ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Институт математики и информационных технологий
Кафедра алгебры

Курсовая работа

Алгоритм вычисления формальных характеров неприводимых инъективных супермодулей над супералгеброй Шура $S(2\,|\,1)$

Выполнил:
студент группы МПС-703-О
специальности «Прикладная математика и информатика»
Уляшев П.А.

(подпись студента)

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Зубков А.Н.

(подпись руководителя)

Омск – 2011

Введение

В последнее время теория супералгебр Шура активно развивается, получены достаточно серьёзные теоретические результаты. Но в то же время большинство результатов получены для характеристики 0, а те же результаты для характеристики p либо оказываются гораздо сложнее, либо вообще не получены. И если теоретические результаты все же достаточно богаты, то практические примеры практически не исследовались. Так, должным образом на практике исследована только супералгебра Шура $S(1\,|\,1, r)$ – в самом простом её случае. В статье [1] исследуется супералгебра Шура $S(2\,|\,1, r)$, но были допущены ошибки и получены неверные результаты.

Целью настоящей работы является исправление статьи и получение некоторых других практических результатов.

Содержание

1. Предварительные сведения

1.1. Супераналоги алгебраических систем

Приведем определения супераналогов некоторых алгебраических систем, которые можно найти, например, в [2], [7], [5]. В общем случае суперизация достигается засчет введения $\mathbb{Z}_2$-градуировки, относительно которой все структурные функции однородны.

Определение 1. *Суперпространством над полем K называется векторное пространство V с разложением $V = V_0 \oplus V_1$. V_0 называется чётной частью V, V_1 – нечётной. Говорят, что элемент $v \in V$ является чётным, если $v \in V_0$, и нечетным, если $v \in V_1$.*

Определение 2. *Подсуперпространством V называется подпространство U такое, что $U = (U \cap V_0) \oplus (U \cap V_1)$.*

Если U – суперподпространство в V, то U и V/U являются суперпространствами.

Определение 3. *Супералгеброй называется ассоциативная алгебра A со структурой суперпространства $A = A_0 \oplus A_1$, при этом $\forall\, a, b \in A \quad |ab| = |a| + |b| \ (mod\, 2)$. Супералгебра называется коммутативной, если $\forall\, a, b \in A \quad ab = (-1)^{|a||b|}ba$.*

Здесь прямыми скобками обозначена четность соответствующего элемента. Суперподалгебра – подалгебра, одновременно являющаяся суперподпространством.

Определение 4. *Пусть A – супералгебра. Супермодулем называется A-модуль V, которые также является суперпространством, причем $\forall\ a \in A \quad \forall v \in V \quad |av| = |a| + |v| \pmod 2$.*

Определение 5. *Если V – суперпространство, то через V^c обозначим сопряжённое суперпространство с $V_0^c = V_1$, $V_1^c = V_0$. Полагаем по определению, что функтор смены чётности $V \to V^c$ сохраняет модульную или комодульную структуру на V.*

1.2. Общая линейная супергруппа

Обозначим через $E(m\,|\,n)$ суперпространство с базисом $e_1, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_{m+n}$ с чётной частью $e_1, \ldots, e_m$ и нечётной частью $e_{m+1}, \ldots, e_{m+n}$. Можно считать, что натуральным числам от 1 до $m+n$ приписана чётность по тому же правилу, то есть от 0 до m – чётные и от $m+1$ до $m+n$ – нечётные. Определим супералгебру $A(m\,|\,n)$ при помощи порождающих x_{ij} и определяющих соотношений $x_{ij}x_{kl} - (-1)^{|x_{ij}x_{kl}|}x_{kl}x_{ij} = 0$, где $|x_{ij} \equiv |i| + |j| \pmod 2$, $\quad 1 \leqslant i, j, k, l \leqslant m+n$. Алгебра A наделяется структурой супербиалгебры относительно коумножения, определенного на порождающих по правилу $\delta_A(x_{ij}) = \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant m+n} x_{ik} \otimes x_{kj}$. Коединица задается как $\epsilon_A(x_{ij}) = \delta_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant m+n$.

Произвольная однородная компонента $A(r) = A(m\,|\,n, r)$ является конечномерной суперкоалгеброй, а дуальное пространство $A(r)^*$ – супералгеброй, которая называется *супералгеброй Шура* и обозначается $S(m\,|\,n, r)$.

Матрицу из порождающих x_{ij} обозначим C. Её блоки размера $m \times m, m \times n, n \times m, n \times n$ обозначим соответственно $C_{11}, C_{12}, C_{21}, C_{22}$. Таким образом,

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}.$$

Локализуя $A(m\,|\,n)$ по чётному элементу $d = d_1 d_2$, $d_1 = det(X_{11})$, $d_2 = det(X_{22})$, получим супералгебру Хопфа, которая по определению является координатной алгеброй общей линейной супергруппы $GL(m\,|\,n)$, т.е. $A(m\,|\,n)_d = K[GL(m\,|\,n)]$.

$Gl(m\,|\,n)$ не является группой в обычном смысле, а является функтором, сопоставляющим произвольной коммутативной супералгебре A группу $GL(m\,|\,n)(A)$, состоящую из всех обратимых $(m+n) \times (m+n)$ матриц вида

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где $A_{11} \in GL(m)(A_0)$, $A_{22} \in GL(n)(A_0)$, а коэффициенты блоков A_{12}, A_{21} нечётны. Полная подкатегория однородных полиномиальных $GL(m\,|\,n)$-супермодулей степени r тождественна категории $S(m\,|\,n)$-супермодулей.

