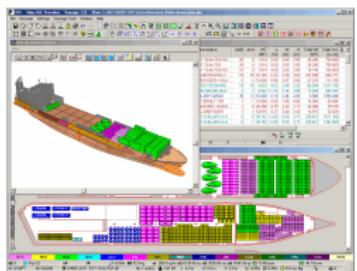
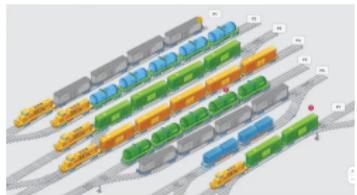


# Algoritmy a programování

## Stavový prostor a jeho prohledávání

```
270         childpos = rightpos
271     # Move the smaller child up.
272     heap[pos] = heap[childpos]
273     pos = childpos
274     childpos = 2*pos + 1
275     # The leaf at pos is empty now. Put newitem there, and bubble it up
276
277
278
279
280
281
282
283     # Follow the path to the root, moving parents down until finding a place
284     # newitem fits.
285     while pos > startpos: Vojtěch Vonásek
286         parentpos = (pos - 1) >> 1
287         parent = heap[parentpos]
288         if parent < newitem:
289             heap[pos] = parent
290             pos = parentpos
291             continue
292         break
293     heap[pos] = newitem
294
295 ✓ def _siftup_max(heap, pos):
296     'Maxheap variant of _siftup'
297     endpos = len(heap)
298     startpos = pos
299     newitem = heap[pos]
300     # Bubble up the larger child until hitting a leaf.
301     childpos = 2*pos + 1    # leftmost child position
302     while childpos < endpos:
```

- Mnoho praktických úloh lze řešit jako problém prohledávání
- Plánování akcí: stavebnictví, vykládka lodí, výrobní postupy
- Plánování pohybu v robotice
- Řešení hlavolamů a her, počítačové hry
- a mnoho dalších ...
- Typicky hledáme sekvenci akcí, které vedou do požadovaného cíle



# Stavový prostor

- $S$  je množina všech stavů
- $A$  je množina všech akcí
- $A(s)$ ,  $s \in S$  je množina akcí, které lze aplikovat ve stavu  $s$
- $E(s, a) \in S$ ,  $s \in S$ ,  $a \in A(s)$  je stav získaný aplikací akce  $a$  ve stavu  $s$
- $c(s, a)$ ,  $s \in S$ ,  $a \in A(s)$  je cena provedení akce  $a$  ve stavu  $s$
- Jako stavový prostor označujeme n-tici:  $(S, A, A(s), E(s, a), c(s, a))$

Poznámky:

- V ALP budeme uvažovat pouze diskrétní stavy a akce
- Reálné problémy (např. úlohy v robotice) vyžadují uvažování spojitéch akcí a stavových prostorů a dalších dovedností (např. uvažování nejistoty), viz předmět Autonomous Robotics — ARO (Mag. KyR)

- Počáteční stav  $s_0 \in S$
- Cílové stavy  $T \subseteq S$
- Přechodová funkce  $f : S \times A \rightarrow S$
- Úkolem je najít sekvenci akcí  $a_1, a_2, \dots, a_n, a_i \in A$ , tak, aby bylo dosaženo nějakého cílového stavu z  $T$
- Výsledkem hledání je též sekvence stavů  $s_1, s_2, \dots, s_n$  tak, že  $s_i = f(s_{i-1}, a_{i-1})$



## Patnáctka

- Úkolem je seřadit hrací kameny
- Dílkы lze posouvat do volného místa
- Stav: matice čísel,  $s = M_{i,j}$ ,  $i, j = 1, \dots, 3$
- Akce  $A = \{R, L, U, D\}$  (pohyb dílku do mezery vlevo, vpravo, nahoru, dolů)
- Ne vždy lze provést všechny akce

8		5
4	3	6
1	2	7

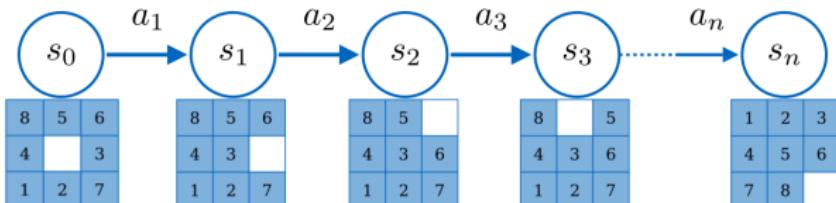
8	0	5
4	3	6
1	2	7

## Příklad sekvence

- Počáteční stav:  $s = [[8, 5, 6], [4, 0, 3], [1, 2, 7]]$
- Cílový stav:  $s = [[1, 2, 3], [4, 5, 6], [7, 8, 0]]$
- Akce:  $a_1 = L, a_2 = D, a_3 = R$

1	2	3
4	5	6
7	8	

Cílový stav



## Neinformované

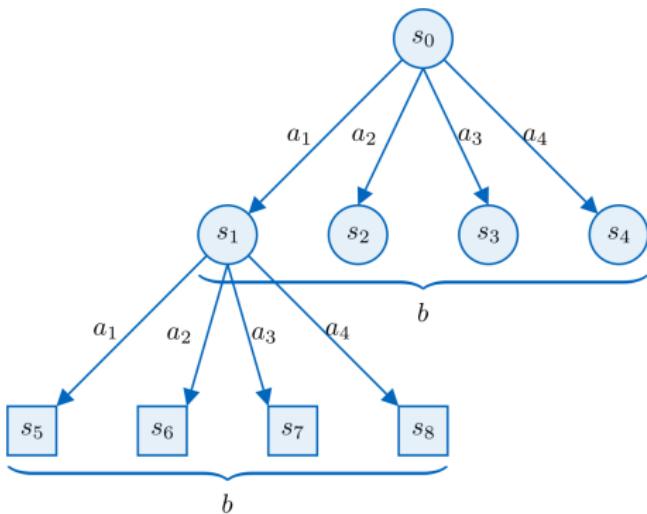
- Systematické prohledání celého prostoru
- Úkolem je najít cílový stav (a cestu do něj)
- Případně zjistit, jestli nějaký stav existuje
- Neznáme ohodnocení stavů (nevíme, v jakém pořadí je prohledávat)
- Například metody BFS, DFS

