

Notas de Econometría

Pavel Solís
2025

6 Análisis de Regresión Múltiple: Cuestiones Prácticas

Temas importantes para aplicar RM en la práctica

6.1 Efecto del cambio de unidades de medición sobre estadísticos MCO

Las magnitudes de $\hat{\beta}_j$ se pueden cambiar al cambiar las unidades de medida de x_j

Ejemplo.

```
regress pesoslb alturapg edadmss
```

```
regress pesoskg alturapg edadmss
```

```
regress pesoslb alturapg edadans
```

```
regress pesoskg alturacm edadans
```

- Cambios porcentuales y elasticidades son invariantes a las unidades de medición de y o x_j
 - Cambiar las unidades de medición de la variable dependiente cuando aparece en logaritmo, no afecta a los estimados de las pendientes
$$\log(c_1 y_i) = \log(c_1) + \log(y_i) \forall c_1 > 0, \text{ y el nuevo intercepto será } \log(c_1) + \hat{\beta}_0$$
 - Cambiar las unidades de medición de cualquier variable independiente cuando aparece en logaritmo, solo afecta al intercepto

¿Cómo cambian los estadísticos t y F?

- Efectos de reescalar las variables dependiente e independientes:
 - Coeficientes, errores estándar, estadísticos t y F, intervalos de confianza cambian de forma que se preservan los efectos identificados y los resultados de las pruebas
- Llegamos a las mismas conclusiones sin importar cómo se midan las variables
- Razones (cosméticas):
 - Reducir el número de ceros después del punto decimal
 - Mejorar la apariencia de ecuaciones estimadas
 - Ej. Cantidades en pesos

6.1.1 Coeficientes beta

A veces una variable clave esta medida en una escala difícil de interpretar (ej. IQ)

- En esos casos, podemos preguntarnos el efecto cuando la variable es una desviación estándar más alta

Podemos obtener regresiones cuando todas las variables están estandarizadas

- *z-score*: A cada observación se le resta \bar{x} y se divide por su desviación estándar

\hat{b}_j son los coeficientes estandarizados o coeficientes beta

$$\hat{b}_j = \frac{\hat{\sigma}_j}{\hat{\sigma}_y} \beta_j \quad \forall j = 1, 2, \dots, k$$

- Medimos efectos en desviaciones estándar no en unidades originales de y y x_j
- Si x_j aumenta en 1 desviación estándar, \hat{y} cambia en \hat{b}_j desviaciones estándar
- \hat{b}_j de las variables independientes se pueden comparar
- Ej. Desempeño de un estudiante relativo al resto de la clase
- En Stata, regress $y \ x_1 \ x_2 \ x_3$, beta

6.2 Formas funcionales

Podemos emplear lo siguiente de forma aislada o conjunta

- Logaritmos
- Términos cuadráticos
- Interacciones

6.2.1 Formas funcionales logarítmicas

Ejemplo. Salario y estudios universitarios

$$\begin{aligned} \log(\text{precio}) &= \beta_0 + \beta_1 \log(\text{nox}) + \beta_2 \text{habit} + u \\ \widehat{\log(\text{precio})} &= \begin{array}{ccccc} 9.73 & - & 0.718 \log(\text{nox}) & + & 0.306 \text{habit} \\ (0.19) & & (0.066) & & (0.019) \end{array} \end{aligned}$$

$$n = 506, R^2 = 0.514$$

- ¿Cuánto baja el precio si nox aumenta 1%, fijando habit ?
- ¿Cuánto sube el precio si habit aumenta en 1, fijando nox ?
- La aproximación $\% \Delta x \approx 100 \times \Delta \log(x)$ aplica para cambios pequeños en x
 - Aproximación imprecisa cuando los cambios en x son grandes

Cálculo del cambio porcentual exacto

$$\% \Delta \hat{y} = 100 \left[\exp \left(\hat{\beta}_2 \Delta x_2 \right) - 1 \right]$$

- Recordatorio: $\% \Delta x = 100 \left(\frac{\Delta x}{x_0} \right) = 100 \left(\frac{x_1 - x_0}{x_0} \right)$

