Lineární algebra

Báze a souřadnice

Matěj Dostál

ČVUT v Praze

21. října 2024

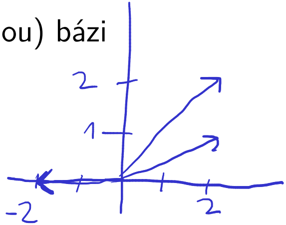
Základní souřadnicové úlohy

V prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ máme dánu (uspořádanou) bázi

$$x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$$

$\vec{v}$

$$B = \left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right).$$



1. Pro vektor $\mathbf{v} = \begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$ zjistěte jeho souřadnice vzhledem k bázi B, tedy zjistěte $\mathbf{coord}_B(\mathbf{v})$.
2. O vektoru $\mathbf{w}$ víte, že $\mathbf{coord}_B(\mathbf{w}) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Spočtěte $\mathbf{w}$.

$$x\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix} \Bigg\} \left(\begin{array}{cc|c}2&2&-2\\1&2&0\end{array}\right)$$

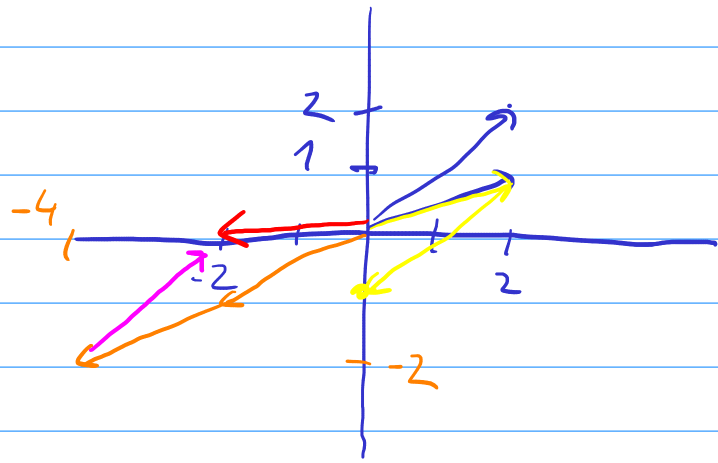
$$\sim \left(\begin{array}{cc|c}1&1&-1\\1&2&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\frac{1}{2}R_1\\R_2\end{array}$$

$x=-2$

$$\begin{aligned} x + \overset{1}{y} &= -1 \\ y &= 1 \end{aligned} \quad \Bigg\{ \sim \left(\begin{array}{cc|c}1&1&-1\\0&1&1\end{array}\right)\begin{array}{l}R_1\\R_2-R_1\end{array}$$

Řešení je vektor $\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$, tedy

$\mathrm{coord}_B(\vec{v}) = \begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.



2.)

$\mathrm{coord}_B(\vec{w}) = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$. Co je $\vec{w}$?

$$\boxed{1}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \vec{w} = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

Souřadnicová vlastnost a báze

V prostoru $\mathbb{R}^2$ nad $\mathbb{R}$ je dán seznam vektorů $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$. *Nevíme* o něm, zda je to báze $\mathbb{R}^2$. Naopak víme, že pro každý vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ existuje právě jedna dvojice skalárů $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ taková, že

$$a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 = \mathbf{v}.$$

Ukažte, že z této vlastnosti plyne, že B *je* báze $\mathbb{R}^2$.

1.) $\mathrm{span}(\vec{b}_1, \vec{b}_2) = \mathbb{R}^2$: B generuje $\mathbb{R}^2$.

2.) B je LN : ať $\vec{v} = \vec{o}$.

$$\left.\left[\begin{array}{c} a_1\vec{b}_1 + a_2\vec{b}_2 = \vec{o} \\ \Downarrow \\ a_1 = a_2 = 0 \end{array}\right]\right\} B \text{ LN.}$$

Exchange lemma

Nechť $B = (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ je báze prostoru $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$. Ukažte, že pro vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ se souřadnicemi

$$\mathbf{coord}_B(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

platí následující tvrzení:

Seznam $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{v})$ je bází $\mathbb{R}^3$ právě tehdy, když $v_3 \neq 0$.

$B = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ v $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$

Co když $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ a $\vec{v} = \begin{pmatrix}0\\\alpha\\1\end{pmatrix}$? Co když navíc $v_3 \neq 0$?

Neznamená to, že Ex. lemma neplatí?

$$\mathrm{coord}_B(\vec{v}) = \begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}.$$

Námitka 1: Když $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\1\end{pmatrix}$, tak B není wsp. báze.

Odpověď 1: Ale B je wsp. báze!

Námitka 2: $1\cdot\vec{b}_1 + 0\,\vec{b}_2 + 0\cdot\vec{b}_3 = \vec{v}$, tedy $\mathrm{coord}_B(\vec{v}) = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Odpověď 2: OK. ($v_3 = 0$!)

1.) „$\rightarrow$"

$V = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{v})$ báze $\rightarrow$ $v_3 \neq 0$.