## Informované

- Známe ohodnocení stavů
- Přesné ohodnocení vs. heuristika
- Prohledáváme dle ohodnocení stavů (“lepší” stavy prohledáme dříve)
- Při vhodné ohodnocovací funkci (heuristicce) lze prohledání stavového prostoru významně urychlit
- Např. best-first search, beam-search, A\*

# Terminologie: strom prohledávání

- Zobrazení toho, jak algoritmy prohledávají stavový prostor
- Začínáme v počátečním stavu  $s_0$
- Expanze stavu  $s_0$ : aplikace všech přípustných akcí dostáváme potomky — stavy  $s_1, s_2, s_3$  a  $s_4$
- Na každý z nich můžeme aplikovat přípustné akce, atd. pro každý stav
- Například expanze  $s_1$  vede na stavy  $s_5, s_6, s_7$  a  $s_8$
- Stavy  $s_5, s_6, s_7$  a  $s_8$  jsou koncové
- Kolik akcí lze aplikovat (průměrně) — faktor větvení  $b$  (branching factor)



# Reprezentace stavu prohledání

- Ukládáme stav problému (pole, samostatné proměnné, obrázek, ...)
- Pozor: v Pythonu je vhodné kopírovat celý stav
- Vazbu na předchůdce ve stromu hledání + informaci o akci, která do stavu vedla
- Metody: expand(), isGoal()
- Pro uchování navštívených stavů použijeme \_\_repr\_\_()

```

1 import copy
2 class State:
3     def __init__(self, state, action = None, parent = None):
4         self.state = copy.deepcopy(state) # important to copy !!!!!
5         self.parent = parent #parent in the search tree
6         self.action = action #action to this state
7     def expand(self):
8         result = []
9         #algorithm returns list on new States, each points to
10        #'self' in their parent
11         return result
12     def isGoal():
13         #return true if self.state is goal
14         return False
15     def __repr__(self):
16         return str(self.state)

```

# Prohledávání do šířky

- Podobný princip jako BFS pro grafy
- Přechody mezi stavy jsou určeny přechodovou funkcí
- Prvky k prozkoumání jsou uloženy ve frontě

## BSF

- Vlož počáteční stav  $s_0$  do fronty, označ  $s_0$  jako navštívený
- Dokud není fronta prázdná:
  - $s_n =$  vyjmí prvek z fronty
  - Pokud  $s_n \in T$ , konec, vrat cestu z  $s_n$  do  $s_0$
  - Pro všechny akce  $a$ , které lze aplikovat ve stavu  $s_n$ :
    - $s = f(s_n, a)$  (aplikuj akci  $a$  na stav  $s_n$ )
    - Pokud není  $s$  navštívený, vlož ho do fronty a označ jako navštívený
- Pokud je fronta prázdná, řešení nebylo nalezeno

- Funkční implementace bude probrána na cvičeních

```
1 from stateNode import State
2 from queue import Queue
3 #pseudocode of BFS for state-space search
4 def bfs(start, goal):
5     q = Queue()
6     q.put( start )
7     known = {}
8     known[ str(start) ] = True
9     while not q.empty():
10         node = q.get()
11         if node.isGoal():
12             path = traverse(node)
13             return path[::-1]
14         for child in node.expand():
15             if not str(child) in known:
16                 known[n str(child) ] = True
17                 q.put( child )
18     return []
19
20 Start = State( [] ) #define start here
21 Goal = State( [] ) #define goal here
22 path = bfs(Start, Goal)
```

- Neinformované prohledávání
- V nejhorším případě musí navštívit všechny možné stavy  $n = |S|$
- Stavy k prohledání jsou ve frontě
- Velká paměťová náročnost  $\mathcal{O}(b^d)$ , maximálně  $\mathcal{O}(n)$
- Velká časová náročnost  $\mathcal{O}(b^d)$ , maximálně  $\mathcal{O}(n)$
- Vždy najde řešení (bez omezení hloubky)
- Vždy najde nejkratší řešení (z pohledu počtu akcí vedoucích ze startu do cíle)

# Prohledávání do hloubky

- Přechody mezi stavy jsou určeny přechodovou funkcí
- Prvky k prozkoumání jsou uloženy v zásobníku

## DFS

- Vlož počáteční stav  $s_0$  do zásobníku, označ  $s_0$  jako navštívený
- Dokud není zásobník prázdný:
  - $s_n =$  vyjmi prvek ze zásobníku
  - Pokud  $s_n \in T$ , konec, vrať cestu z  $s_n$  do  $s_0$
  - Pokud je  $s_n$  navštívený, pokračuj další iterací (continue)
  - Označ  $s_n$  jako navštívený
  - Pro všechny akce  $a$ , které lze aplikovat ve stavu  $s_n$ 
    - Aplikuj akci, vlož výsledný stav do zásobníku
- Pokud je zásobník prázdný, řešení nebylo nalezeno

## Implementace

- Stejně jako BFS na přechozích slidech, pouze nahradíme frontu zásobníkem

- Neinformované prohledávání
- Stavy k prohledání jsou v zásobníku
- Menší paměťová náročnost než u BFS —  $\mathcal{O}(d)$
- Časová náročnost:  $\mathcal{O}(b^d)$  pro hloubku  $d$  a větvení  $b$ 
  - Maximálně  $\mathcal{O}(n)$ ,  $n = |S|$  počet stavů
- Vhodné pokud kompletní změna stavu není jednoduchá (rychlá) — fyzické prohledávání
- Vždy najde řešení (bez omezení hloubky)
- Negarantuje nalezení nejkratšího řešení

## Varianty DFS

- Omezení maximální hloubky — negarantuje nalezení řešení, pokud je “za hloubkou” prohledání
- Pokud si nepamatujeme navštívené stavy, pak se algoritmus může zacyklit
  - To platí i pro BFS, pokud nepoužíváme paměť navštívených stavů

- Uvažujeme cenu (kvalitu) stavů
- Stavy čekající na zpracování organizujeme v prioritní frontě
- Časová a paměťová náročnost stejná jako u prohledávání do šířky
- Pokud nemáme přesné ohodnocení stavu, použijeme heuristiku

## Heuristika

- Aproximace ceny stavu pokud neznáme přesné ohodnocení
- Heuristika závisí na problému, který řešíme
- Musí být výpočetně jednoduchá, nenáhodná, konzistentní
- Příklad:
  - Hledání cesty v mřížce (gridu): Euklidovská vzdálenost do cíle

