Содержание

Введение

1. Неприводимые подмодули в $S(2\,|\,1)$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2\,|\,\lambda_3)$ – полиномиальный вес и L_λ - неприводимый подмодуль (цоколь) костандартного модуля $V = \nabla(\lambda)$ со старшим весом λ. Запишем разность $\lambda_1 - \lambda_2 = pk + t$, где $0 \le t < p$.

Определение 1. *Назовем вес* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2\,|\,\lambda_3)$

– *регулярным, если* $(\lambda_1 + \lambda_3 + 1)(\lambda_2 + \lambda_3) \not\equiv 0 \pmod p$;

– *критическим, если* $\lambda_1 + \lambda_3 + 1 \equiv 0$, *но* $\lambda_2 + \lambda_3 \not\equiv 0 \pmod p$;

– *сильно критическим, если* $\lambda_2 + \lambda_3 \equiv 0 \pmod p$.

Обозначим $d = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}, y_1 = \frac{c_{22}c_{13} - c_{12}c_{23}}{d}, y_2 = \frac{-c_{21}c_{13} + c_{11}c_{23}}{d}$

Определим следующие элементы:

$$v_i = d^{\lambda_2} c_{11}^{\lambda_1 - \lambda_2 - i} c_{12}^i (c_{33}^{\lambda_3} - \lambda_3 c_{33}^{\lambda_3 - 1}(c_{31}y_1 + c_{32}y_2) + \lambda_3(\lambda_3 - 1)c_{33}^{\lambda_3 - 2} c_{31}y_1 c_{32}y_2)$$

веса $(\lambda_1 - i, \lambda_2 + i \mid \lambda_3)$,

$$w_i = d^{\lambda_2} c_{11}^{\lambda_1 - \lambda_2 - i} c_{12}^i (c_{33}^{\lambda_3} - \lambda_3 c_{33}^{\lambda_3 - 1} c_{32}y_2) y_1$$

веса $(\lambda_1 - i - 1, \lambda_2 + i \mid \lambda_3 + 1)$,

$$u_i = d^{\lambda_2} c_{11}^{\lambda_1 - \lambda_2 - i} c_{12}^i (c_{33}^{\lambda_3} - \lambda_3 c_{33}^{\lambda_3 - 1} c_{31}y_1) y_2$$

веса $(\lambda_1 - i, \lambda_2 + i - 1 \mid \lambda_3 + 1)$,

$$r_i = d^{\lambda_2} c_{11}^{\lambda_1 - \lambda_2 - i} c_{12}^i c_{33}^{\lambda_3} y_1 y_2$$

веса $(\lambda_1 - i - 1, \lambda_2 + i - 1 \mid \lambda_3 + 2)$. Они порождают $H^0(\lambda)$ как суперпространство для любого (не обязательно полиномиального) старшего веса λ.

Суперпроизводные ${}_{ij}D$ определяются следующим действием на элементах $A(2\,|\,1)$: $(c_{kl})_{ij}D = \delta_{li}c_{kl}$, где δ_{li} – символ Кронекера.

Обозначим через $\chi(\lambda)$ формальный характер простого модуля L_λ и через $p_j(x_1, x_2) = \sum\limits_{0 \le i \le j} x_1^i x_2^{j-i}$ полную симметрическую функцию от x_1, x_2 степени j.

Утверждение 1. *Пусть* $k = \sum\limits_{i=0}^{s} k_i p^i$.

(a) *Если* λ *- регулярный вес, то*

$$\chi(\lambda) = (x_1x_2)^{\lambda_2 - 1} x_3^{\lambda_3} p_t(x_1, x_2)[\,x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2\,] \prod_{i=0}^{s} p_{k_i}\ (x_1^{p^i}, x_2^{p^i})$$

и $\dim(L_\lambda) = 4....$

(b) *Если λ - критический вес, то*

$$\chi(\lambda) = (x_1x_2)^{\lambda_2-1}x_3^{\lambda_3}[\,p_t(x_1,x_2)x_1x_2 + p_{t+1}(x_1,x_2)x_3\,]\prod_{i=0}^{s} p_{k_i}\ (x_1^{p^i}, x_2^{p^i})$$

и $\dim(L_\lambda) = 4....$

(c) *Если λ - критический вес, то*

$$\chi(\lambda) = (x_1x_2)^{\lambda_2}x_3^{\lambda_3}[\,p_t(x_1,x_2) + p_{t-1}(x_1,x_2)x_3\,]\prod_{i=0}^{s} p_{k_i}\ (x_1^{p^i}, x_2^{p^i})$$

и $\dim(L_\lambda) = 4....$

Доказательство. TODO: привести теорему Стейнберга и пояснить, что произойдёт в нашем случае.