Суперпространство $E(m\,|\,n)$ превращается в $GL(m\,|\,n)$-супермодуль по правилу

$$\tau_{E(m\,|\,n)}(e_i) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m+n} e_k \otimes x_{ki}, \quad 1 \leqslant i \leqslant m+n.$$

1.3. Мультииндексы и веса

Определение 6. *Кортеж длины r $\;I = (i_1, \dots, i_r)$, где $i_k \in \{1, 2, \dots, m+n\}$, называется мультииндексом длины r. Множество всех мультииндексов обозначим $I(m\,|\,n, r)$. Весом мультииндекса I называется кортеж неотрицательных целых чисел $\lambda(I) = (\lambda_1, \dots, \lambda_{m+n})$, где $\lambda_j = |\{k \mid i_k = j\}|$. Очевидно, что $\sum \lambda_i = r$.*

Множество всех весов обозначим $\Lambda(r) = \Lambda(m\,|\,n, r)$. Ясно, что $\lambda(I) = \lambda(J) \iff I = J\pi$ для подходящей перестановки $\pi \in S_{m+n}$.
Для любых мультииндексов $I, J \in I(m\,|\,n, r)$ определим линейный функционал ξ_{IJ} в $S(r) = A(r)^*$, дуальный моному c_{IJ}. Поскольку $\xi_{II} = \xi_{I_\pi I_\pi}$, где $\pi \in S_{m+n}$, этот элемент однозначно определяется весом $\lambda = \lambda(I)$ и обозначается ξ_λ. На множестве весов $\Lambda(r)$ определим *доминантный* порядок по правилу $\mu \leq \lambda$, если $\sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant l} \mu_k \leq \sum\limits_{1 \leqslant k \leqslant l} \lambda_k, \quad 1 \leqslant l \leqslant m+n$.

Теорема 1. *Если V – простой $S(r)$-модуль, то найдется вес $\lambda \in \Lambda(r)$ такой, что V_λ – простой цоколь $B(r)^+$-модуля V. Для произвольного другого веса $\mu \neq \lambda$ из V_μ следует, что $\mu < \lambda$ относительно доминантного порядка.*

Вес, фигурирующий в теореме, и любой ненулевой вектор из V_λ называются *старшим весом* и *вектором* простого модуля V. Вес называется *допустимым*, если существует простой $S(r)$-модуль со старшим весом λ. Простые $S(r)$-модули определяются своими старшими весами однозначно. Поэтому простой модуль со старшим весом λ обозначим $L(\lambda)$. Подножество в $\Lambda(r)$, состоящее из всех допустимых весов, обозначим $\Lambda(r)^+ = \Lambda(m\,|\,n, r)^+$.

1.4. Подалгебры Бореля супералгебры Шура

Обозначим через $B(r)^+ = B(m\,|\,n, r)^+ \quad (B(r)^- = B(m\,|\,n, r)^-)$ верхнетреугольную (соответственно, нижнетреугольную) подалгебру Бореля в $S(r)$, порожденную (как векторное пространство) элементами ξ_{IJ}, где $I \leq J$ (соответственно $J \leq I$).

Теорема 2. *Супералгебра $S(r)$ совпадает с произведением своих подалгебр Бореля $B(r)^- B(r)^+$.*

Обозначим подпространство алгебры $B(r)^+$, порожденное элементами $\xi_{IJ}, I \leq J$, такими, что $i_k < j_k$ хотя бы длч одного номера k, через $N(m\,|\,n, r)^+ = N(r)^+$. Аналогично, только наоборот, для $N(m\,|\,n, r)^- = N(r)^-$.

Теорема 3. *Вес λ допустим тогда и только тогда, когда найдется $v \in I^\lambda(E)_\lambda\ 0$ такой, что $N(r)^+ v = 0$.*

2. Неприводимые подмодули в $S(2\,|\,1)$

2.1. Основные понятия и обозначения

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2\,|\,\lambda_3)$ – полиномиальный вес и L_λ - неприводимый подмодуль костандартного модуля $V = \nabla(\lambda)$ со старшим весом λ. Согласно [3], если вес λ является старшим весом L_λ, то либо $\lambda_2 > 0$, либо $\lambda_2 = 0$ и $p\,|\,\lambda_3$.

Определение 7. *Назовем вес* $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2\,|\,\lambda_3)$

– *регулярным, если* $(\lambda_1 + \lambda_3 + 1)(\lambda_2 + \lambda_3) \not\equiv 0 \pmod p$;

– *критическим, если* $\lambda_1 + \lambda_3 + 1 \equiv 0,$ *но* $\lambda_2 + \lambda_3 \not\equiv 0 \pmod p$;

– *сильно критическим, если* $\lambda_2 + \lambda_3 \equiv 0 \pmod p$.

Замечание 1. *Если* λ *– критический, то* $t \neq p-1$, *т.к. в противном случае* $\lambda_2 + \lambda_3 \equiv 0 \pmod{\ p}$.

Обозначим $d = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}, y_1 = \frac{c_{22}c_{13} - c_{12}c_{23}}{d}, y_2 = \frac{-c_{21}c_{13} + c_{11}c_{23}}{d}$

Определим следующие элементы:

$$v_i = d^{\lambda_2} c_{11}^{\lambda_1 - \lambda_2 - i} c_{12}^{i} (c_{33}^{\lambda_3} - \lambda_3 c_{33}^{\lambda_3 - 1}(c_{31}y_1 + c_{32}y_2) + \lambda_3(\lambda_3 - 1)c_{33}^{\lambda_3 - 2} c_{31}y_1c_{32}y_2)$$

веса $(\lambda_1 - i, \lambda_2 + i \mid \lambda_3)$,

$$w_i = d^{\lambda_2} c_{11}^{\lambda_1 - \lambda_2 - i} c_{12}^{i} (c_{33}^{\lambda_3} - \lambda_3 c_{33}^{\lambda_3 - 1} c_{32}y_2)y_1$$

веса $(\lambda_1 - i - 1, \lambda_2 + i \mid \lambda_3 + 1)$,

$$u_i = d^{\lambda_2} c_{11}^{\lambda_1 - \lambda_2 - i} c_{12}^{i} (c_{33}^{\lambda_3} - \lambda_3 c_{33}^{\lambda_3 - 1} c_{31}y_1)y_2$$

веса $(\lambda_1 - i, \lambda_2 + i - 1 \mid \lambda_3 + 1)$,

$$r_i = d^{\lambda_2} c_{11}^{\lambda_1 - \lambda_2 - i} c_{12}^{i} c_{33}^{\lambda_3} y_1 y_2$$

веса $(\lambda_1 - i - 1, \lambda_2 + i - 1 \mid \lambda_3 + 2)$. Они порождают $H^0(\lambda)$ как суперпространство для любого (не обязательно полиномиального) старшего веса λ. Обоснование можно найти в [7].