- Derivación:

$$\widehat{\log(y)} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \log(x_1) + \hat{\beta}_2 x_2 \implies \Delta \widehat{\log(y)} = \hat{\beta}_2 \Delta x_2 \text{ fijando } x_1$$

$$\Delta \log \left(\frac{\hat{y}_1}{\hat{y}_0} \right) = \hat{\beta}_2 \Delta x_2 \implies \frac{\hat{y}_1}{\hat{y}_0} = \exp \left(\hat{\beta}_2 \Delta x_2 \right) \implies \frac{\hat{y}_1}{\hat{y}_0} - 1 = \exp \left(\hat{\beta}_2 \Delta x_2 \right) - 1$$

Ejemplo (continuación)

- Si $\Delta x_2 = 1$,

$$\% \Delta \widehat{precio} = 100 [\exp(0.306) - 1] = 35.8\%$$

- Si $\Delta x_2 = -1$,

$$\% \Delta \widehat{precio} = 100 [\exp(-0.306) - 1] = -26.4\%$$

- $|-26.4\%| < \text{aproximación} < |35.8\%|$

- Ajuste no es crucial para cambios pequeños

Ejercicio. Calcula la aproximación y el cambio porcentual exacto si $\hat{\beta}_{stratio} = -0.052$ y $\Delta stratio = 1$ o $\Delta stratio = 5$

- $\log(x_j)$ captura rendimientos decrecientes de x_j sobre y

Razones para usar logaritmos:

- Interpretación útil de los coeficientes
- Coeficientes de pendiente invariantes ante reescalamiento
 - Ignoramos unidades de medición
- Cuando $y > 0$, variable dependiente $\log(y)$ satisface supuestos MLC más fácil que variable dependiente y
- Cuando $x > 0$, la distribución condicional tiende a ser heterocedástica o sesgada, $\log(y)$ mitiga ambas
- $\log(z)$ reduce rango de z (ventas, salario, población) y hace a MCO menos sensible a valores extremos
 - Cuidado: $\log(z)$ puede crear valores extremos si $0 < z < 1$ (es una proporción)

Usos comunes:

- En logaritmos: dinero, salario, ventas, población, empleados, alumnos
- En niveles:
 - Tiempo (educación, experiencia, antigüedad, edad)
 - Proporciones y porcentajes
 - * Para interpretar cambio en puntos porcentuales
 - * Cambios porcentuales con logaritmos

Limitante: Logaritmos no se puede usar si variable toma valores negativos o cero

- Cuando $z \geq 0$ con pocos 0's, podemos usar $\log(1 + z)$ con interpretación $\log(z)$
 - Considera que $\% \Delta z$ no está definido cuando $z_0 = 0$
 - Si hay muchos 0's, se pierden observaciones

Consideraciones:

- Si variable dependiente es $\log(y)$, usar función exponencial para predecir y
- R^2 no se pueden comparar entre y y $\log(y)$ porque la variación es diferente

6.2.2 Modelos con términos cuadráticos

Funciones cuadráticas se ocupan para capturar efectos marginales

- Decrecientes
- Crecientes

Si $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + u$,

$$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x + \hat{\beta}_2 x^2 + u \implies \Delta \hat{y} \approx (\hat{\beta}_1 + 2\hat{\beta}_2 x) \Delta x \implies \frac{\Delta \hat{y}}{\Delta x} \approx \hat{\beta}_1 + 2\hat{\beta}_2 x$$

- Pendiente estimada de la relación entre x y y (depende del valor de x): $\hat{\beta}_1 + 2\hat{\beta}_2 x$
- Resume el efecto de x sobre y
- En lugar de x también podemos sustituir media, mediana, cuartiles

El punto óptimo es:

$$x^* = \frac{-\hat{\beta}_1}{2\hat{\beta}_2}$$

- Es positivo si $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$ tienen signos opuestos
- Es negativo si $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$ tienen el mismo signo
- Si $\hat{\beta}_2 > 0$, efecto creciente en y y x^* es mínimo
- Si $\hat{\beta}_2 < 0$, efecto decreciente en y y x^* es máximo
- Si $x > 0$ y

- $\hat{\beta}_2 > 0$, $\min \mathbb{E}(y)$ cuando $x = 0$, aumentos en x tienen un efecto positivo y creciente en y
- $\hat{\beta}_2 < 0$, $\max \mathbb{E}(y)$ cuando $x = 0$, aumentos en x tienen un efecto negativo y decreciente en y