Сначала предположим, что $\lambda_2 > 0$. Тогда векторы v_i, w_i, u_i и r_i полиномиальны для $i = 0,\dots,\lambda_1-\lambda_2$ и образуют базис модуля $\nabla(\lambda)$.

TODO: объяснить, зачем нужны производные.

Вычислим v_i^{13D}. Запишем вспомогательные равенства, которые понадобятся далее:
$dy_1y_2 = \frac{(c_{22}c_{13}-c_{12}c_{23})(c_{11}c_{23}-c_{21}c_{13})}{d} = \frac{c_{22}c_{13}c_{11}c_{23}+c_{12}c_{23}c_{21}c_{13}}{d} = c_{13}c_{23}$,
$dc_{31}y_1c_{32}y_2 = -c_{31}c_{32}dy_1y_2 = -c_{31}c_{32}c_{13}c_{23} = c_{31}c_{13}c_{32}c_{23}$,
$c_{13}(c_{31}y_1 + c_{32}y_2) = \frac{c_{13}c_{31}(c_{22}c_{13}-c_{12}c_{23})+c_{13}c_{32}(c_{11}c_{23}-c_{21}c_{13})}{d} = \frac{-c_{13}c_{23}(c_{32}c_{11}-c_{31}c_{12})}{d} = c_{11}c_{32}y_2y_1 + c_{12}c_{31}y_1y_2$,
$c_{11}y_1 + c_{12}y_2 = \frac{c_{11}(c_{22}c_{13}-c_{12}c_{23})+c_{12}(c_{11}c_{23}-c_{21}c_{13})}{d} = \frac{c_{11}c_{22}c_{13}-c_{12}c_{21}c_{13}}{d} = c_{13}$.

Учитывая их, перепишем вектор v_i в виде
$v_i = d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i}c_{12}^{i}(c_{33}^{\lambda_3}d - \lambda_3c_{33}^{\lambda_3-1}(c_{31}dy_1 + c_{32}dy_2) + \lambda_3(\lambda_3-1)c_{33}^{\lambda_3-2}c_{31}c_{13}c_{32}c_{23})$.

$v_i^{13D} = d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i}c_{12}^{i}(c_{33}^{\lambda_3}y_1d - \lambda_3c_{33}^{\lambda_3-1}(-c_{33}dy_1 - 2c_{32}c_{13}c_{23}) - \lambda_3(\lambda_3-1)c_{33}^{\lambda_3-2}c_{33}c_{13}c_{32}c_{23}) + (\lambda_1-\lambda_2-i)d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i-1}c_{13}c_{12}^{i}(c_{33}^{\lambda_3}d - \lambda_3c_{33}^{\lambda_3-1}(c_{31}dy_1+c_{32}dy_2) + \lambda_3(\lambda_3-1)c_{33}^{\lambda_3-2}c_{31}c_{13}c_{32}c_{23}) + (\lambda_2-1)d^{\lambda_2-1}y_1c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i}c_{12}^{i}(c_{33}^{\lambda_3}d - \lambda_3c_{33}^{\lambda_3-1}(c_{31}dy_1 + c_{32}dy_2) + \lambda_3(\lambda_3-1)c_{33}^{\lambda_3-2}c_{31}c_{13}c_{32}c_{23}) = t_1 + t_2 + t_3 = (*)$

$t_1 = d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i}c_{12}^{i}(c_{33}^{\lambda_3}y_1d + \lambda_3c_{33}^{\lambda_3}dy_1 + 2\lambda_3c_{33}^{\lambda_3-1}c_{32}c_{13}c_{23} + \lambda_3(\lambda_3-1)c_{33}^{\lambda_3-1}c_{32}c_{13}c_{23}) = d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i}c_{12}^{i}((\lambda_3+1)c_{33}^{\lambda_3}y_1d - (\lambda_3+1)\lambda_3c_{33}^{\lambda_3-1}c_{32}c_{23}c_{13}) = (\lambda_3+1)w_i$