Суперпроизводные ${}_{ij}D$ определяются следующим действием на элементах $A(2\,|\,1)$: $(c_{kl})_{ij}D = \delta_{li}c_{kl}$, где δ_{li} – символ Кронекера.

Обозначим через $\chi(\lambda)$ формальный характер простого модуля L_λ и через $p_j(x_1, x_2) = \sum\limits_{0 \le i \le j} x_1^i x_2^{j-i}$ полную симметрическую функцию от x_1, x_2 степени j.

2.2. Теорема Стейнберга

Определение 8. *Вес* λ *называется* p*-ограниченным, если он является доминантным и* $\lambda_i - \lambda_{i+1} < p$ *для* $i = 1, \ldots, m-1$ *и* $i = m+1, \ldots, m+n-1$.

В нашем случае для веса $\mu = (\mu_1, \mu_2 \,|\, \mu_3)$ и p-ограниченность означает, что $\mu_1 - \mu_2 = t < p$. Запишем разность $\lambda_1 - \lambda_2 = t + pk$, где $0 \le t < p$, и выделим из веса λ p-ограниченную часть.

a) Если $\lambda_2 > 0$, то $\lambda_3 = p\lambda_3' + \lambda_3''$, где $\lambda_3'' < p$, и

$$(\lambda_1, \lambda_2 \,|\, \lambda_3) = (t + \lambda_2, \lambda_2 \,|\, \lambda_3'') + p(k, 0 \,|\, \lambda_3').$$

b) Если $\lambda_2 = 0$, то $\lambda_3 = p\lambda_3'$ и

$$(\lambda_1, \lambda_2 \,|\, \lambda_3) = (t, 0 \,|\, 0) + p(k, 0 \,|\, \lambda_3').$$

Заметим, что для если вес λ является регулярным (критическим, сильно критическим), то p-ограниченная часть также будет регулярной (критической, сильно критической).

Обозначим через $M^{[p]}$ скручивание Фробениуса модуля M. Подробное описание можно найти в [2], [4]. Для нас важным является то, что скуручивание Фробениуса действует на элементы модуля M возведением в p-ю степень. Таким образом, если $\chi(M) = \sum \dim V_\lambda \, t^\lambda$, то $\chi(M^{[p]}) = \sum \dim V_\lambda \, t^{p\lambda}$.

Теорема 4. *(Стейнберг).*
Для p-ограниченного веса λ и доминантного веса μ

$$L(\lambda + p\mu) \cong L(\lambda) \otimes L_{ev}(\mu)^{[p]},$$

где $L_{ev}(\mu)$ – неприводимый $GL(m) \times GL(n)$-супермодуль старшего веса μ.

$L_{ev}(\mu) = L_{ev}(\mu_+) \otimes L_{ev}(\mu_-)$, т.е. в нашем случае $L_{ev}(\mu) = L_{ev}(k, 0) \otimes L_{ev}(\lambda_3')$

Следствие 1. *В условиях теоремы Стейнберга*

$$\chi(\lambda + p\mu) = \chi(\lambda) \, \chi(L_{ev}(\mu_+)^{[p]}) \, \chi(L_{ev}(\mu_-)^{[p]}).$$

2.3. Вычисление формальных характеров

Сначала вычислим общую часть формального характера для случаев $\lambda_2 > 0$ и $\lambda_2 = 0$, т.е. $\chi(L_{ev}(k, 0 \,|\, \lambda_3)^{[p]})$.

Лемма 1. *Если $k < p$, то $L_{ev}(k, 0) = p_k(x_1, x_2)$.*

Доказательство. Для вычисления формального характера $L_{ev}(k, 0)$ нужно найти его базис.

Обозначим $v_i = c_{11}^{k-i} c_{12}^{i}$. Очевидно, $L_{ev}(k, 0)$ порождается старшим вектором $v_0 = c_{11}^k$ веса $(k, 0)$ Поскольку $v_i^{{}_{12}D} = (k - i)v_{i+1}$, а $v_i^{{}_{11}D} = iv_{i-1}$, то базис $L_{ev}(k, 0)$ составляют векторы $v_0, \ldots, v_k$. Следовательно, $\chi(L_{ev}(k, 0)) = \sum\limits_{i=0}^{k} x_1^{k-i} x_2^i = p_k(x_1, x_2)$. $\square$

Лемма 2. *$\chi(L_{ev}(k,0\,|\,\lambda_3)^{[p]}) = x^{p\lambda_3}\prod_{i=0}^{s} p_{k_i}\ (x_1^{p^{i+1}}, x_2^{p^{i+1}})$, где $k=\sum_{i=0}^{s} k_i p^i$.*

Доказательство. $L_{ev}(\lambda_3)$ – одномерный модуль, порожденный элементом c_{33}, поэтому $\chi(L_{ev}(\lambda_3)) = x^{\lambda_3}$. Следовательно $\chi(L_{ev}(\lambda_3)^{[p]}) = x^{p\lambda_3}$.