- Modifikace BFS/DFS
- Prvky ve frontě jsou seřazeny dle hodnoty stavu/heuristiky (tj. "nejslibnější" stavy jsou dříve)
- Efektivní reprezentace: prioritní fronta (viz další přednášky)
- Zbytek prohledání je stejný jako u BFS/DFS

## Implementace

- Kromě reprezentace stavů (třída State) potřebujeme heuristiku
- Funkce, která stavu přiřazuje číslo (např. čím lepší stav, tím menší číslo)

```
1 from stateNode import State
2 #pseudocode of best-first search (not effective way!)
3 #we mimick priority queue by sorting
4
5 def heuristic(state):
6     # heuristic for this state (better = lower value)
7     return 0
```

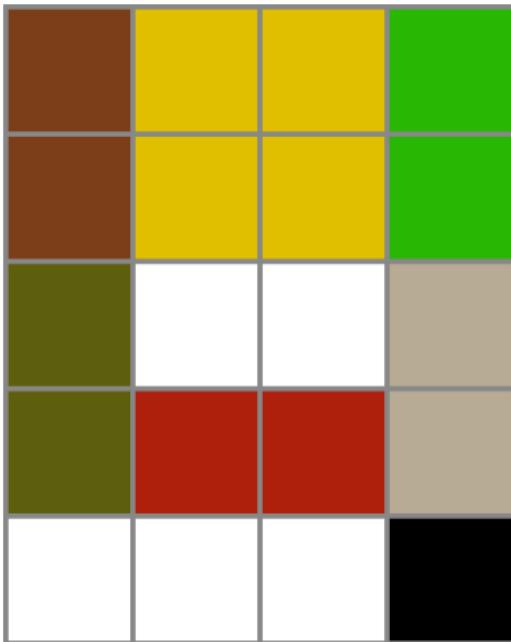
- Kostra implementace pro Python

```
1 def bestfs(start, goal):
2     queue = [ start ]
3     known = {}
4     known[ str(start) ] = True
5     while not q.empty():
6         node = queue.pop()
7         if node.isGoal():
8             path = traverse(node)
9             return path[::-1]
10    newItems = False
11    for child in node.expand():
12        if not str(child) in known:
13            known[n str(child) ] = True
14            queue.insert(0, child )
15            newItems = True
16    if newItems:
17        queue.sort(key=heuristic)
18    return []
19
20 Start = State( [] ) #define start here
21 Goal = State( [] ) #define goal here
22 path = bestfs(Start, Goal)
```

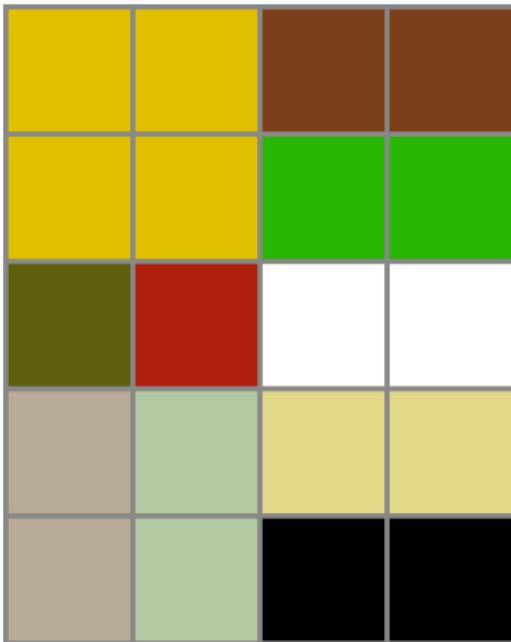
3		4	7
2	1	5	6
10	11	12	8
9	13	14	15

8	5	6
4		3
1	2	7

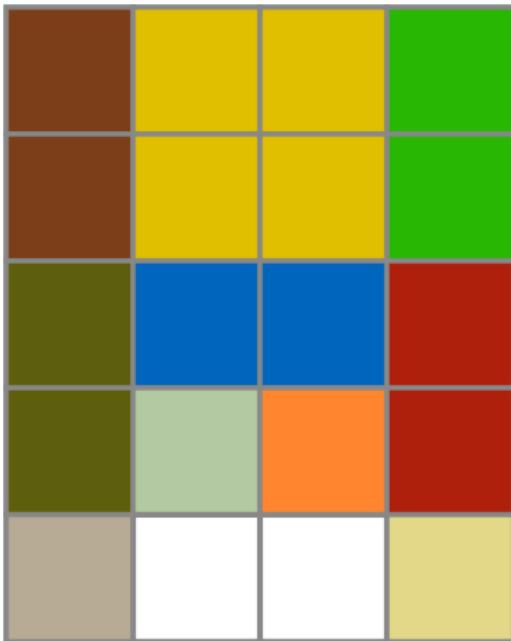
# Prohledávání stavového prostoru: hlavolamy



# Prohledávání stavového prostoru: hlavolamy



# Prohledávání stavového prostoru: hlavolamy



# Definice cílového stavu $T \subseteq S$

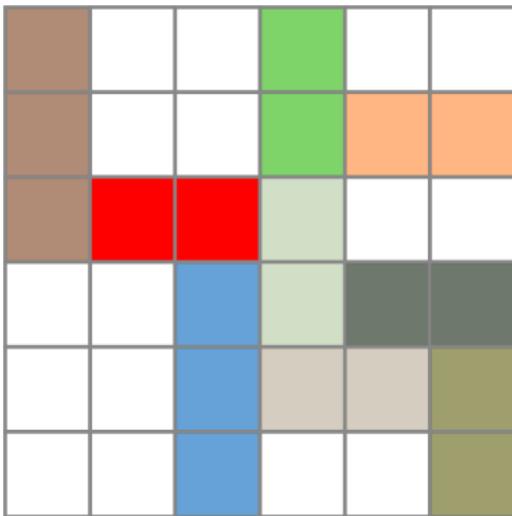
## Explicitně

- Cílový stav/stavy  $T \subseteq S$  jsou uvedeny explicitně (výčtem prvků)
- Například:
  - Koza/Vlk/Zelí: všechna zvířata jsou na druhém břehu
  - Patnáctka: Výsledné pořadí je  $1, 2, 3, \dots, 15$
  - Hledání cest v bludišti: cíl je  $(x, y)$
- Vhodné pro specifikaci heuristiky
- Dosažení cíle testujeme jako rovnost stavu a cílových stavů