$t_3 = (\lambda_2-1)d^{\lambda_2-1}y_1c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i}c_{12}^{i}(c_{33}^{\lambda_3}d - \lambda_3c_{33}^{\lambda_3-1}c_{32}dy_2) = (\lambda_2-1)w_i$

$t_2 = (\lambda_1-\lambda_2-i)d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i-1}c_{12}^{i}(c_{33}^{\lambda_3}c_{13} - \lambda_3c_{33}^{\lambda_3-1}c_{13}(c_{31}y_1 + c_{32}y_2)) = (\lambda_1-\lambda_2-i)d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i-1}c_{12}^{i}c_{33}^{\lambda_3}c_{13} + (\lambda_1-\lambda_2-i)d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i}c_{12}^{i}(-\lambda_3c_{33}^{\lambda_3-1}c_{32}y_2y_1) + (\lambda_1-\lambda_2-i)d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i-1}c_{12}^{i+1}(-\lambda_3c_{33}^{\lambda_3-1}c_{32}y_1y_2) = (\lambda_1-\lambda_2-i)d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i-1}c_{12}^{i}c_{33}^{\lambda_3}c_{13} + (\lambda_1-\lambda_2-i)w_i - (\lambda_1-\lambda_2-i)d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i}c_{12}^{i}c_{33}^{\lambda_3}y_1 + (\lambda_1-\lambda_2-i)u_{i+1} - (\lambda_1-\lambda_2-i)d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i-1}c_{12}^{i+1}c_{33}^{\lambda_3}y_2 = (\lambda_1-\lambda_2-i)w_i + (\lambda_1-\lambda_2-i)u_{i+1} +$

$$(\lambda_1-\lambda_2-i)d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i-1}c_{12}^{i}c_{33}^{\lambda_3}(c_{13}-c_{11}y_1-c_{12}y_2)=(\lambda_1-\lambda_2-i)w_i+(\lambda_1-\lambda_2-i)u_{i+1}$$

$$(*)=(\lambda_3+1)w_i+(\lambda_2-1)w_i+(\lambda_1-\lambda_2-i)w_i+(\lambda_1-\lambda_2-i)u_{i+1}=(\lambda_1+\lambda_3-i)w_i+(\lambda_1-\lambda_2-i)u_{i+1}.$$

Аналогично вычисляются остальные производные.
$v_i^{12D}=(\lambda_1-\lambda_2-i)v_{i+1}$,
$v_i^{13D}=(\lambda_1+\lambda_3-i)w_i+(\lambda_1-\lambda_2-i)u_{i+1}$,
$v_i^{23D}=iw_{i-1}+(\lambda_2+\lambda_3+i)u_i$,
$v_i^{21D}=iv_{i-1}, v_i^{31D}=v_i^{32D}=0$

$w_i^{12D}=(\lambda_1-\lambda_2-i)w_{i+1}$,
$w_i^{13D}=(\lambda_1-\lambda_2-i)r_{i+1}$,
$w_i^{23D}=(\lambda_2+\lambda_3+i+1)r_i$,
$w_i^{21D}=-u_i-iw_{i-1}, w_i^{31D}=v_i, w_i^{32D}=0$,

$u_i^{12D}=-w_i+(\lambda_1-\lambda_2-i)u_{i+1}$,
$u_i^{13D}=(i-\lambda_1-\lambda_3-1)r_i$,
$u_i^{23D}=-ir_{i-1}$,
$u_i^{21D}=iu_{i-1}, u_i^{31D}=0, u_i^{32D}=v_i$,

$r_i^{12D}=(\lambda_1-\lambda_2-i)r_{i+1}$,
$r_i^{13D}=r_i^{23D}=0$,
$r_i^{21D}=ir_{i-1}, r_i^{31D}=-u_i, r_i^{32D}=w_i$.

Отсюда следует, что $v_0,\dots,v_t\in L_\lambda$, а поэтому v_i^{13D} и v_{i+1}^{23D} тоже принадлежат L_λ при $0\le i<t$. Для $0\le i<t$ представим v_i^{13D} и v_{i+1}^{23D} как линейную комбинацию векторов w_i, u_{i+1} подпространства с весом $(\lambda_1-i-1,\lambda_2+i\,|\,\lambda_3)$. Зависимость выражается матрицей

$$\begin{pmatrix}\lambda_1+\lambda_3-i & \lambda_1-\lambda_2-i\\ i+1 & \lambda_2+\lambda_3+i+1\end{pmatrix}.$$

Её определитель $\det\lambda=(\lambda_1+\lambda_3+1)(\lambda_2+\lambda_3)$.