Пусть $k = \sum_{i=0}^{s} k_i p^i$. Тогда $L_{ev}(k,0) \cong \bigotimes_{i=0}^{s} L_{ev}(k_i,0)^{p_i}$, следовательно, $\chi(L_{ev}(k,0)) = \prod_{i=0}^{s} \chi(L_{ev}(k_i,0)^{p_i}$. Тогда по предыдущей лемме $\chi(L_{ev}(k,0)) = \prod_{i=0}^{s} p_{k_i}\ (x_1^{p^i}, x_2^{p^i})$,

$$\chi(L_{ev}(k,0)^{[p]}) = \prod_{i=0}^{s} p_{k_i}\ (x_1^{p^{i+1}}, x_2^{p^{i+1}}).$$

Осталось только перемножить $\chi(L_{ev}(k,0)^{[p]})$ и $\chi(L_{ev}(\lambda_3)^{[p]})$. □

Утверждение 1. *Пусть $k=\sum_{i=0}^{s} k_i p^i$. Обозначим $t_k = (k_0+1)\dots(k_s+1)$.*

(a) *Если λ - регулярный вес, то*

$$\chi(\lambda) = (x_1x_2)^{\lambda_2-1}x_3^{\lambda_3}p_t(x_1,x_2)[\,x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_3^2\,]\prod_{i=0}^{s} p_{k_i}\ (x_1^{p^{i+1}}, x_2^{p^{i+1}})$$

и $\dim(L_\lambda) = 4(t+1)t_k$.

(b) *Если λ - критический вес, то*

$$\chi(\lambda) = (x_1x_2)^{\lambda_2-1}x_3^{\lambda_3}[\,p_t(x_1,x_2)x_1x_2 + p_{t+1}(x_1,x_2)x_3\,]\prod_{i=0}^{s} p_{k_i}\ (x_1^{p^{i+1}}, x_2^{p^{i+1}})$$

и $\dim(L_\lambda) = (2t+3)t_k$.

(c) *Если λ - критический вес, то*

$$\chi(\lambda) = (x_1x_2)^{\lambda_2}x_3^{\lambda_3}[\,p_t(x_1,x_2) + p_{t-1}(x_1,x_2)x_3\,]\prod_{i=0}^{s} p_{k_i}\ (x_1^{p^{i+1}}, x_2^{p^{i+1}})$$

и $\dim(L_\lambda) = (2t+1)t_k$.

Для доказательства достаточно доказать утверждение для p-ограниченной части.

Лемма 3. *Пусть $\lambda = (t+\lambda_2, \lambda_2\,|\,\lambda_3)$, $\quad 0 \le t < p$.*

(a) *Если λ - регулярный вес, то*

$$\chi(\lambda) = (x_1x_2)^{\lambda_2-1}x_3^{\lambda_3}p_t(x_1,x_2)[\,x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3+x_3^2\,]$$

и $\dim(L_\lambda) = 4(t+1)t_k$.

(b) *Если λ - критический вес, то*

$$\chi(\lambda)=(x_1x_2)^{\lambda_2-1}x_3^{\lambda_3}[\,p_t(x_1,x_2)x_1x_2+p_{t+1}(x_1,x_2)x_3\,]$$

и $\dim(L_\lambda)=(2t+3)t_k$.

(c) *Если λ - критический вес, то*

$$\chi(\lambda)=(x_1x_2)^{\lambda_2}x_3^{\lambda_3}[\,p_t(x_1,x_2)+p_{t-1}(x_1,x_2)x_3\,]$$

и $\dim(L_\lambda)=(2t+1)t_k$.

Доказательство. $\lambda_2>0$. Тогда векторы v_i,w_i,u_i и r_i полиномиальны для $i=0,\dots,\lambda_1-\lambda_2$ и образуют базис модуля $\nabla(\lambda)$. Базис L_λ составляют векторы, порожденные из старшего вектора суперпроизводными ${}_{12}D,_{13}D,_{23}D$.

Вычислим $v_i^{_{13}D}$. Запишем вспомогательные равенства, которые понадобятся далее:
$dy_1y_2=\frac{(c_{22}c_{13}-c_{12}c_{23})(c_{11}c_{23}-c_{21}c_{13})}{d}=\frac{c_{22}c_{13}c_{11}c_{23}+c_{12}c_{23}c_{21}c_{13}}{d}=c_{13}c_{23}$,
$dc_{31}y_1c_{32}y_2=-c_{31}c_{32}dy_1y_2=-c_{31}c_{32}c_{13}c_{23}=c_{31}c_{13}c_{32}c_{23}$,
$c_{13}(c_{31}y_1+c_{32}y_2)=\frac{c_{13}c_{31}(c_{22}c_{13}-c_{12}c_{23})+c_{13}c_{32}(c_{11}c_{23}-c_{21}c_{13})}{d}=\frac{-c_{13}c_{23}(c_{32}c_{11}-c_{31}c_{12})}{d}=c_{11}c_{32}y_2y_1+c_{12}c_{31}y_1y_2$,
$c_{11}y_1+c_{12}y_2=\frac{c_{11}(c_{22}c_{13}-c_{12}c_{23})+c_{12}(c_{11}c_{23}-c_{21}c_{13})}{d}=\frac{c_{11}c_{22}c_{13}-c_{12}c_{21}c_{13}}{d}=c_{13}$.

Учитывая их, перепишем вектор v_i в виде
$v_i=d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i}c_{12}^i(c_{33}^{\lambda_3}d-\lambda_3c_{33}^{\lambda_3-1}(c_{31}dy_1+c_{32}dy_2)+\lambda_3(\lambda_3-1)c_{33}^{\lambda_3-2}c_{31}c_{13}c_{32}c_{23})$.