Con datos, se puede calcular x^* y ver si tiene sentido

Ejemplo. Salario y experiencia

$$\widehat{\text{salario}} = \begin{matrix} 3.73 \\ (0.35) \end{matrix} + \begin{matrix} 0.298 \text{ exper} \\ (0.091) \end{matrix} - \begin{matrix} 0.0061 \text{ exper}^2 \\ (0.0009) \end{matrix}$$

$$n = 526, \quad R^2 = 0.093$$

- ¿ x^* ?
- Cuando $x < x^*$, aumentos en x tienen un efecto positivo en y
- Cuando $x = x^*$, el rendimiento de la experiencia es 0
- Cuando $x > x^*$, aumentos en x tienen un efecto negativo en y

Significado de x^* :

- Pocas personas en la muestra con $\text{exper} > 24$, entonces parte $x > x^*$ se puede ignorar
- Tal vez rendimiento de exper sí es negativo en algún punto, pero no creíble que sea cuando $\text{exper} = 24$
- El efecto de exper sobre el salario está sesgado
 - Faltan controles
 - Forma funcional no es correcta
 - Ej. $\log(\text{salario}) \text{ exper } \text{exper}^2 \text{ educ}$ puede dar $x^* \approx 29$

Ejemplo. Efecto del número de habitaciones en el precio de casas

$$\widehat{\log(\text{precio})} = \begin{matrix} 13.39 \\ (0.57) \end{matrix} - \begin{matrix} 0.902 \log(\text{nox}) \\ (0.115) \end{matrix} - \begin{matrix} 0.87 \log(\text{dist}) \\ (0.043) \end{matrix}$$

$$- \begin{matrix} 0.545 \text{ habit} \\ (0.165) \end{matrix} + \begin{matrix} 0.062 \text{ habit}^2 \\ (0.013) \end{matrix} - \begin{matrix} 0.48 \text{ stratio} \\ (0.006) \end{matrix}$$

$$n = 506, \quad R^2 = 0.603$$

- ¿ t_{habit} es significativo?
- ¿ habit^* ?

- $x < x^*$ en solo 1% de observaciones, podemos ignorar esa parte
- Interpretación del efecto parcial de *habit* en el *precio*:

$$\Delta \log(\widehat{precio}) = [-0.545 + 2(0.062)habit]\Delta habit$$

$$\% \Delta \widehat{precio} = 100[-0.545 + 2(0.062)habit]\Delta habit$$

- Incremento de habit de 5 a 6 es 7.5%, de 6 a 7 es 19.9% y de 7 a 8 es 32.3%
- Fuerte efecto creciente
- Coeficiente de $\widehat{\beta}_2$ pequeño con grandes consecuencias ($2\widehat{\beta}_2$ no solo $\widehat{\beta}_2$)
- Se puede comparar efecto parcial contra $\widehat{\beta}_1$ cuando $\beta_2 = 0$

Ejemplo. Elasticidad no constante

$$\log(prc) = \beta_0 + \beta_1 \log(nox) + \beta_2 [\log(nox)]^2 + \beta_3 crimen + \beta_4 habit + \beta_5 habit^2 + \beta_6 stratio + u$$

- Si $\beta_2 = 0$, β_1 es elasticidad del *precio* con respecto a *nox*
- Si $\beta_2 \neq 0$, elasticidad del *precio* con respecto a *nox* depende de $\log(nox)$
- $\Delta \log(prc) \approx [\beta_1 + 2\beta_2 \log(nox)] \Delta \log(nox)$

$$\% \Delta prc \approx [\beta_1 + 2\beta_2 \log(nox)] \% \Delta nox$$

Se pueden tener otros términos polinomiales (aunque cuadrado es el más común)

- Ej. Función de costos total

$$costo = \beta_0 + \beta_1 cantidad + \beta_2 cantidad^2 + \beta_3 cantidad^3 + u$$

- No hay problema para estimarlo, se interpreta usando cálculo

6.2.3 Modelos con interacciones

Efecto parcial o (semi) elasticidad de la variable dependiente con respecto a una variable independiente puede depender de la magnitud de otra variable independiente

Ejemplo. Interacción en precios de casas

$$precio = \beta_0 + \beta_1 sqmts + \beta_2 habit + \beta_3 sqmts \cdot habit + u$$

