Řešení 1

1) Ne, neboť například polynom $p(x)=x$ neleží v $im(f)$. Tedy $im(f) \neq \mathbb{R}^{\leq 3}[x]$, a tedy f není epimorfismus.

2) Množina M je báze lin. prostoru L nad tělesem $\mathbb{F}$, pokud $span(M)=L$ a M je lineárně nezávislá, tj. $\forall \vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n \in M\ \forall a_1,\dots,a_n \in \mathbb{F}$: $\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \vec{x}_i = \vec{0} \Rightarrow a_1=a_2=\dots=a_n=0$.

3) Označme

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Chceme ověřit, že $A=T_{B\mapsto C}$.

1. způsob: Stačí ověřit, že sloupce A jsou tvořeny vektory $coord_C(b_i)$. To platí, neboť

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -1\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ a } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2\. způsob: Je snadné, že

$$T_{C\mapsto B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Z přednášky víme, že $T_{B\mapsto C} = (T_{C\mapsto B})^{-1}$. Stačí tedy ověřit, že $A = (T_{C\mapsto B})^{-1}$. To platí, neboť lze ověřit výpočtem, že

$$A . T_{C\mapsto B} = T_{C\mapsto B} . A = E_4.$$

Dále,

$$\mathrm{coord}_C\left(\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\right) = T_{B\mapsto C} . \mathrm{coord}_B\left(\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -2 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$