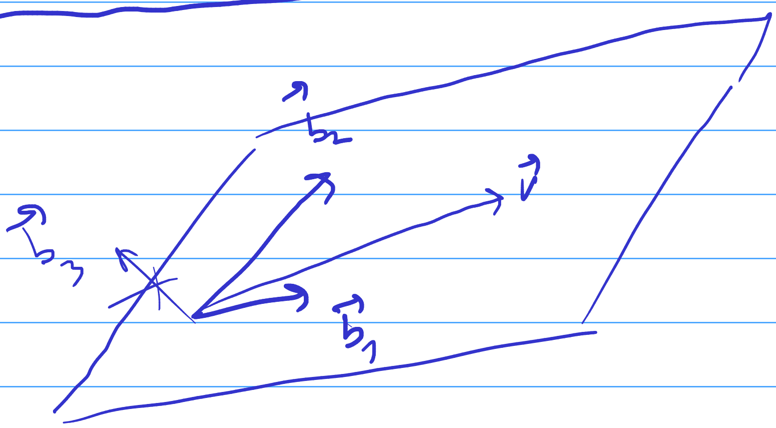
$\varphi \Rightarrow \psi$

$\neg\psi \Rightarrow \neg\varphi$

$v_3 = 0$ $\rightarrow$ $V = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{v})$ není báze, neboť není LN.

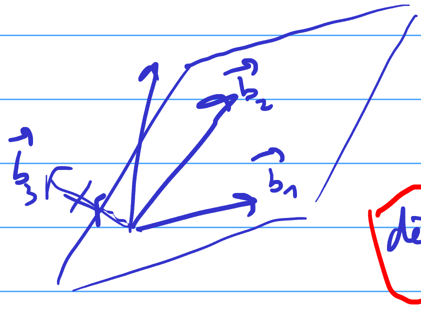
$$v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + 0\,\vec{b}_3 = \vec{v} \longleftrightarrow v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 - 1\vec{v} = \vec{o}$$

$\boxed{v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 - 1\cdot\vec{v} = \vec{o}}$ netriv. kombinace rovna $\vec{o}$.



2.)

$\underline{v_3 \neq 0} \rightarrow V = (\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{v})$ je báze $(\mathbb{R}^3)$.



$\rightarrow v_1 \vec{b}_1 + v_2 \vec{b}_2 + v_3 \vec{b}_3 = \vec{v}$

dělím v_3

$$\underbrace{\vec{b}_3 = \frac{1}{v_3}\vec{v} - \frac{v_1}{v_3}\vec{b}_1 - \frac{v_2}{v_3}\vec{b}_2}$$

$\vec{b}_3 \in span(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{v})$.

$$\overbrace{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3}^{B} \in span(\underbrace{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{v}}_{V}) \rightarrow \overset{\mathbb{R}^3}{\overset{=}{span(B)}} \subseteq \underbrace{\overset{\mathbb{R}^3}{\overset{=}{span(V)}}}_{V \text{ generuje } \mathbb{R}^3}.$$

// $B \subseteq span(V) \rightarrow span(B) \subseteq span(span(V)) = span(V)$.

V je LN:

$$a_1 \vec{b}_1 + a_2 \vec{b}_2 + a_3 \vec{v} = \vec{o}$$

$$\underbrace{a_1 \vec{b}_1 + a_2 \vec{b}_2 + a_3 (v_1 \vec{b}_1 + v_2 \vec{b}_2 + v_3 \vec{b}_3) = \vec{o}}$$

$$(a_1 + a_3 v_1)\vec{b}_1 + (a_2 + a_3 v_2)\vec{b}_2 + a_3 v_3 \vec{b}_3 = \vec{o}$$

B je báze $\downarrow$ • jsou 0.

$\underline{a_3 v_3 = 0}$ & $\underline{v_3 \neq 0} \rightarrow \underline{a_3 = 0}$

$a_2 + \overset{0}{a_3 v_2} = 0 \rightarrow a_2 = 0$

$a_1 + \overset{0}{a_3 v_1} = 0 \rightarrow a_1 = 0$

Dostali jste seznam k vektorů z lineárního prostoru $\mathbb{R}^n$ nad $\mathbb{R}$. Pro každou z variant

- $k < n$
- $k = n$
- $k > n$

rozhodněte, zda následující tvrzení musí platit, může platit či nemůže platit:

1. Daný seznam je lineárně nezávislý.
2. Daný seznam generuje $\mathbb{R}^n$.
3. Daný seznam je bází $\mathbb{R}^n$.

Své tvrzení neformálně zdůvodněte.

Seznam S k vektorů z $\mathbb{R}^n$ (nad $\mathbb{R}$).

	S LN	S generuje $\mathbb{R}^n$	S báze $\mathbb{R}^n$
$k < n$	může nemusí	nemůže	nemůže
$k = n$	může nemusí	může nemusí	může nemusí
$k > n$	nemůže	může nemusí	nemůže

Seznam vektorů $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$, kde

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

tvoří bázi $\mathbb{R}^3$ nad $\mathbb{R}$.

1. Promyslete, jak dokázat, že daný seznam skutečně tvoří bázi $\mathbb{R}^3$.
2. Každý z vektorů $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ a $\mathbf{w}$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   lze zapsat jako lineární kombinaci vektorů $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ a $\mathbf{v}_3$. Spočtěte tyto lineární kombinace.

Spojení a součet lineárních podprostorů

Ať W_1, W_2 jsou lineární podprostory L nad $\mathbb{F}$. Spojení $W_1 \vee W_2$ je definováno jako $\mathrm{span}(W_1 \cup W_2)$. Součet $W_1 + W_2$ je definován jako $\{w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$. Ukažte, že

$$W_1 \vee W_2 = W_1 + W_2.$$