- Efecto parcial de *habit* sobre *precio* (dejando otras variables fijas):

$$\frac{\Delta precio}{\Delta habit} = \beta_2 + \beta_3 sqmts$$

- Si $\beta_3 > 0$, una habitación extra incrementa más el precio de casas grandes

- Hay efecto interacción entre *sqmts* y *habit*
- Podemos probar diferentes hipótesis
 - $H_0 : \beta_3 = 0$
 - $H_0 : \beta_2 = 0, \beta_3 = 0$ (incluso si individuales no se rechazan)
- β_2 es efecto de *habit* en *precio* cuando $sqmts = 0$ (no es de interés)
 - Evaluar efecto parcial en valores relevantes de *sqmts*
 - * Media, mediana, cuantiles bajo y alto
 - Reparametrizar

Podemos reparametrizar modelo para que coeficientes en tengan significado útil

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_1 \cdot x_2 + u$$

- Usamos medias poblacionales de x_1 y x_2 : μ_1 y μ_2 (en la práctica, medias muestrales)

$$\begin{aligned} y &= \alpha_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \beta_3 (x_1 - \mu_1) \cdot (x_2 - \mu_2) + u \\ &= \alpha_0 + \delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \beta_3 (x_1 x_2 - x_1 \mu_2 - x_2 \mu_1 + \mu_1 \mu_2) + u \\ &= \underbrace{\alpha_0 + \beta_3 \mu_1 \mu_2}_{\beta_0} + \underbrace{(\delta_1 - \beta_3 \mu_2)}_{\beta_1} x_1 + \underbrace{(\delta_2 - \beta_3 \mu_1)}_{\beta_2} x_2 + \beta_3 x_1 x_2 + u \end{aligned}$$

- $\delta_2 = \beta_2 + \beta_3 \mu_1$: Efecto parcial de x_2 en y al valor medio de x_1
- Sustraer medias antes de definir la interacción
- Coeficientes de x_1 y x_2 tienen interpretación útil
 - Además, obtenemos errores estándar para el efecto parcial en el valor medio
- Podemos usar otros valores de interés (no solo μ_1 y μ_2)
 - Ej. Medianas

6.3 Bondad de ajuste y seleccion de regresores

Usar R^2 para escoger un conjunto de variables independientes no es recomendable

- Ej. Modelos sin sentido
- Ej. R^2 artificialmente alta

Un bajo poder explicativo ($R^2 \approx 0$) no tiene que ver con una estimación sesgada de β_j

- $R^2 \approx 0$ no implica que factores en u se correlacionan con variables independientes
- Falta de sesgo viene de RLM.4 no de R^2

Podemos tener estimados de efectos parciales precisos (sin n grande) aunque controlemos por pocos factores ($R^2 \approx 0$)

- Podemos contrarrestar una varianza del error grande con n grande

Lo que es útil es el cambio relativo en R^2 cuando agregamos variables en la ecuación

- Estadístico F usa R_r^2 y R_{sr}^2

$R^2 \approx 0$ implica que es difícil predecir y

6.3.1 R^2 ajustada (estadístico)

R^2 de la población: $\rho^2 = 1 - \frac{\sigma_u^2}{\sigma_y^2}$

- Hasta ahora $R^2 = 1 - \frac{SCR}{SCT} = 1 - \frac{SCR/n}{SCT/n}$
- Sabemos que SCR/n y SCT/n son estimadores sesgados de σ_u^2 y σ_y^2
- En ambos casos, podemos corregir por los grados de libertad

R^2 ajustada o \bar{R}^2 :

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{SCR/(n-k-1)}{SCT/(n-1)} = 1 - \frac{\hat{\sigma}^2}{SCT/(n-1)} = 1 - (1 - R^2) \left(\frac{n-1}{n-k-1} \right)$$

- Depende explícitamente de k
- No necesariamente es mejor estimador de ρ^2 que R^2
 - División de estimadores insesgados no es insesgada

Utilidad: Penaliza por agregar variables al modelo

- Si agregamos una variable al modelo,
 - SCR baja por lo que R^2 sube
 - SCR baja y $n-k-1$ baja por lo que $SCR/(n-k-1)$ puede subir o bajar

\bar{R}^2 da una respuesta distinta de pruebas t y F estándar porque \bar{R}^2 sube si y solo si