(a) λ регулярный.

Так как $\det\lambda\not\equiv 0 \pmod p$, то $w_i, u_{i+1}\in L_\lambda$, а следовательно и $r_i\in L_\lambda$ для $0\le i<t$. Получаем, что $v_0,\dots,v_t,w_0,\dots,w_t,u_0,\dots,u_t,r_0,\dots,r_t$ составляют базис L_λ. Следовательно,

$$\chi(\lambda)=(x_1x_2)^{\lambda_2-1}x_3^{\lambda_3}p_t(x_1,x_2)[\,x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_3^2\,]$$

и $\dim(L_\lambda)=4(t+1)$.

(b) λ критический.

Так как $\lambda_2+\lambda_3 \not\equiv 0 \pmod p$ и $v_0^{23D} = (\lambda_2+\lambda_3)u_0$, то $u_0 \in L_\lambda$. Кроме того, $\lambda_1+\lambda_3-t \equiv \lambda_2+\lambda_3 \not\equiv 0 \pmod p$ и $v_t^{13D} = (\lambda_1+\lambda_3-t)w_t$, поэтому $w_t \in L_\lambda$.

v_i^{13D} и v_{i+1}^{23D} линейно зависимы, поэтому рассмотрим только $q_i = v_i^{13D} = -(i+1)w_i + (t-i)u_{i+1} \in L_\lambda$ при $0 \le i < t-1$.

Выясним, какие векторы порождаются векторами u_0, w_t и q_i:
$w_t^{12D} = (\lambda_1-\lambda_2-t)w_i = 0, w_t^{13D} = 0, w_t^{23D} = (\lambda_2+\lambda_3+t+1)r_i = (\lambda_1+\lambda_3+1)r_i = 0$,
$u_0^{12D} = -w_0 + (\lambda_1-\lambda_2)u_1 = q_0, u_0^{13D} = (-\lambda_1-\lambda_3-1)r_i = 0, u_0^{23D} = 0$,
$q_i^{12D} = -(i+1)(t-i)w_{i+1} + (t-i)(-w_{i+1} + (t-(i+1))u_{i+2} = (t-i)q_{i+1}$,
$q_i^{13D} = -(i+1)(t-i)r_{i+1} + (t-i)(i+1-\lambda_1-\lambda_3-1)r_{i+1} = (t-i)(-\lambda_1-\lambda_3-1)r_{i+1} = 0$,
$q_i^{23D} = -(i+1)(\lambda_2+\lambda_3+i+1) - (t-i)(i+1)r_i = -(i+1)(t+\lambda_2+\lambda_3+1)r_i = 0$. Таким образом, новые векторы не появляются, следовательно, векторы $v_0, \dots, v_t, u_0, w_t, q_0, \dots, q_{t-1}$ составляют базис L_λ. Учитывая, что вес q_i ссовпадает с весом w_i, получаем

$$\chi(\lambda) = (x_1x_2)^{\lambda_2-1}x_3^{\lambda_3}[\, p_t(x_1,x_2)x_1x_2 + p_{t+1}(x_1,x_2)x_3 \,]$$

и $\dim(L_\lambda) = 2t+3$.

(c) λ сильно критический.

Аналогично предыдущему пункту рассматриваем только $q_i = v_i^{13D} = (\lambda_1+\lambda_3-i)w_i + (t-i)u_{i+1} = (t-i)(w_i+u_{i+1}) \in L_\lambda$ при $0 \le i < t$.

$q_i^{12D} = (t-i)q_{i+1}, q_i^{13D} = 0, q_i^{23D} = 0$ при $0 \le i < t$. Кроме того, $v_0^{23D} = (\lambda_2+\lambda_3)u_0$ и $v_t^{13D} = (\lambda_1+\lambda_3-t)w_t = 0$, поэтому $u_0, w_t \notin L_\lambda$. Следовательно,

$$\chi(\lambda) = (x_1x_2)^{\lambda_2}x_3^{\lambda_3}[\, p_t(x_1,x_2) + p_{t-1}(x_1,x_2)x_3 \,]$$

и $\dim(L_\lambda) = 2t+1$.

□

2. Композиционные ряды костандартных модулей в $S(2\,|\,1)$