .
- **Lineární nezávislost** je vlastnost pro nějaký seznam vektorů  $S$ . Ten je lineárně nezávislý, pokud je buď prázdný, nebo pokud seznam není prázdný a  $\vec{o}$  lze vytvořit pouze kombinací vektorů  $(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n)$  za použití koeficientů  $a_1 \dots a_n = 0$ . Tedy  $\sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i = \vec{o}$ , kde  $\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n \in S$  a  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$ .
- **Lineární závislost**: Seznam vektorů  $S$  je lineárně závislý, pokud není lineárně nezávislý. Tedy pokud není prázdný a lze  $\vec{o}$  sestavit kombinací vektorů  $(\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n) \in S$  za použití nenulových koeficientů  $(a_1 \dots a_n) \in F \setminus \{0\}$ . Matematicky:  $\vec{o} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{x}_i$ ,  $\vec{x}_1 \dots \vec{x}_n \in S$  a  $(a_1 \dots a_n) \in F \setminus \{0\}$ .
- **Lineární obal** množiny  $M$  jakýchkoliv vektorů lineárního prostoru  $L$  je množina všech lineárních kombinací vektorů z množiny  $M$ , pokud  $M \neq \{\}$ . Pokud  $M = \{\}$ , tak je lineární obal  $span(\{\}) = \vec{o}$ .
- **Lineární podprostor** prostoru  $L$  je taková podmnožina  $W$  prostoru  $L$ , pro kterou platí, že  $span(W)$  je podmnožinou  $W$ .  $W$  je tedy uzavřena na tvorbu lineárních kombinací.
- **Množina generátorů**  $G$  je množina vektorů, pomocí jejichž všech lineárních kombinací jsme schopni vytvořit lineární podprostor  $W$  prostoru  $L$ . Tedy:  $span(G) = W$ .
- **Konečně generovaný podprostor**: Lineární podprostor  $W$  prostoru  $L$  je konečně generovaný, pokud množina jeho generátorů  $G$  má konečný počet prvků.
- **Báze**  $B$  prostoru  $L$  je lineárně nezávislá množina generátorů prostoru  $L$ . Napišeme-li  $B$  jako seznam (seznam = uspořádaná  $n$ -tice prvků), označujeme ji jako uspořádanou bázi.
- **Dimenze** konečně generovaného lineárního prostoru  $L$  je počet prvků jeho báze.  $dim(L) = card(B)$ ,  $B$  je báze prostoru  $L$ .
- **Souřadnice** vektoru  $\vec{v}$  vzhledem k uspořádané bázi  $B = (\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n)$  je uspořádaný seznam  $(a_1 \dots a_n) \in F$  takový, že  $\vec{v} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \vec{b}_i$ . Značíme jej

$$coord_B(\vec{v}) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}. \quad (\text{Jednoduše řečeno: souřadnice } \vec{v}, \text{ kterou vytvoříme}$$

pomocí lineární kombinace báze  $B$ )

- **Lineární zobrazení** z lineárního prostoru  $L_1$  do lin. prostoru  $L_2$ , značeno  $f : L_1 \rightarrow L_2$ , je takové zobrazení, kde pro  $\vec{x}, \vec{y}$  a skaláry  $a$  z  $F$  platí:  $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$  a  $f(a \cdot \vec{x}) = a \cdot f(\vec{x})$  (zachovává vektorové operace sčítání a násobení skalárem)
- **Jádro** lineárního zobrazení  $f : L_1 \rightarrow L_2$  je množina všech  $\vec{x} \in L_1$ , pro které platí  $f(\vec{x}) = \vec{o}$ . Matematicky:  $ker(f) = \{\vec{x} | f(\vec{x}) = \vec{o}\}$ . Lidsky: množina všech vektorů, které se při zobrazení „ztratí“, tedy převedou na nulový vektor. Jádro indikuje, jak moc je  $f$  monomorfismus.
- **Obraz** lineárního zobrazení  $L_1 \rightarrow L_2$  je množina všech  $\vec{y} \in L_2$  pro které existuje  $\vec{x}$  takové, že  $f(\vec{x}) = \vec{y}$ . Matematicky:  $im(f) = \{\vec{y} | \exists \vec{x} : f(\vec{x}) = \vec{y}\}$ .

Lidsky: množina všech vektorů, do kterých mohou být převedeny vektory z jiného prostoru zobrazením. Obraz indikuje, jak moc je  $f$  epimorfismus.

- **Hodnost** lineárního zobrazení  $f : L_1 \rightarrow L_2$  je dimenze obrazu tohoto zobrazení. Matematicky:  $\text{rank}(f) = \dim(\text{im}(f))$
- **Defekt** lineárního zobrazení  $f : L_1 \rightarrow L_2$  je dimenze jádra tohoto zobrazení. Matematicky:  $\text{rank}(f) = \dim(\ker(f))$
- **Monomorfismus**: Lineární zobrazení  $f : L_1 \rightarrow L_2$  je monomorfismus, pokud je prosté. Tedy když pro každé  $x_1, x_2 \in L_1$  platí  $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ . Z toho plyne:  $\ker(f) = \vec{0}$  (různé vstupy mají různé výstupy, nic se nesrazí do  $\vec{0}$ )
- **Epimorfismus** Lineární zobrazení  $f : L_1 \rightarrow L_2$  je epimorfismus, pokud je na (surjektivní). Tedy když pro všechna  $y \in L_2$  existuje  $x \in L_1$  takové, že  $f(x) = y$ . Z toho plyne:  $\text{im}(f) = L_2$  (pro každý vektor v  $L_2$  je odpovídající vektor v  $L_1$ , zobrazení pokrývá celý prostor  $L_2$ )
- **Isomorfismus**: Lineární zobrazení  $f : L_1 \rightarrow L_2$  je isomorfismus, pokud je prosté a na zároveň (bijektivní).
- **Regulární matice**  $M$  je matice, která má inverzi  $A^{-1}$  a platí:  $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$
- **Singulární matice** je matice  $M$ , která není regulární.