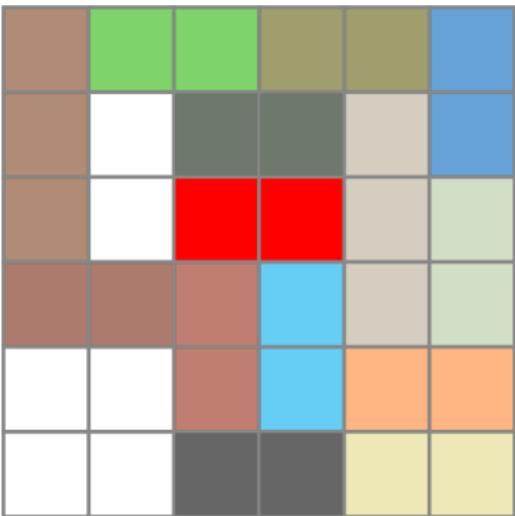
## Implicitně

- Cílová množina je zadána funkcí, např.  $f(s) = 0$  pokud  $s \in T \subseteq S$ 
  - Klotski: jakékoliv rozložení, kde žlutý kámen je uprostřed dole
  - Hive: jakákoliv situace, kde jedna ze včel je plně obklopena
- Neznáme, kolik stavů je cílových, jak jsou distribuovány
- Složitější na návrh heuristiky

# Prohledávání stavového prostoru: hlavolamy



# Prohledávání stavového prostoru: hlavolamy



# Prohledávání stavového prostoru her

- Teorie her — vědecká disciplína na pomezí matematiky, computer-science, kybernetiky, ekonomie, sociologie
- Studium (konfliktních) problémů, kde účastníci stojí proti sobě (soupeří)
- Řešení konfliktů ve společenosti, ekonomii, války
- Cílem je najít strategii pro jednotlivé hráče
- Nejznámější aplikace: řešení her — šachy, go, Othello, ...

## Typy her

- Dělíme podle toho, kolik informací víme (například o hrací desce, zdrojích protihráče, jeho zájmech)
- Náhodné vs. deterministické akce

	Akce	
	Deterministická	Náhodná
Úplná informace	šachy, othello, hive, go, ...	Vrháby, člověče nezlob se
Neúplná informace	lodě	bridge, poker, scrabble, válečné konflikty

# Předpoklady

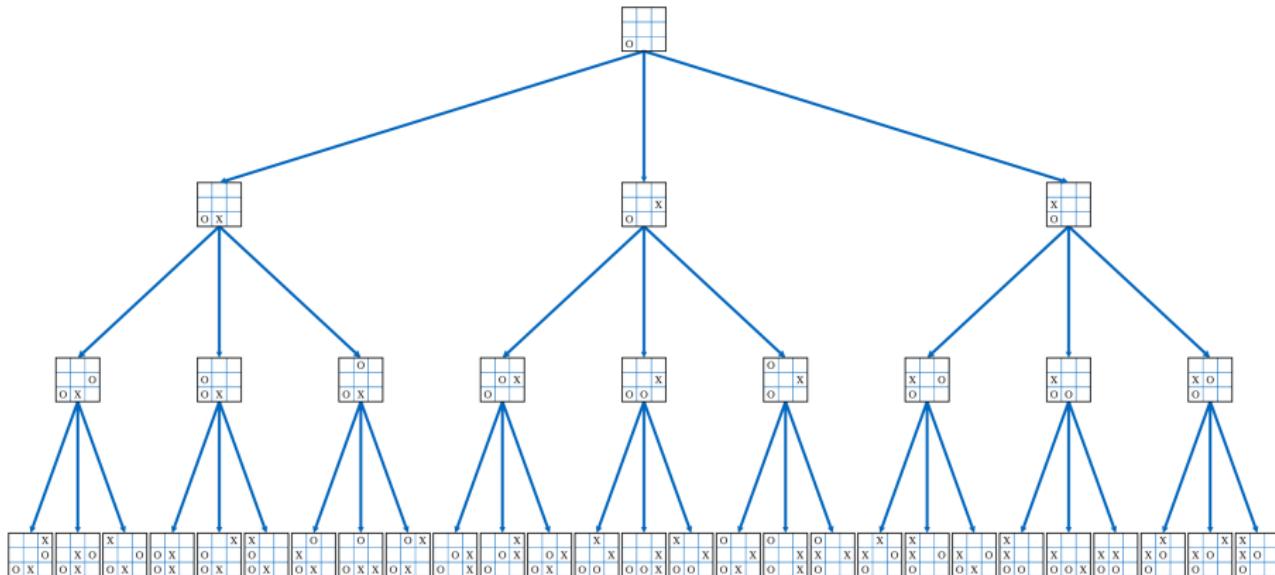
- Hra s nulovým součtem — zisk jednoho hráče je na úkor (ztráty) protihráče
- Deterministická hra s úplnou informací
- Hráči se střídají
- Hry dvou hráčů

## Co je cílem

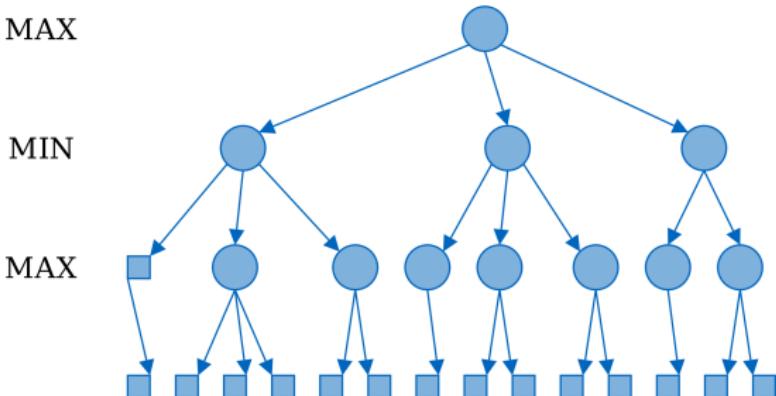
- Známe akce hráčů, známe stav hry (stavový prostor)
- Nyní se ve stavovém prostoru pohybují dva hráči a mají opačné zájmy
- Chceme najít strategii, tj. každému stavu  $s \in S$  přiřadit akci  $a \in A$  tak, aby to pro hráče na tahu bylo výhodné