- $t > 1$ para nueva variable
- $F > 1$ para conjunto de nuevas variables

Con n pequeño y k grande, $\bar{R}^2 \ll R^2$

- Ej. $R^2 = 0.3$, $n = 51$, $k = 10 \implies \bar{R}^2 = 1 - 0.7(\frac{50}{40}) = 0.125$

Si $R^2 \approx 0$ y $n-k-1$ pequeño, $\bar{R}^2 < 0$

- Ej. $R^2 = 0.1$, $n = 51$, $k = 10 \implies \bar{R}^2 = 1 - 0.9(\frac{50}{40}) = -0.125$
 - Muy mal ajuste dados los grados de libertad

A veces se reportan R^2 y \bar{R}^2 , y a veces solo se reporta \bar{R}^2

- Para el estadístico F, se utiliza R^2 no \bar{R}^2

6.3.2 R^2 permite escoger entre modelos no anidados

Estadístico F solo nos permite probar modelos anidados

- Modelo restringido es caso especial del modelo no restringido

En modelos no anidados, ninguno es un caso especial del otro

Ejemplo. Como *hruns* y *carrbat* están altamente correlacionadas, podemos escoger entre

$$\log(salar) = \beta_0 + \beta_1 ansliga + \beta_2 promjueg + \beta_3 prombat + \beta_4 hruns + u \rightarrow \bar{R}^2 = 0.6211$$

$$\log(salar) = \beta_0 + \beta_1 ansliga + \beta_2 promjueg + \beta_3 prombat + \beta_5 carrbat + u \rightarrow \bar{R}^2 = 0.6226$$

- ¿Cuál escogemos?

Comparar \bar{R}^2 es útil para escoger entre diferentes conjuntos de variables independientes no anidadas cuando representan formas funcionales diferentes

Ejemplo.

$$investdes = \beta_0 + \beta_1 \log(ventas) + u$$

$$investdes = \beta_0 + \beta_1 ventas + \beta_2 ventas^2 + u$$

- Ambos modelos capturan rendimientos decrecientes
 - Uno con log y el otro con término cuadrático
- Primer modelo es más parsimonioso (menos parámetros)
 - R^2 : 0.061 vs 0.148
 - Injusto comparar R^2 's porque no penaliza modelos complicados
 - \bar{R}^2 : 0.030 vs 0.090

Limitación:

- \bar{R}^2 no sirve para escoger entre diferentes formas funcionales de variable dependiente
 - Porque explica variación de dos variables dependientes diferentes
 - Ej. y vs $\log(y)$, $\text{Var}[\log(y)] < \text{Var}(y)$ y $\bar{R}_{\log(y)}^2 > \bar{R}_y^2$
- En ese caso, usar significancia estadística de variable o interpretación de coeficientes

6.3.3 Controlar por muchos factores

Para no omitir factores importantes en un modelo sobre controlamos por muchas variables

- Porque pudieran correlacionarse con las variables independientes
- Pero al dar demasiado peso a R^2 o \bar{R}^2 podemos incluir factores que no deberíamos

Recordar interpretación ceteris paribus de RLM para evitar ese error

- No controlar por variable que necesitamos que cambie
 - Ej. Consumo de cerveza e impuesto alcohol
- No controlar por variable que es parte de y
 - Ej. Gasto en salud y visitas al doctor

La pregunta de investigación puede ayudar a decidir variables a incluir

- Diferentes modelos sirven diferentes objetivos
- Algunas variables independientes no se deberían incluir en el modelo
 - Aunque estén correlacionadas con y

6.3.4 Agregar regresores para reducir la varianza del error

Incluir una variable independiente puede tener efectos opuestos

- Exacerbar multicolinealidad
- Reducir varianza del error

En general, no sabemos qué efecto dominará, pero hay un caso que es claro:

- Siempre incluir variables independientes que
 - Afecten a y
 - No correlacionadas con la variable independiente de interés
- Razones:
 - No inducirán multicolinealidad
 - Reducirán la varianza del error
- Implicación: Estimadores más precisos para variable de interés
- Ej. Variable de interés se asigna aleatoriamente
 - $y = \text{calif}$, $x_1 = \text{beca}$, x 's: *prepa*, *admission*, *familia*
 - Estimador ya sería insesgado
 - Pero queremos que tenga menor varianza muestral
- Desafortunadamente, dichas variables no son fáciles de obtener en ciencias sociales