$v_i^{_{13}D}=d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i}c_{12}^i(c_{33}^{\lambda_3}y_1d-\lambda_3c_{33}^{\lambda_3-1}(-c_{33}dy_1-2c_{32}c_{13}c_{23})-\lambda_3(\lambda_3-1)c_{33}^{\lambda_3-2}c_{33}c_{13}c_{32}c_{23})+(\lambda_1-\lambda_2-i)d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i-1}c_{13}c_{12}^i(c_{33}^{\lambda_3}d-\lambda_3c_{33}^{\lambda_3-1}(c_{31}dy_1+c_{32}dy_2)+\lambda_3(\lambda_3-1)c_{33}^{\lambda_3-2}c_{31}c_{13}c_{32}c_{23})+(\lambda_2-1)d^{\lambda_2-1}y_1c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i}c_{12}^i(c_{33}^{\lambda_3}d-\lambda_3c_{33}^{\lambda_3-1}(c_{31}dy_1+c_{32}dy_2)+\lambda_3(\lambda_3-1)c_{33}^{\lambda_3-2}c_{31}c_{13}c_{32}c_{23})=t_1+t_2+t_3=(*)$

$t_1=d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i}c_{12}^i(c_{33}^{\lambda_3}y_1d+\lambda_3c_{33}^{\lambda_3}dy_1+2\lambda_3c_{33}^{\lambda_3-1}c_{32}c_{13}c_{23}+\lambda_3(\lambda_3-1)c_{33}^{\lambda_3-1}c_{32}c_{13}c_{23})=d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i}c_{12}^i((\lambda_3+1)c_{33}^{\lambda_3}y_1d-(\lambda_3+1)\lambda_3c_{33}^{\lambda_3-1}c_{32}c_{23}c_{13})=(\lambda_3+1)w_i$

$t_3=(\lambda_2-1)d^{\lambda_2-1}y_1c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i}c_{12}^i(c_{33}^{\lambda_3}d-\lambda_3c_{33}^{\lambda_3-1}c_{32}dy_2)=(\lambda_2-1)w_i$

$t_2=(\lambda_1-\lambda_2-i)d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i-1}c_{12}^i(c_{33}^{\lambda_3}c_{13}-\lambda_3c_{33}^{\lambda_3-1}c_{13}(c_{31}y_1+c_{32}y_2))=(\lambda_1-\lambda_2-i)d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i-1}c_{12}^ic_{33}^{\lambda_3}c_{13}+(\lambda_1-\lambda_2-i)d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i}c_{12}^i(-\lambda_3c_{33}^{\lambda_3-1}c_{32}y_2y_1)+(\lambda_1-\lambda_2-i)d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i-1}c_{12}^{i+1}(-\lambda_3c_{33}^{\lambda_3-1}c_{32}y_1y_2)=(\lambda_1-\lambda_2-i)d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i-1}c_{12}^ic_{33}^{\lambda_3}c_{13}+(\lambda_1-\lambda_2-i)w_i-(\lambda_1-\lambda_2-i)d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i}c_{12}^ic_{33}^{\lambda_3}y_1+(\lambda_1-\lambda_2-i)u_{i+1}-(\lambda_1-\lambda_2-i)d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i-1}c_{12}^{i+1}c_{33}^{\lambda_3}y_2=(\lambda_1-\lambda_2-i)w_i+(\lambda_1-\lambda_2-i)u_{i+1}+(\lambda_1-\lambda_2-i)d^{\lambda_2-1}c_{11}^{\lambda_1-\lambda_2-i-1}c_{12}^ic_{33}^{\lambda_3}(c_{13}-c_{11}y_1-c_{12}y_2)=(\lambda_1-\lambda_2-i)w_i+(\lambda_1-\lambda_2-i)u_{i+1}$

$(*)=(\lambda_3+1)w_i+(\lambda_2-1)w_i+(\lambda_1-\lambda_2-i)w_i+(\lambda_1-\lambda_2-i)u_{i+1}=(\lambda_1+\lambda_3-i)w_i+(\lambda_1-\lambda_2-i)u_{i+1}$.

Аналогично вычисляются остальные производные.
$v_i^{12D} = (\lambda_1 - \lambda_2 - i)v_{i+1}$,
$v_i^{13D} = (\lambda_1 + \lambda_3 - i)w_i + (\lambda_1 - \lambda_2 - i)u_{i+1}$,
$v_i^{23D} = iw_{i-1} + (\lambda_2 + \lambda_3 + i)u_i$,
$v_i^{21D} = iv_{i-1}, v_i^{31D} = v_i^{32D} = 0$

$w_i^{12D} = (\lambda_1 - \lambda_2 - i)w_{i+1}$,
$w_i^{13D} = (\lambda_1 - \lambda_2 - i)r_{i+1}$,
$w_i^{23D} = (\lambda_2 + \lambda_3 + i + 1)r_i$,
$w_i^{21D} = -u_i - iw_{i-1}, w_i^{31D} = v_i, w_i^{32D} = 0$,

$u_i^{12D} = -w_i + (\lambda_1 - \lambda_2 - i)u_{i+1}$,
$u_i^{13D} = (i - \lambda_1 - \lambda_3 - 1)r_i$,
$u_i^{23D} = -ir_{i-1}$,
$u_i^{21D} = iu_{i-1}, u_i^{31D} = 0, u_i^{32D} = v_i$,

$r_i^{12D} = (\lambda_1 - \lambda_2 - i)r_{i+1}$,
$r_i^{13D} = r_i^{23D} = 0$,
$r_i^{21D} = ir_{i-1}, r_i^{31D} = -u_i, r_i^{32D} = w_i$.