# Minimax

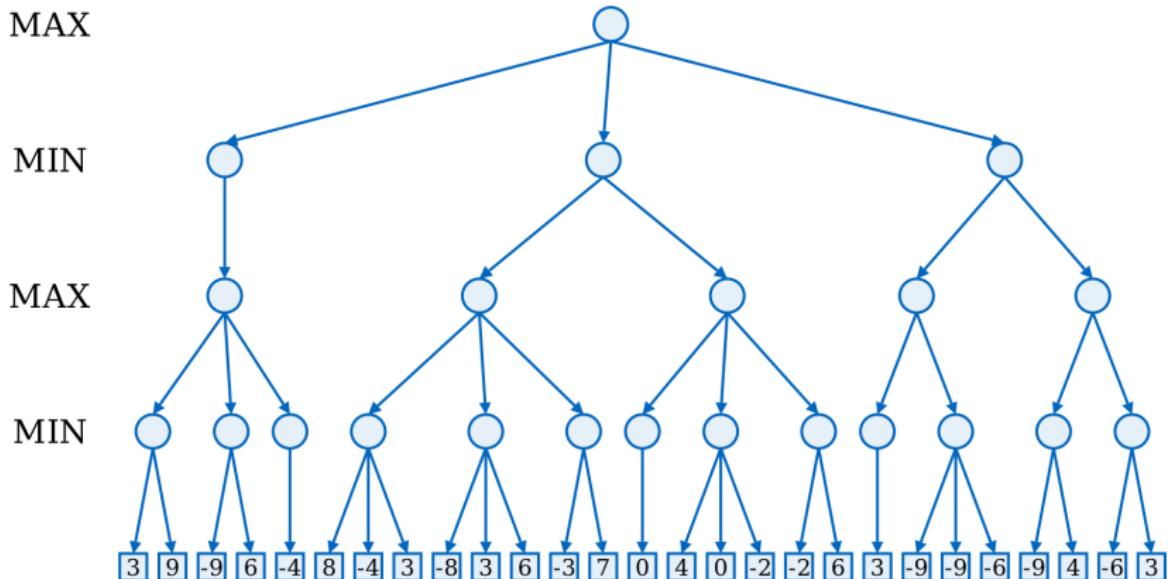
- Dva hráči — MIN a MAX (hráč MAX maximalizuje zisk a naopak)
- Začíná hráč MAX, hrají tak dlouho, až je hra u konce
- Hráči se střídají a společně prohledávají stavový prostor hry
- Minimax poskytuje tah pro hráče MAX, který maximalizuje zisk pro nejhorší možný případ



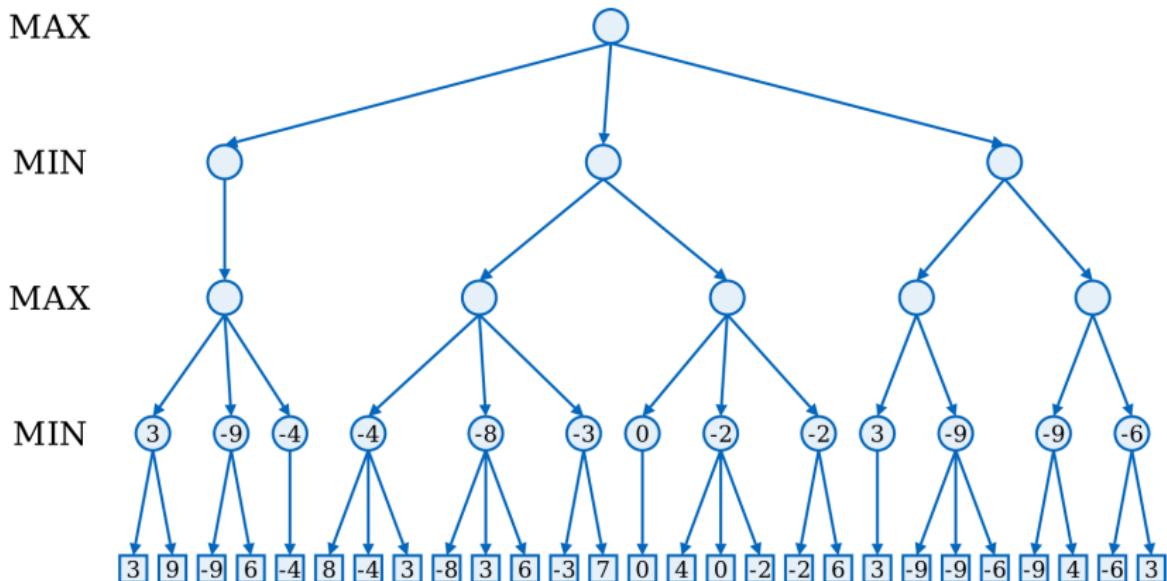
- Sestavit úplný strom hry od počátečního stavu až do každého koncového stavu
- Výpočet hodnoty koncových stavů (reward)
- Propagace hodnot z listů směrem k rodičům
  - Hodnoty stavů v MAX uzlech jsou maxima jejich následníků
  - Hodnoty stavů v MIN uzlech jsou minima jejich následníků
- Kořen je na úrovni MAX, tj. hráč MAX vybírá akci, která je maximum jeho potomků



