Notas de Econometría

Pavel Solís

2025

5 Análisis de Regresión Múltiple: Propiedades Asintóticas de MCO

Hasta ahora, propiedades de estimadores MCO exactas (de muestra finita o pequeña)

- Se cumplen para cada tamaño de muestra n ($n > k + 1$)
- RLM.1 a RLM.4: Falta de sesgo
- RLM.1 a RLM.5: MELI
- RLM.1 a RLM.6: $\widehat{\beta} \sim$ N, estadísticos t y F

Aquí, propiedades asintóticas (de muestra grande)

- No definidas para n particular sino conforme $n \to \infty$
- No necesitamos nuevos supuestos

Importante:

- Aún si no se cumple RLM.6, estadísticos t y F tienen distribuciones aprox. t y F

5.1 Consistencia

Falta de sesgo es importante pero no siempre se puede tener

- Ej. $\mathbb{E}(\widehat{\sigma}) \neq \sigma$

No todos los estimadores útiles son insesgados, pero requerimiento mínimo es consistencia

- Intuición: Distribución $\widehat{\beta}_j$ se colapsa en un punto β_j cuando $n \to \infty$

En la práctica n es fija, pero suponemos que $n \to \infty$ y que podemos obtener muchas muestras para cada n

Teorema.
Bajo supuestos RLM.1 a RLM.4, estimador MCO

$$\widehat{\beta}_j \text{ es consistente para } \beta_j, \quad \forall\ j_0, j_1, \ldots, j_k$$

- Si el error se correlaciona con cualquier variable independiente, estimador MCO es sesgado e inconsistente
- Cualquier sesgo persiste cuando $n \to \infty$

5.2 Normalidad asintótica e inferencia en muestras grandes

Consistencia es importante pero por si misma no permite hacer inferencia estadística

- Necesitamos la distribución muestral de los estimadores MCO

Normalidad exacta de $\widehat{\beta}_j$'s depende de normalidad del error u o de $y|\vec{x} \sim \mathrm{N}\left(\beta\vec{x},\, \sigma^2\right)$

- Inferencia exacta basada en estadísticos t y F requiere RLM.6

Cuando $y|\vec{x} \nsim \mathrm{N}\left(\beta\vec{x},\, \sigma^2\right)$, utilizamos el TLC para probar que $\widehat{\beta}_j$'s satisfacen normalidad asintótica (RLM.1 a RLM.5)

- $\widehat{\beta}_j$'s se distribuyen aproximadamente normal en muestras grandes (sin RLM.6)
- Sin importar distribución poblacional de u, $\widehat{\beta}_j$'s estandarizadas tienen distribución normal estándar aproximada
- Entonces, PH e IC los hacemos exactamente igual que bajo supuestos MLC
- Si n es grande, $g.l. = n - k - 1$ altos

$$\widehat{\mathrm{Var}\left(\widehat{\beta}_j\right)} = \frac{\widehat{\sigma}^2}{\mathrm{SCT}_j(1 - \mathrm{R}_j^2)} \to 0 \quad \text{cuando} \quad n \to \infty$$

- Aún requerimos RLM.4 y RLM.5
  - Si hay heterocedasticidad, los estadísticos t y F y los IC no son válidos

5.2.1 Estadístico del multiplicador de Lagrange (ML)

Prueba para muestras grandes por naturaleza asintótica del estadístico ML

- Estadísticos t y F tienen justificación en muestras grandes cuando no se supone normalidad.
- Estadístico ML es otra forma de probar varias restricciones de exclusión
- En muestras grandes, mismas conclusiones con pruebas F y ML

Bajo supuestos G-M (RLM.1 a RLM.5), q restricciones de exclusión

- $\mathrm{H}_0 : \beta_{k-q+1} = 0, \ldots, \beta_k = 0$
- $\mathrm{H}_\mathrm{a} : \mathrm{H}_0$ es falsa

Pasos:

1. Estimamos el modelo restringido y guardamos los residuales $\widetilde{u}$

$$y = \widetilde{\beta}_0 + \widetilde{\beta}_1 x_1 + \ldots + \widetilde{\beta}_{k-q} x_{k-q} + \widetilde{u}$$

2. Regresamos $\widetilde{u}$ sobre todas las variables independientes y obtenemos R_u^2
   - Regresión auxiliar para calcular el estadístico de prueba

- En principio, solo incluiríamos las excluidas pero están correlacionadas con las otras variables independientes (sino $\mathrm{R}_u^2 = 0$ por propiedades de MCO)
- $\mathrm{R}_u^2 \approx 0$ bajo H_0

3. Calculamos

$$\mathrm{ML} = n \cdot \mathrm{R}_u^2$$

4. Comparamos ML contra el valor crítico c_α apropiado de una distribución χ^2

   - En Stata
     - Valor crítico: display invchi2tail (g.l., α)
     - valor $-$ p: display chi2tail (g.l., valor del estadístico ML)
   - Rechazamos H_0 si $\mathrm{ML} > c_\alpha$

Nota: Se deben usar las mismas observaciones en los pasos 1 y 2

5.3 Eficiencia asintótica de MCO

Bajo supuestos G-M, los estimadores MCO son

- MELI
- Eficientes asintóticamente entre un conjunto de estimadores (varianza asintótica mínima) bajo homocedasticidad

5.4 Resumen

Bajo supuestos G-M, MCO son

- Consistentes
- Aproximadamente normales (sin requerir RLM.6)
  - Cuando $n \to \infty$, pruebas de hipótesis e intervalos de confianza como antes

Problemas que no se mitigan cuando $n \to \infty$

- Heterocedasticidad
- Variables dependientes no continuas