Отсюда следует, что $v_0, \dots, v_t \in L_\lambda$, а поэтому v_i^{13D} и v_{i+1}^{23D} тоже принадлежат L_λ при $0 \le i < t$. Для $0 \le i < t$ представим v_i^{13D} и v_{i+1}^{23D} как линейную комбинацию векторов w_i, u_{i+1} подпространства с весом $(\lambda_1 - i - 1, \lambda_2 + i \mid \lambda_3)$. Зависимость выражается матрицей

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 - i & \lambda_1 - \lambda_2 - i \\ i + 1 & \lambda_2 + \lambda_3 + i + 1 \end{pmatrix}.$$

Её определитель $\det \lambda = (\lambda_1 + \lambda_3 + 1)(\lambda_2 + \lambda_3)$.

(a) λ регулярный.

Так как $\det \lambda \not\equiv 0 \pmod p$, то $w_i, u_{i+1} \in L_\lambda$, а следовательно и $r_i \in L_\lambda$ для $0 \le i < t$. Получаем, что $v_0, \dots, v_t, w_0, \dots, w_t, u_0, \dots, u_t, r_0, \dots, r_t$ составляют базис L_λ. Следовательно,

$$\chi(\lambda) = (x_1 x_2)^{\lambda_2 - 1} x_3^{\lambda_3} p_t(x_1, x_2)[\, x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_3^2\,]$$

и $\dim(L_\lambda) = 4(t+1)$.

(b) λ критический.

Так как $\lambda_2 + \lambda_3 \not\equiv 0 \pmod p$ и $v_0^{23D} = (\lambda_2 + \lambda_3)u_0$, то $u_0 \in L_\lambda$. Кроме того, $\lambda_1 + \lambda_3 - t \equiv \lambda_2 + \lambda_3 \not\equiv 0 \pmod p$ и $v_t^{13D} = (\lambda_1 + \lambda_3 - t)w_t$, поэтому $w_t \in L_\lambda$.

v_i^{13D} и v_{i+1}^{23D} линейно зависимы, поэтому рассмотрим только $q_i = v_i^{13D} = -(i+1)w_i + (t-i)u_{i+1} \in L_\lambda$ при $0 \le i < t - 1$.

Выясним, какие векторы порождаются векторами u_0, w_t и q_i:
$w_t^{12D} = (\lambda_1 - \lambda_2 - t)w_i = 0, w_t^{13D} = 0, w_t^{23D} = (\lambda_2 + \lambda_3 + t + 1)r_i = (\lambda_1 + \lambda_3 + 1)r_i = 0,$
$u_0^{12D} = -w_0 + (\lambda_1 - \lambda_2)u_1 = q_0, u_0^{13D} = (-\lambda_1 - \lambda_3 - 1)r_i = 0, u_0^{23D} = 0,$
$q_i^{12D} = -(i+1)(t-i)w_{i+1} + (t-i)(-w_{i+1} + (t-(i+1))u_{i+2} = (t-i)q_{i+1},$
$q_i^{13D} = -(i+1)(t-i)r_{i+1} + (t-i)(i+1-\lambda_1-\lambda_3-1)r_{i+1} = (t-i)(-\lambda_1-\lambda_3-1)r_{i+1} = 0,$
$q_i^{23D} = -(i+1)(\lambda_2+\lambda_3+i+1) - (t-i)(i+1)r_i = -(i+1)(t+\lambda_2+\lambda_3+1)r_i = 0.$ Таким образом, новые векторы не появляются, следовательно, векторы $v_0, \ldots, v_t, u_0, w_t, q_0, \ldots, q_{t-1}$ составляют базис L_λ. Учитывая, что вес q_i совпадает с весом w_i, получаем

$$\chi(\lambda) = (x_1x_2)^{\lambda_2-1}x_3^{\lambda_3}[\, p_t(x_1,x_2)x_1x_2 + p_{t+1}(x_1,x_2)x_3\,]$$

и $\dim(L_\lambda) = 2t+3$.

(c) λ сильно критический.

Аналогично предыдущему пункту рассматриваем только $q_i = v_i^{13D} = (\lambda_1+\lambda_3-i)w_i + (t-i)u_{i+1} = (t-i)(w_i+u_{i+1}) \in L_\lambda$ при $0 \le i < t$.

$q_i^{12D} = (t-i)q_{i+1}, q_i^{13D} = 0, q_i^{23D} = 0$ при $0 \le i < t$. Кроме того, $v_0^{23D} = (\lambda_2+\lambda_3)u_0$ и $v_t^{13D} = (\lambda_1+\lambda_3-t)w_t = 0$, поэтому $u_0, w_t \notin L_\lambda$. Следовательно,

$$\chi(\lambda) = (x_1x_2)^{\lambda_2}x_3^{\lambda_3}[\, p_t(x_1,x_2) + p_{t-1}(x_1,x_2)x_3\,]$$

и $\dim(L_\lambda) = 2t+1$.

□

Замечание 2. *Если $\lambda_2 = 0$, то $\lambda_3'' = 0$, поэтому вес λ является сильно критическим, следовательно*

$$\chi(\lambda) = x_3^{\lambda_3}[\, p_t(x_1,x_2) + p_{t-1}(x_1,x_2)x_3\,]\prod_{i=0}^{s} p_{k_i}\ (x_1^{p^{i+1}}, x_2^{p^{i+1}})$$

3. Композиционные ряды костандартных модулей в $S(2\,|\,1)$

Ввиду сложности общего случая, связанной с p-адическим разложением числа k, здесь исследуется только случай p-ограниченного веса.

Лемма 4. *Если $\lambda_2 > 0$, то*

$$\chi(\nabla(\lambda)) = (x_1x_2)^{\lambda_2-1}x_3^{\lambda_3}p_{t+pk}(x_1,x_2)[\,x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2\,],$$

Если $\lambda_2 = 0$, то

$$\chi(\nabla(\lambda)) = x_3^{\lambda_3}[\,p_{t+pk}(x_1,x_2) + p_{t+pk-1}(x_1,x_2)x_3\,].$$

Доказательство. Если $\lambda_2 > 0$, то $v_i, w_i, u_i, r_i, \quad i = 0,\dots\lambda_1 - \lambda_2$ являются полиномами и составляют базис $\nabla(\lambda)$, откуда следует первое утверждение леммы.