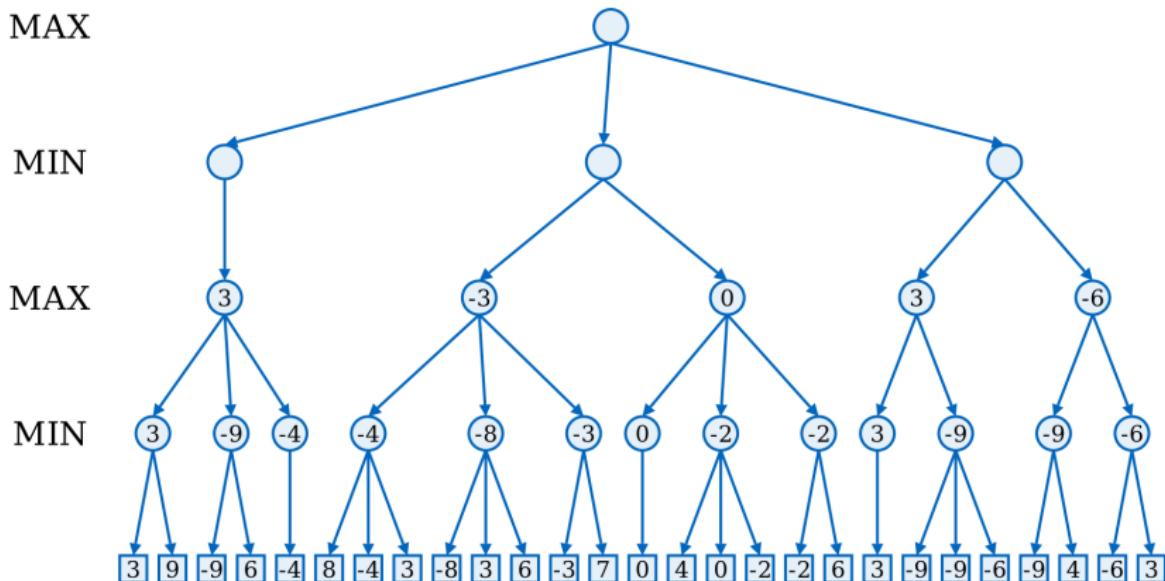
- Propagace hodnot z listů směrem k rodičům
  - Hodnoty stavů v MAX uzlech jsou maxima jejich následníků
  - Hodnoty stavů v MIN uzlech jsou minima jejich následníků



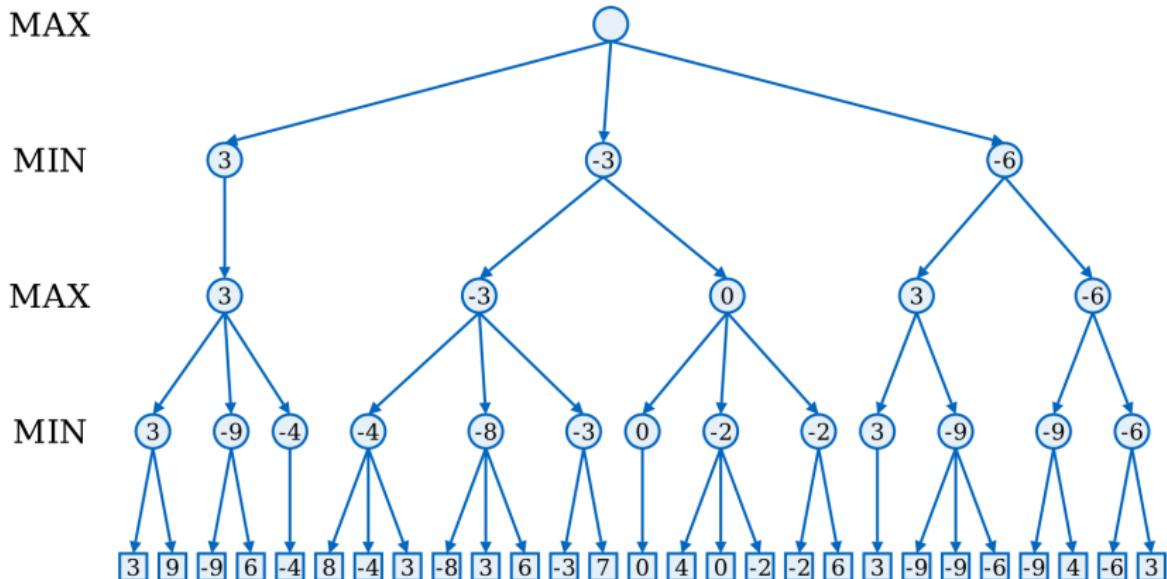
- Propagace hodnot z listů směrem k rodičům
  - Hodnoty stavů v MAX uzlech jsou maxima jejich následníků
  - Hodnoty stavů v MIN uzlech jsou minima jejich následníků



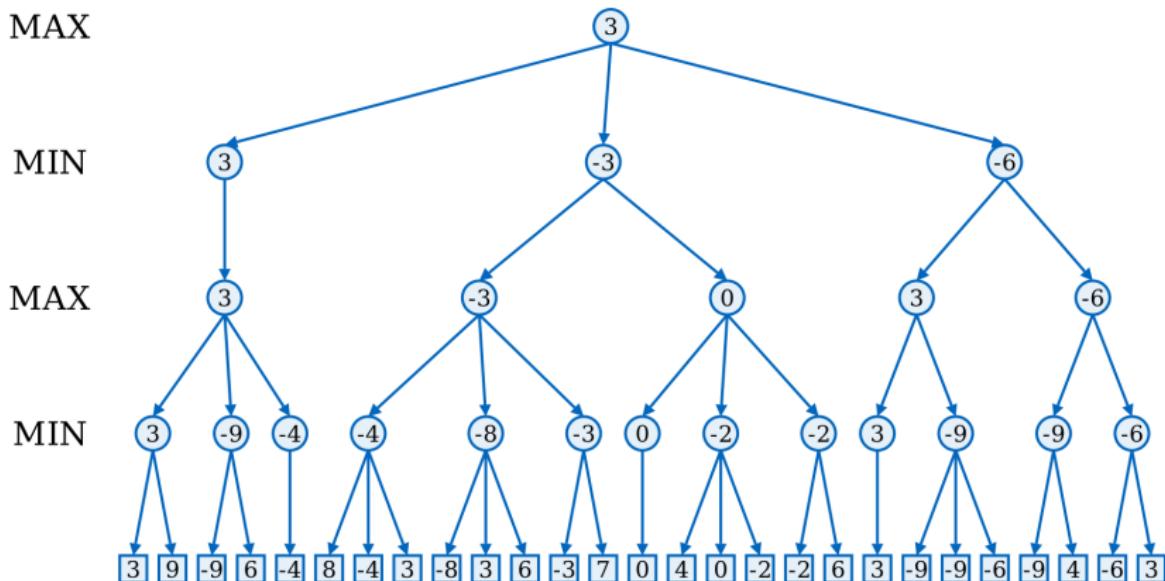
- Propagace hodnot z listů směrem k rodičům
  - Hodnoty stavů v MAX uzlech jsou maxima jejich následníků
  - Hodnoty stavů v MIN uzlech jsou minima jejich následníků



- Propagace hodnot z listů směrem k rodičům
  - Hodnoty stavů v MAX uzlech jsou maxima jejich následníků
  - Hodnoty stavů v MIN uzlech jsou minima jejich následníků



