Teorie grafů

20. přednáška z LGR

Obsah

Barvení grafu

Definice

Nechť B je nějaká konečná množina (tzv. množina barev).
Obarvení vrcholů grafu $G = (V, E)$ je zobrazení $b\colon V \to B$ takové, že žádné dva vrcholy spojené hranou nemají stejnou barvu, tj. kdykoli je $e = \{u, v\} \in E$, pak $b(u) \neq b(v)$.

Poznámka

Budeme pracovat s neorientovanými obyčenými grafy, nicméně všechny výsledky jsou aplikovatelné na orientované grafy (při barvení vrcholů nezáleží na orientaci hran) a také pro grafy s paralelními hranami. Graf, který má smyčky, vrcholově obarvit nelze.

Barvení grafu

Definice

Nechť B je nějaká konečná množina (tzv. množina barev).
Obarvení vrcholů grafu $G = (V, E)$ je zobrazení $b\colon V \to B$ takové, že žádné dva vrcholy spojené hranou nemají stejnou barvu, tj. kdykoli je $e = \{u, v\} \in E$, pak $b(u) \neq b(v)$.

Poznámka

Budeme pracovat s neorientovanými obyčenými grafy, nicméně všechny výsledky jsou aplikovatelné na orientované grafy (při barvení vrcholů nezáleží na orientaci hran) a také pro grafy s paralelními hranami. Graf, který má smyčky, vrcholově obarvit nelze.

Barvení grafu

Definice

Graf $G = (V, E)$ je *k-barevný*, jestliže se dá obarvit k barvami, aneb existuje obarvení $b\colon V \to B$, kde $|B| = k$.

Někteří autoři též požadují, aby obarvení použilo všech k barev (zobrazení "na"), pak by graf musel mít aspoň k vrcholů.

Definice

Barevnost grafu G (též *chromatické číslo*) je nejmenší počet barev, které jsou potřeba k obarvení jeho vrcholů, tedy nejmenší k takové, že graf je k-barevný. Značí se $\chi(G)$.

Barvení grafu

Tvrzení

Úplný graf o n vrcholech má barevnost $\chi(K_n) = n$.

Definice

Množina vrcholů K grafu G se nazývá *klika* v grafu G, jestliže každé dva různé vrcholy z množiny K jsou spojeny hranou a navíc K je maximální podmnožina s touto vlastností.

Poznámky

Někdy se jako klika v grafu označuje maximální úplný podgraf, někdy jen množina vrcholů, která takový podgraf indukuje.

Maximální je míněno ve smyslu podgraf (či podmnožina), nikoli ve smyslu počtu prvků. V grafu mohou existovat kliky o různém počtu vrcholů.

Barvení grafu

Tvrzení

Úplný graf o n vrcholech má barevnost $\chi(K_n) = n$.

Definice

Množina vrcholů K grafu G se nazývá *klika* v grafu G, jestliže každé dva různé vrcholy z množiny K jsou spojeny hranou a navíc K je maximální podmnožina s touto vlastností.

Poznámky

Někdy se jako klika v grafu označuje maximální úplný podgraf, někdy jen množina vrcholů, která takový podgraf indukuje.

Maximální je míněno ve smyslu podgraf (či podmnožina), nikoli ve smyslu počtu prvků. V grafu mohou existovat kliky o různém počtu vrcholů.

Barvení grafu

Tvrzení

Úplný graf o n vrcholech má barevnost $\chi(K_n) = n$.

Definice

Množina vrcholů K grafu G se nazývá *klika* v grafu G, jestliže každé dva různé vrcholy z množiny K jsou spojeny hranou a navíc K je maximální podmnožina s touto vlastností.

Poznámky

Někdy se jako klika v grafu označuje maximální úplný podgraf, někdy jen množina vrcholů, která takový podgraf indukuje.

Maximální je míněno ve smyslu podgraf (či podmnožina), nikoli ve smyslu počtu prvků. V grafu mohou existovat kliky o různém počtu vrcholů.

Barvení grafu

Definice

Klikovost grafu G je počet vrcholů v nejpočetnější klice v grafu G, značí se $\omega(G)$.

Tvrzení

Pro libovolný graf G platí: $\omega(G) \leq \chi(G)$

Poznámka

Rovnost $\omega(G) = \chi(G)$ zdaleka nastat nemusí. Dokonce pro libovolné $k \geq 1$ existuje graf barevnosti $\chi(G) = k$, který neobsahuje trojúhelník K_3 (aneb $\omega(G) = 2$).

Barvení grafu

Definice

Klikovost grafu G je počet vrcholů v nejpočetnější klice v grafu G, značí se $\omega(G)$.