Если $\lambda_2 = 0$, то $\lambda = (t,0\,|\,0) + p(0,0\,|\,\lambda_3')$. В этом случае согласно [5] $\quad \nabla(\lambda) = \nabla(t,0\,|\,0) \otimes \nabla(\lambda_3')^p$. Тогда $\chi(\nabla(\lambda_3')^p) = x_3^{p\lambda_3'} = x_3^{\lambda_3}$.

Базис $\nabla(t,0\,|\,0)$ получается из вариантов заполнения строки длины t невозрастающей последовательностью индексов $1,2,3$, причем повторяться могут только чётные, т.е. 1 и 2. Каждый вариант заполнения соответсвует базисному моному по правилу

$$(\underbrace{1,\dots,1}_{i},\underbrace{2,\dots,2}_{t-1-i},3) \longleftrightarrow c_{11}^{i}c_{12}^{t-1-i}c_{13}.$$

Подробное описание можно найти в [5].

Таким образом базис составляют мономы $c_{11}^{i}c_{12}^{(}t-1-i)c_{13}, \quad i = 0,\dots,t-1-i$ и мономы $c_{11}^{i}c_{12}^{t-i}, \quad i = 0,\dots,t$, откуда и получаем формальный характер. $\square$

В случае существования фактора $V/L_\lambda \cong L_\mu$ старший вектор L_μ зануляется суперпроизводными ${}_{21}D, {}_{31}D, {}_{32}D$ по модулю L_λ. И обратно, если вектор из L_μ зануляется суперпроизводными ${}_{21}D, {}_{31}D, {}_{32}D$ по модулю L_λ, то он является старшим вектором L_μ. При этом $\chi(\mu) = \chi(\nabla(\lambda)) - \chi(\lambda)$. Таким образом, фактор L_μ можно найти, зная формальные характеры $\nabla(\lambda)$ и L_λ.

Утверждение 2. *Пусть $\lambda = (\lambda_1,\lambda_2\,|\,\lambda_3)$ – p-ограниченный вес, $V = \nabla(\lambda)$ – соответствующий костандартный модуль, L_λ – неприводимый модуль со старшим весом λ.*

(a) Если λ регулярный или $\lambda_2 = 0$, то $V = L_\lambda$.

(b) Если λ критический, то $V/L_\lambda \simeq L_{\bar\lambda}$, где $\bar\lambda = (\lambda_1 - 1, \lambda_2\,|\,\lambda_3+1)$ – критический, при этом $dim\, L_{\bar\lambda} = 2t+1$.

(c) Если λ сильно критический, то $V/L_\lambda \simeq L_{\hat\lambda}$, где $\hat\lambda = (\lambda_1, \lambda_2 - 1\,|\,\lambda_3+1)$ – сильно критический, при этом $dim\, L_{\hat\lambda} = 2t+3$.

Доказательство. Так как λ – p-ограниченный вес, то $p_{t+pk}(x_1,x_2) = p_t(x_1,x_2)$ и $\prod\limits_{i=0}^{s} p_{k_i}\ (x_1^{p^{i+1}}, x_2^{p^{i+1}}) = 1$. Поэтому в случае регулярного веса λ или $\lambda_2 = 0$ формальные характеры V и L_λ совпадают, следовательно совпадают и сами модули.

(b) λ – критический. Напомним, что в этом случае базис L_λ составляют векторы $v_0, \ldots, v_t, u_0, w_t, q_0, \ldots, q_{t-1}$.
$\chi(V) - \chi(L_\lambda) = (x_1x_2)^{\lambda_2-1}x_3^{\lambda_3}p_t(x_1,x_2)[\,x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2\,] -$
$(x_1x_2)^{\lambda_2-1}x_3^{\lambda_3}[\,p_t(x_1,x_2)x_1x_2 + p_{t+1}(x_1,x_2)x_3\,] = (x_1x_2)^{\lambda_2-1}x_3^{\lambda_3}[\,\sum\limits_{i=0}^{t-1} x_1^{t-j}x_2^{j+1}x_3 + \sum\limits_{i=0}^{t} x_1^{t-j}x_2^{j}x_2^2\,]$.
Отсюда следует, что старший вектор фактора $U_0 \cong V/L_\lambda$ имеет вес $\bar{\lambda} = (t + \lambda_2 - 1, \lambda_2 \,|\, \lambda_3 + 1) = (\lambda_1 - 1, \lambda_2 \,|\, \lambda_3 + 1)$, который является критическим. Вектор w_0 веса $\bar{\lambda}$ зануляется соответствующими производными (см. список значений производных), т.е. w_0 – старший вектор U_0. w_0 под действием производных ${}_{12}D, {}_{13}D, {}_{23}D$ порождает векторы $w_0, \ldots, w_{t-1}, r_0, \ldots, r_t$ (по модулю L_λ). Сравнивая размерности U_0 и $L_{\bar{\lambda}}$, получаемш $U_0 = L_{\bar{\lambda}}$.