- Propagace hodnot z listů směrem k rodičům
  - Hodnoty stavů v MAX uzlech jsou maxima jejich následníků
  - Hodnoty stavů v MIN uzlech jsou minima jejich následníků



- Rekuzivní varianta Minimaxu

```
1 def minimax(state, depth, maximizingPlayer):
2     if depth == 0 or state.isGoal():
3         return state.heuristic()
4
5     if maximizingPlayer:
6         value = None
7         for child in state.expand():
8             childValue = minimax( child, depth-1, False)
9             if value == None or childValue > value:
10                 value = childValue
11
12     return value
13 else:
14     value = None
15     for child in state.expand():
16         childValue = minimax( child, depth-1, True)
17         if value == None or childValue < value:
18             value = childValue
19
20 return value
```

- Použití algoritmu Minimax pro MAX hráče
- Vyzkoušíme všechny akce v určeném stavu  $x$
- Na každý stav (akci) zavoláme Minimax pro MIN hráče
- Vybereme stav (akci) s nejvyšší hodnotou

```
1 def selectAction(state, depth):  
2     bestAction = None  
3     bestValue = None  
4     for child in state.expand():  
5         value = minimax(child, depth, False)  
6         if bestValue == None or value > bestValue:  
7             bestValue = value  
8             bestAction = child.action  
9     return bestAction, bestValue
```

- Pokud se stejné stavy objevují vícekrát, je dobré uchovávat si jejich hodnotu a při dalším vyhodnocení ji použít
- Vyšší paměťové nároky, v mnoha případech (např. šachy) není možné z důvodu paměti
- Řešení: použít hash stavu

# Minimax: vlastnosti

- Kompletní — vždy najde řešení (pro konečný strom)
- Optimální — pouze pokud MIN hráč hraje také optimálně
  - Musí používat stejné kritérium
- Pokud se strom staví rekurzivně nebo stylem DFS:
  - Časová složitost  $\mathcal{O}(b^d)$ , branching factor  $b$ , hloubka  $d$
  - Paměťová složitost  $\mathcal{O}(bd)$

## Příklady

- Piškvorky  $3 \times 3$ 
  - $b \sim 5$  (průměrně), celkově 9 tahů
  - $5^9 = 1\,953\,125$  stavů
  - Lze spočítat optimální řešení
- Šachy
  - $b \sim 35$  (průměrný branching factor)
  - $d \sim 80$  (průměrný počet tahů)<sup>1</sup>
  - $b^d \sim 3.53077 \cdot 10^{123}$  stavů
  - Nalézt optimální řešení je prakticky neupočitatelné

<sup>1</sup>velký rozptyl mezi hrami

# Heuristická funkce $h(x)$

- Odhad výhodnosti pozice (stavu hry  $x$ ) pro určeného hráče
- Lze zahrnout i odhad výhodnosti pozice pro protihráče, např.  $h(x) = f(\text{hráč},x) - f(\text{soupeř},x)$
- Statická heuristika — odhad pouze na základě stavu
- Výsledek je v rozsahu např.  $[-1, 1]$  (-1 určitě prohra, 1 určitě výhra)

## Příklady

- Reversi/Othello: počet bílých kamenů - počet černých kamenů
- Šachy: vážený součet hodnot figurek,  $f_i(x)$  je počet bílých figurek - počet černých figurek daného typu  $i$

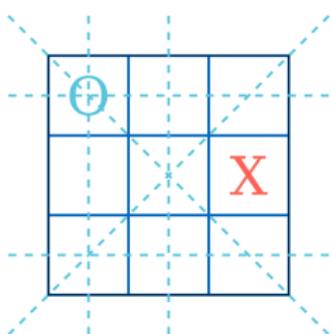
$$h(x) = \sum_{i=\{\text{dama,vez,strelce,kun,pesec}\}} w_i f_i(x)$$

	9		5		3		3		1
$w_i$									

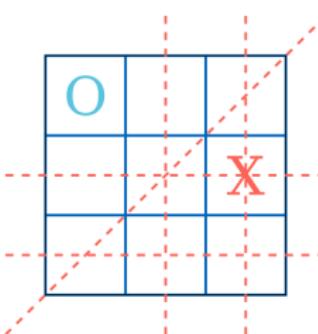
# Heuristická funkce $h(x)$

## Příklady

- Piškvorky:  $h(x)$  je rozdíl počtu možných výherních přímek



$O$  má celkem 6 možností



$X$  má celkem 5 možností

- Heuristika je  $h(x) = 6 - 5 = 1$  (výhoda pro hráče  $O$ )
- Tato heuristika nemá rozsah hodnot  $[-1, 1] \rightarrow +1$  neznamená určitou výhru

# Alfa-beta prořezávání

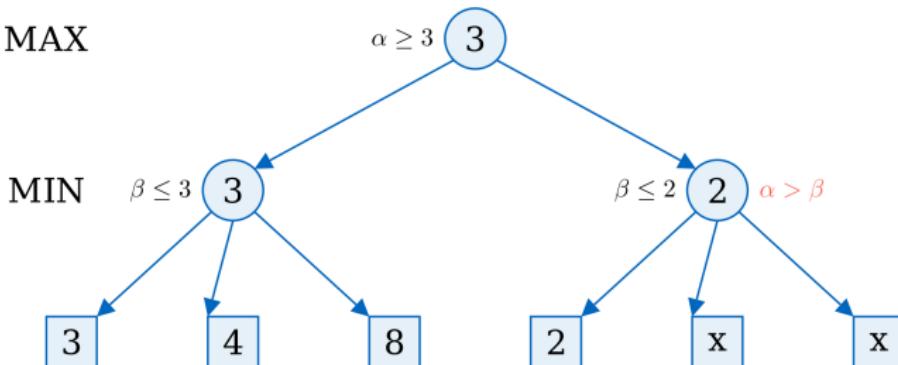
- Verze algoritmu Minimax
- Známe doposud nejlepší hodnotu  $\alpha$  pro hráče MAX, a doposud nejlepší hodnotu  $\beta$  pro MIN hráče.
- Tyto hodnoty předáváme do vyhodnocení potomků
- Odřízneme (tj. nevykonáme) vyhodnocení potomků, pokud  $\alpha \geq \beta$
- Nevykonávají se expanze uzlů v případě, že určitě máme lepší řešení