Tvrzení

Pro libovolný graf G platí: $\omega(G) \leq \chi(G)$

Poznámka

Rovnost $\omega(G) = \chi(G)$ zdaleka nastat nemusí. Dokonce pro libovolné $k \geq 1$ existuje graf barevnosti $\chi(G) = k$, který neobsahuje trojúhelník K_3 (aneb $\omega(G) = 2$).

Barvení grafu

Definice

Množina vrcholů M grafu G se nazývá *nezávislá množina* v grafu, jestliže žádné dva vrcholy z množiny M nejsou spojeny hranou. Je-li navíc M maximální podmnožina s touto vlastností, nazývá se *maximální nezávislá množina*.

Poznámky

Každá maximální nezávislá množina vrcholů indukuje maximální diskrétní podgraf, přitom v grafu mohou být maximální nezávislé množiny o různém počtu vrcholů.

Barvení grafu

Definice

Množina vrcholů M grafu G se nazývá *nezávislá množina* v grafu, jestliže žádné dva vrcholy z množiny M nejsou spojeny hranou. Je-li navíc M maximální podmnožina s touto vlastností, nazývá se *maximální nezávislá množina*.

Poznámky

Každá maximální nezávislá množina vrcholů indukuje maximální diskrétní podgraf, přitom v grafu mohou být maximální nezávislé množiny o různém počtu vrcholů.

Barvení grafu

Definice

Nezávislost grafu G je počet vrcholů v nejpočetnější (maximální) nezávislé množině vrcholů grafu G, značí se $\alpha(G)$.

Tvrzení

Pro libovolný graf G o n vrcholech platí:

1. $\alpha(G) \cdot \chi(G) \geq n$
2. $\alpha(G) + \chi(G) \leq n + 1$

Barvení grafu

Tvrzení

Graf je jednobarevný, právě když nemá žádnou hranu.

Tvrzení

Následující tvrzení pro graf G jsou ekvivalentní:

1. G je dvoubarevný
2. G je bipartitní
3. G neobsahuje kružnici liché délky

Barvení grafu

Algoritmus na barvení dvěma barvami

Vstup: (Neorientovaný) graf, který nemá kružnici liché délky.
Výstup: Obarvení grafu dvěma barvami $b : V \to \{A, B\}$.

Myšlenka algoritmu: Prohledáváme graf do šířky, kořen r každého stromu prohledávání obarvíme barvou A. Při zpracovávání hrany $e = \{v, w\}$ do nenavštíveného vrcholu obarvíme vrchol w opačnou barvou, než jakou má vrchol v.

Barvení grafu

Korektnost algoritmu

- Terminace - prohledávání do šířky skončí
- Parciální korektnost - hrany vpřed (stromové) barvíme správně, sudé hladiny stromů prohledávání mají barvu A, liché hladiny barvu B. Hrany zpět mohou u BFS pro neorientovaný graf vést buď do navštíveného vrcholu na další hladině (ten má opačnou barvu), nebo do navštíveného vrcholu na stejné hladině. To druhé by znamenalo existenci kružnice liché délky, takové hrany v našem grafu nejsou.

Algoritmus snadno pozná nepřípustné zadání - najde-li hranu do navštíveného vrcholu obarveného stejnou barvou.

Barvení grafu

Korektnost algoritmu

- Terminace - prohledávání do šířky skončí
- Parciální korektnost - hrany vpřed (stromové) barvíme správně, sudé hladiny stromů prohledávání mají barvu A, liché hladiny barvu B. Hrany zpět mohou u BFS pro neorientovaný graf vést buď do navštíveného vrcholu na další hladině (ten má opačnou barvu), nebo do navštíveného vrcholu na stejné hladině. To druhé by znamenalo existenci kružnice liché délky, takové hrany v našem grafu nejsou.

Algoritmus snadno pozná nepřípustné zadání - najde-li hranu do navštíveného vrcholu obarveného stejnou barvou.

Barvení grafu

Testování dvojbarevnosti grafu

Vstup: Nerientovaný graf $G = (V, E)$.
Výstup: Obarvení grafu dvěma barvami $b : V \to \{A, B\}$,
nebo hláška, že graf není dvojbarevný.

Datové struktury jako u prohledávání do šířky BFS:
Pole N délky $n = |V|$, kde $N(v) = true$, pokud byl vrchol v již navštíven. Pole P délky $m = |E|$, kde $P(e) = true$, pokud byla hrana e již použita.
Fronta Q již navštívených, ještě nezpracovaných vrcholů.

