Řady

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$$

Nutná podmínka konvergence

$$|a_k| \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Leibniz 1: alternuje, $|a_k| \xrightarrow{k\to\infty} 0$, $(|a_k|)_{k=1}^{\infty}$ nerostoucí $\Big\}$ řada konverguje

Leibniz 2: $a_k = (-1)^{k-1} \cdot b_k$, $b_k \geq 0$, $b_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$, $(b_k)_{k=1}^{\infty}$, nerostoucí $\Big\}$ řada konverguje

---

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$$

$$a_k = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$$

$$|a_k| = \frac{1}{\sqrt{k}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

Leibniz 1:

- řada alternuje
- monotonie:

posl. $(\sqrt{k})_{k=1}^{\infty}$ je rostoucí

$\Rightarrow (|a_k|)_{k=1}^{\infty}$ je klesající (i nerostoucí)

Řada tedy konverguje.

Leibniz 2:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2-4k+5}$$

$$a_k = (-1)^k \cdot b_k$$

$$b_k = \frac{1}{k^2-4k+5} \geq 0 \ \forall k$$

$$b_k \xrightarrow{k\to\infty} ?$$

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^2-4k+5} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^2\left(1-\frac{4}{k}+\frac{5}{k^2}\right)} \longrightarrow 0$$

$\Rightarrow$ řada konverguje

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha}$$ v závislosti na $\alpha \in \mathbb{R}$

$$a_k = (-1)^{k-1}$$

$$b_k = \frac{1}{k^\alpha}$$

$\underline{\alpha > 0:}$

$b_k \xrightarrow{k\to\infty} 0$ (protože $k^\alpha \xrightarrow{k\to\infty} \infty$)

pro $\alpha > 0$ je k^α rostoucí.

tedy $(b_k)_{k=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{k^\alpha}\right)_{k=1}^{\infty}$ je klesající

$\overset{\text{Leibniz 2}}{\Rightarrow}$ Řada konverguje

$\underline{\alpha \leq 0}$

b_k nejde k $0 \overset{NPK}{\Rightarrow}$ řada nekonverguje

Integrální kritérium

$f(k) = |a_k|$, f nerostoucí na $\langle k_0, \infty)$, pak $\sum_{k=k_1}^{\infty} |a_k|$ konverguje

$\iff \int_{k_1}^{\infty} f(t)\,dt$ konverguje

Př.:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \dots$$

$a_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$

$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$

Monotonie:

$f'(t) = \left(t^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2} \cdot t^{-\frac{3}{2}}$

$\Rightarrow$ záporné $\Rightarrow f$ je klesající na $\langle 1; \infty)$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int_1^{\infty} t^{-\frac{1}{2}}\,dt = \left[\frac{t^{\frac{1}{2}}}{1/2}\right]_1^{\infty} = \infty$$

Integrál nekonverguje $\Rightarrow$ řada nekonverguje (ani absolutně)

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$ konverguje neabsolutně

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \ln k}$$

$a_k \geq 0 \Rightarrow |a_k| = a_k$

$$f(t) = \frac{1}{t \cdot \ln t}$$

$$f'(t) = \frac{-1(\ln t + t \cdot \frac{1}{t})}{(t \cdot \ln t)^2} = \frac{-\ln t + 1}{(t \cdot \ln t)^2} \geq 0 \text{ pro } \ln t \geq -1$$

$$t \geq e^{-1}$$

na $\langle 2; \infty)$ je f nerostoucí

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{t \cdot \ln t} \, dt = \int_2^{\infty} \frac{\frac{1}{t}}{\ln t} = \Big[\ln|\ln t|\Big]_2^{\infty} = \infty \cdot \ln(\ln 2) = \infty$$

Integrál nekonverguje $\Rightarrow$ řada nekonverguje

Podílové kritérium

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\lim_{k \to \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

Odmocninové kritérium

$$\lim_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

$< 1 \Rightarrow$ konverguje ABS

$= 1$ Nerozhodne

$> 1 \Rightarrow$ nekonverguje

Př.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$$

Podílové:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{k+1}{2^{k+1}} \cdot \frac{k}{2^k}\right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{2} \cdot \frac{k+1}{k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k}\right| < 1$$ Řada konv. absolutně

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k^9}$$

Podílové

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(-3)^{k+1}}{(k+1)^3} \cdot \frac{k^9}{(-3)^k}\right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left|(-3)\left(\frac{k}{k+1}\right)^9\right| = \lim_{k\to\infty} \left|(-3) \cdot \left(1+\frac{1}{k}\right)^9\right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} |-3 \cdot 1| = 3 > 1 \Rightarrow$$ řada nekonverguje

---

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{2^k}\right| = \frac{2}{k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 0 < 1 \Rightarrow$$ řada konverguje (ABS.)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-5)^k}{k^k}$$

Odmocninové

$$\sqrt[k]{\frac{(-5)^k}{k^k}} = \sqrt[k]{\frac{5^k}{k^k}} = \frac{5}{k} \xrightarrow{k\to\infty} 0 < 1$$

$\Rightarrow$ řada konv. absolutně

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$$

$$\lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!} =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{1} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\underbrace{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k}_{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k \to e}} = \frac{1}{e} < 1$$

$\Rightarrow$ řada konverguje (ABS.)