(1) Rozhodněte, zda zobrazení $f: \mathbb{R}^{\leq 3}[x] \to \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, $f(ax^3+bx^2+cx+d) = (a+d)x^3 + bx^2 + c$, je epimorfismus.

Aby byla f epimorfismus, muselo by platit, aby $f(ax^3+bx^2+cx+d) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, kde $\alpha..\delta \in \mathbb{R}$, tedy že výsledné polynomy budou pokrývat všechny osy výsledného prostoru. To se však neděje, protože výsledný polynom je pro $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ (jen koeficienty): $((a+d), b, 0, c)$, tedy 3. osa zůstává konstantně nulová $\to$ tedy f není epimorfismus, protože $im(f) \neq L_2$

(2) Definujte pojem báze lineárního prostoru. Není potřeba definovat span.

Báze B lineárního prostoru L nad F je LN množina vektorů, jejichž lineární kombinací lze sestavit všechny vektory v L. Tedy $span(B) = L$.

(3) Víte, že $B=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)$, $C=\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6&0\\0&3\end{pmatrix}\right)$

a) tvoří báze prostoru $\mathcal{L}in(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$. Ověřte, že platí:

$$T_{B\mapsto C}=\begin{pmatrix}-1&0&0&2\\0&0&1/2&0\\0&1/3&0&0\\1/3&0&0&-1/3\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{coord}_C\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\right)=-1\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+1/3\begin{pmatrix}6&0\\0&3\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\checkmark$$

b) Spočtěte souřadnice matice $\begin{pmatrix}4&-6\\-2&5\end{pmatrix}$ vzhledem k bázi C.

a) vyjádříme souřadnice C v bázi B $\longrightarrow$ z C do B

$$\mathrm{coord}_B\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=1.\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{coord}_B\left(\begin{pmatrix}0&0\\2&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{coord}_B\left(\begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\3\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{coord}_B\left(\begin{pmatrix}6&0\\0&3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}6\\0\\0\\3\end{pmatrix}$$

B i C jsou báze => z coords máme transformační matici typu

4×4 $T_{C\to B}$:

$$T_{C\mapsto B}=\begin{pmatrix}1&0&0&6\\0&0&3&0\\0&2&0&0\\1&0&0&3\end{pmatrix}$$

víme, že $T_{C\mapsto B}=(T_{B\mapsto C})^{-1}$

a $A \cdot A^{-1} = E$

Teď ověříme:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \square$$

b) $$\mathrm{coord}_C\left(\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\right) = T_{B \mapsto C} \cdot \mathrm{coord}_B\left(\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & -1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -2 \\ -1/3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \checkmark \\ \checkmark \\ \checkmark = \\ \checkmark \end{matrix} \begin{pmatrix} -4+10 \\ 1/2 \cdot -2 \\ 1/3 \cdot -6 \\ 1/3 \cdot 4 \end{pmatrix}$$

$$-1/3 \cdot 5$$