Barvení grafu

Testování dvojbarevnosti grafu

(inicializace)

- for all $v \in V$ do $N(v) \leftarrow \mathit{false}$ enddo
- for all $e \in E$ do $P(e) \leftarrow \mathit{false}$ enddo, $Q \leftarrow \emptyset$

(barvení)

- while 'existuje nenavštívený vrchol' do
  - $r \leftarrow v$, kde $N(v) = \mathit{false}$, $b(r) \leftarrow A$
  - BFS(r) s těmito úpravami při zpracovávání hrany $e = \{v, w\}$:
    - if $N(w) = \mathit{false}$
      - then (navíc) if $b(v) = A$ then $b(w) \leftarrow B$ else $b(w) \leftarrow A$ endif
      - else if $b(v) = b(w)$ then output "G není 2-barevný" and break
      - endif
  - enddo
- output $b(v)$ for all $v \in V$

Barvení grafu

Časová náročnost

Testování dvojbarevnosti grafu a případné obarvení dvěma barvami vyžaduje stejný čas jako prohledávání grafu do šířky, tedy čas $O(m+n)$, kde n je počet vrcholů a m je počet hran.

Poznámka

Pro testování $k-$barevnosti grafu pro $k \geq 3$ zatím není znám žádný polynomiální algoritmus a předpokládá se, že ani neexistuje. Horní odhad počtu barev pro daný graf může poskytnout následující algoritmus sekvenčního barvení.

Barvení grafu

Časová náročnost

Testování dvojbarevnosti grafu a případné obarvení dvěma barvami vyžaduje stejný čas jako prohledávání grafu do šířky, tedy čas $O(m+n)$, kde n je počet vrcholů a m je počet hran.

Poznámka

Pro testování $k-$barevnosti grafu pro $k \geq 3$ zatím není znám žádný polynomiální algoritmus a předpokládá se, že ani neexistuje. Horní odhad počtu barev pro daný graf může poskytnout následující algoritmus sekvenčního barvení.

Barvení grafu

Algoritmus sekvenčního barvení

Vrcholy grafu i barvy uspořádáme do posloupnosti (sekvence). Barvy budeme mít např. uspořádány podle abecedy.

Vstup: (Neorientovaný) graf s vrcholy $v_1, v_2, \ldots, v_n$.
Výstup: Obarvení grafu $b : V \to \{A, B, C, \ldots\}$.

Myšlenka algoritmu: Obarvujeme vrcholy postupně od v_1 do v_n, přičemž každému vrcholu v_i dáme tu nejmenší možnou barvu, tj. kterou nemá žádný jeho už obarvený soused.

Barvení grafu

Korektnost algoritmu

- Terminace - variant = počet obarvených vrcholů (v každém kroku obarvíme jeden další vrchol)
- Parciální korektnost - invariant = "b je obarvení podgrafu indukovaného již obarvenými vrcholy"

Tvrzení

Nechť $\Delta = \max\{d(v), v \in V\}$ je největší stupeň vrcholu grafu G. Pro barevnost grafu G platí: $\chi(G) \leq \Delta + 1$

Barvení grafu

Poznámka

Pokud algoritmus sekvenčního barvení nalezne obarvení k barvami, pak víme jen, že $\chi(G) \leq k$. Počet potřebných barev závisí na uspořádání vrcholů, doporučuje se uspořádat vrcholy podle stupňů sestupně, tedy začít barvit od vrcholů nejvyššího stupně. Ale ani tehdy nemusí být výsledné obarvení optimální.

Např. pro každé $k \geq 2$ lze najít takový strom a takové uspořádání jeho vrcholů, že sekvenční barvení bude potřebovat k barev (přestože strom je dvojbarevný).

Barvení grafu

Algoritmus sekvenčního barvení

Vstup: Nerientovaný graf $G = (V, E)$,
uspořádání jeho vrcholů $v_1, \dots, v_n$
a uspořádaná množina barev $B = \{b_1, \dots, b_k\}$,
kde $k = \max_{v \in V} d(v) + 1$.
Výstup: Obarvení grafu $b : V \to \{b_1, \dots, b_k\}$.

Datové struktury: Pole Z délky $n = |V|$ obsahující seznamy zakázaných barev.

Barvení grafu

Algoritmus sekvenčního barvení

(inicializace)

- for all $v \in V$ do $Z(v) \leftarrow \emptyset$ enddo

(barvení)

- for $i \leftarrow 1$ to n do
  - $b \leftarrow \min(B \setminus Z(v_i))$
  - $b(v_i) \leftarrow b$
  - for all $e = \{v_i, v_j\}$ do
    - if $i < j$ then $Z(v_j) \leftarrow Z(v_j) \cup \{b\}$ endif
    - enddo
  - enddo
- output $b(v)$ for all $v \in V$

Barvení grafu

Časová náročnost

Sekvenční barvení vyžaduje čas $O(n+m)$, kde n je počet vrcholů a m je počet hran.

Barvení grafu

Literatura

- J. Demel: Grafy a jejich aplikace, Academia, 2015.
- J. Matoušek, J. Nešetřil: Kapitoly z diskrétní matematiky, Nakladatelství Karolinum, 2000.
- M. Dostál: Cvičení k přednášce LGR (najdete v nich důkazy některých tvrzení z přednášky a mnoho dalších příkladů).