Lineární algebra
Soustavy a determinanty

Matěj Dostál

ČVUT v Praze

27. listopadu 2024

Soustava lineárních rovnic

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Nalezení všech vzorů vektoru

Je dáno zobrazení $\mathbf{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Nalezněte všechny vektory, které se zobrazením $\mathbf{A}$ zobrazí na vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Výroba TNT

Vyčíslete chemickou rovnici pro výrobu trinitrotoluenu:

$$x\mathrm{C_7H_8} + y\mathrm{HNO_3} \rightarrow z\mathrm{C_7H_5O_6N_3} + w\mathrm{H_2O}$$

(Tento popis reakce toluenu a kyseliny dusičné je zjednodušený, nepokoušejte se o danou reakci doma.)

(Ne)lineární zobrazení

Která z následujících zobrazení $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jsou lineární?

1. $\mathbf{f}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{o}$.
3. $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = 4 \cdot \mathbf{u}$.
4. $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \|\mathbf{u}\| \cdot \mathbf{u}$, kde $\|\mathbf{u}\|$ je (eukleidovská) délka vektoru $\mathbf{u}$.
5. $\mathbf{f}(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.
6. $\mathbf{f}(\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2u_1 + u_2 \\ u_2 - u_1 \end{pmatrix}$.

Všechna zobrazení geometricky popište. U těch zobrazení, která jsou lineární, nalezněte jejich matice.

Lineární zobrazení

Zakreslete graficky chování lineárních zobrazeních zadaných maticemi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

1. Popište obrazy těchto zobrazení (nalezněte $\mathrm{im}(\mathbf{A})$ a $\mathrm{im}(\mathbf{B})$).
2. Popište jádra těchto zobrazení (nalezněte $\ker(\mathbf{A})$ a $\ker(\mathbf{B})$).
3. Jaké jsou hodnosti a defekty těchto zobrazení?
4. Nalezněte matice zobrazení $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ a $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$. Popište geometricky jejich chování.

Hodnost a defekt

Je možné, aby pro matici $\mathbf{M} : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^7$ platilo $\operatorname{def}(\mathbf{M}) = 4$ a $\operatorname{rank}(\mathbf{M}) = 3$? Pokud ano, nalezněte takovou matici. Pokud ne, vysvětlete.

Ať R, M a N jsou lineární zobrazení typu $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, která jsou definována následovně:

- $R(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2$, $R(\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1$.
- $M(\mathbf{e}_1) = -\mathbf{e}_1$, $R(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2$.
- $N(\mathbf{v}) = -\mathbf{v}$ pro všechna $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$.

Popište geometricky chování zobrazení

- R, R^2, R^{-1}
- M, M^2, M^{-1}
- N

Nalezněte matice zobrazení R, R^2, R^{-1}, M a N.
Popište geometricky chování zobrazení
$R \cdot M$, $M \cdot R$, $R \cdot N$, $N \cdot R$, $M \cdot N$, $N \cdot M$
Které z následujících rovností platí, a proč?
• $R^2 = N$ • $N^2 = \mathbf{id}_{\mathbb{R}^2}$ • $R^4 = \mathbf{id}_{\mathbb{R}^2}$ • $R^5 = R$ • $M^2 = \mathbf{id}_{\mathbb{R}^2}$
• $M^3 = M$ • $M \cdot N \cdot M = N$ • $N \cdot M \cdot N = R$