## Odhady $\alpha, \beta$

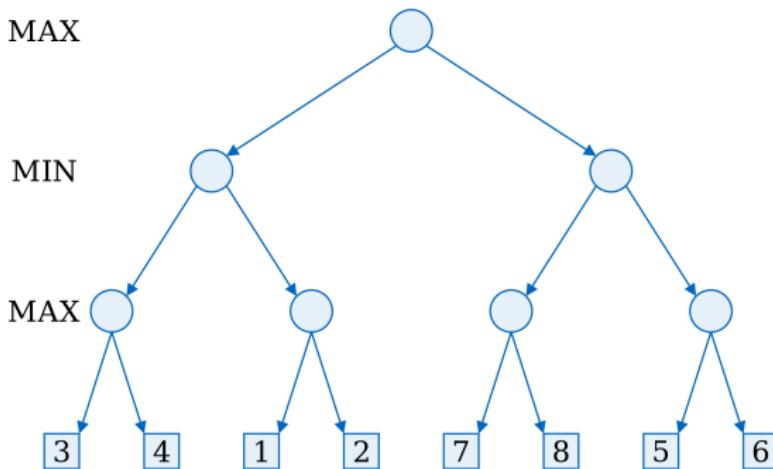
- $\alpha$  je nejvyšší hodnota pro MAX hráče na cestě z uzlu do jeho potomků
  - $\alpha$  se aktualizuje na úrovni MAX hráče
- $\beta$  je nejnižší hodnota pro MIN hráče na cestě z uzlu do jeho potomků
  - $\beta$  se aktualizuje na úrovni MIN hráče
- Na začátku je  $\alpha = -\infty$  a  $\beta = +\infty$

# Alfa-beta prořezávání

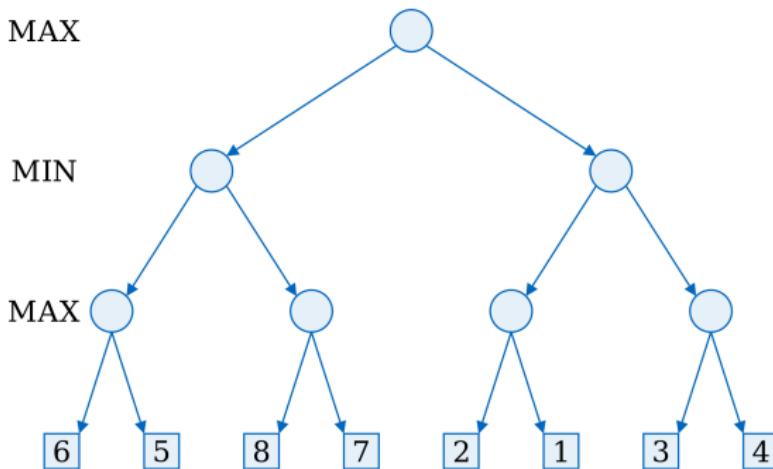
- Příklad prořezání uzelů "x" (nejsou vyhodnoceny)
- Nejlepší cena levého MIN potomka je 3 (určitě), nejlepší cena pravého MIN potomka je  $\leq 2$
- Je jedno, jestli ještě klesne cena pravého MIN potomka (pokud by byly vyhodnoceny stavy "x")
- Stavy "x" mohou zmenšit cenu pravého MIN potomka, ale
- Kořen na úrovni MAX stejně vybere levého MIN potomka bez ohledu na cenu uzelů "x"



- Uvažuje následující herní strom, pořadí vyhodnocení uzel je dáno DFS, na každé úrovni nejdříve zleva
- Které uzly budou (ne)vyhodnoceny v algoritmu Alfa-beta prořezávání?



- Uvažuje následující herní strom, pořadí vyhodnocení uzel je dáno DFS, na každé úrovni nejdříve zleva
- Které uzly budou (ne)vyhodnoceny v algoritmu Alfa-beta prořezávání?



- Kostra Alfa-beta prořezávání, volání stejně jako u klasického Minimaxu

```
1 def alphaBetaMinimax(node, depth, alpha, beta, isMax):
2     if depth == 0 or node.isGoal():
3         return node.h()
4     if isMax:
5         value = float("-inf")
6         for child in node.expand():
7             value = max( value, alphaBetaMinimax(child, depth-1,
8                         alpha, beta, False) )
9             if value > beta:
10                 break
11             alpha = max(alpha, value)
12     return value
13 else:
14     value = float("inf")
15     for child in node.expand():
16         value = min( value, alphaBetaMinimax(child, depth-1,
17                         alpha, beta, False) )
18         if value < alpha:
19             break
20             beta = min(beta, value)
21     return value
```

## Minimax vs. Alfa-beta prořezávání

- Klasický minimax prohledává celý herní strom
- Každá akce (uzel) může být výherní
- Uzly se prohledávají bez ohledu na to, jestli už je známé lepší řešení
- **Výsledek obou algoritmů je stejný**

## Nejhorší (worst-case)

- Stejná jako u klasického algoritmu Minimax
- Nastane pokud pořadí vyhodnocení akcí (stavů) neumožňuje prořezávání, tj. pokud horší akce (stavy) mají při vyhodnocení přednost

## Nejlepší případ (best-case)

- Nejlepší tah (akce) každého hráče je vyhodnocena jako první
- Prakticky se složitost Alfa-beta prořezávání blíží  $\mathcal{O}(b^{d/2})$
- tj. jako kdyby byl faktor větení  $\sqrt{b}$
- To umožňuje hlubší prohledávání za stejný čas →  $2d$

- Pořadí vyhodnocení akcí je velmi důležité, lepší akce (stavy) by měly být vyhodnoceny dříve
- Pro každý uzel lze provést plnou expanzi, vzniklé stavy seřadit, např. dle heuristiky
- Pamatovat si akce, které způsobily výhry v předchozích hrách
- Iterativní DFS
- Minimax + cutoff: ukončit prohledávání na základě heuristiky (pokud jsou uzly horší/lepší než ... )

- Iterative depth-first search (IDS)
- Varianta DFS, kdy je omezena hloubka prohledávání
- Poté, co je nalezeno nějaké řešení, spustí se IDS znova s větší hloubkou
- Pokud je limit na provedení tahu, pak se následující běhy IDS mohou ukončit a přesto existuje řešení z předchozího běhu