(c) λ – сильно критический. Базис L_λ составляют векторы $v_0, \ldots, v_t, q_0, \ldots, q_{t-1}$.
$\chi(V) - \chi(L_\lambda) = (x_1x_2)^{\lambda_2-1}x_3^{\lambda_3}p_t(x_1,x_2)[\,x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2\,] -$
$(x_1x_2)^{\lambda_2}x_3^{\lambda_3}[\,p_t(x_1,x_2) + p_{t-1}(x_1,x_2)x_3\,] = (x_1x_2)^{\lambda_2-1}x_3^{\lambda_3}[\,\sum\limits_{i=0}^{t} x_1^{t-j}x_2^{j+1}x_3 + x_1^{t+1}x_3 + \sum\limits_{i=0}^{t} x_1^{t-j}x_2^{j}x_3^2\,]$.
Старший вектор фактора $U_1 \cong V/L_\lambda$ имеет вес $\hat{\lambda} = (t+\lambda_2, \lambda_2 - 1 \,|\, \lambda_3 + 1) = (\lambda_1, \lambda_2 - 1 \,|\, \lambda_3 + 1)$, который является сильно критическим. Вектор u_0 веса $\hat{\lambda}$ зануляется производными, следовательно, u_0 – старший вектор U_1. Аналогично, $U_1 = L_{\hat{\lambda}}$. $\square$

4. Алгоритм вычисления формальных характеров $I(\lambda)$

4.1. Постановка задачи

Утверждение 3. *Для произвольного веса $\lambda \in \Lambda(r)$ справедливо разложение $A(r)\xi_\lambda = \bigoplus_{\mu in \Lambda(r)^+} I(\mu)^{d_{\mu,\lambda}}$, где $d_{\mu,\lambda} = \dim L(\mu)_\lambda$.*

$A(r)\xi_\lambda$ – подпространство в $A(r)$, образованное всеми мономами, имеющими вес слева λ. Подробнее теоретический материал можно найти в [5], [6].

Базисные элементы известны, поэтому можно записать формальный характер $A(r)\xi_\lambda$. Мы описали формальные характеры неприводимых модулей $L(\mu)$, поэтому можем вычислить $d_{\mu,\lambda}$ для произвольного веса λ. Таким образом, при определенных условиях можно вычислить формальные характеры инъективных модулей $I(\mu)$.

Пусть $r < p$. Тогда все веса из $\Lambda(r)^+$ будут p-ограниченными, поэтому все размерности $d_{\mu,\lambda}$ можно легко вычислить.

4.2. Вычисление формального характера $A(r)\xi_\lambda$

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2 \,|\, \lambda_3)$. Обозначим через λ_{ij} степень элемента c_{ij} в мономе. Тогда $\lambda_{k1} + \lambda_{k2} + \lambda_{k3} = \lambda_k, \quad k = 1, 2, 3$, при этом нечётные элементы не могут иметь степень больше 1, т.е. $0 \leqslant \lambda_{13}, \lambda_{23}, \lambda_{31}, \lambda_{32} \leqslant 1$. Для того чтобы записать формальный характер $A(r)\xi_\lambda = \chi(\lambda_1, \lambda_2 \,|\, \lambda_3)$, нужно знать веса базисных мономов справа. Запишем матрицу элементов λ_{ij}. Суммы элементов по строкам образуют вес слева, суммы по столбцам – вес справа.

$$\begin{array}{ccccc} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \oplus & \lambda_1 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \oplus & \lambda_2 \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} & \oplus & \lambda_3 \\ \oplus & \oplus & \oplus & & \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & & \end{array}$$

1) Предположим, что $\lambda_3 = 0$. Тогда $\lambda_{31} = \lambda_{32} = \lambda_{33} = 0$.
$\mu = (i+j, (\lambda_1+\lambda_2-\lambda_{13}-\lambda_{23})-(i+j), \lambda_{13}+\lambda_{23}), \quad i = 0, \ldots, \lambda_1-\lambda_{13}, \quad j = 0, \ldots, \lambda_2-\lambda_{23}$.
Заметим, что $\sum\limits_{i=0}^{\lambda_1}\sum\limits_{j=0}^{\lambda_2} x_1^{i+j}x_2^{\lambda_1+\lambda_2-i-j} = \sum\limits_{i=0}^{\lambda_1} x_1^i x_2^{\lambda_1-i} \sum\limits_{j=0}^{\lambda_2} x_1^j x_2^{\lambda_2-j} = p_{\lambda_1}(x_1,x_2)p_{\lambda_2}(x_1,x_2)$.
Получаем, $\chi(\lambda_1, \lambda_2 \,|\, 0) = p_{\lambda_1}(x_1,x_2)p_{\lambda_2}(x_1,x_2) + p_{\lambda_1-1}(x_1,x_2)p_{\lambda_2}(x_1,x_2)x_3 +$
$p_{\lambda_1}(x_1,x_2)p_{\lambda_2-1}(x_1,x_2)x_3 + p_{\lambda_1-1}(x_1,x_2)p_{\lambda_2-2}(x_1,x_2)x_3^2 =$
$(p_{\lambda_1}(x_1,x_2) + x_3p_{\lambda_1-1}(x_1,x_2))(p_{\lambda_2}(x_1,x_2) + x_3p_{\lambda_2-1}(x_1,x_2))$.

2) $\lambda_3 = 1$. Ровно одно из чисел $\lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33}$ равно 1, остальные 2 числа равны 0. Вынесем эту единицу из каждого монома и получим $\chi(\lambda_1, \lambda_2 \,|\, 1) = (x_1+x_2+x_3)\chi(\lambda_1, \lambda_2 \,|\, 0)$.

3) $\lambda_3 = 2$. Либо два из чисел $\lambda_{31}, \lambda_{32}, \lambda_{33}$ равны 1, оставшееся число равно 0, либо $\lambda_{33} = 2, \lambda_{31} = \lambda_{32} = 0$. Следовательно, $\chi(\lambda_1, \lambda_2 \,|\, 2) = (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2)\chi(\lambda_1, \lambda_2 \,|\, 0)$.

4) $\lambda_3 > 2$. Тогда можно из каждого монома вынести x_3, поэтому $\chi(\lambda_1, \lambda_2 \,|\, \lambda_3) = x_3\chi(\lambda_1, \lambda_2 \,|\, \lambda_3 - 1)$.

Обозначим $p_t = p_t(x_1, x_2)$.

$$A(r)\xi_\lambda = \begin{cases} (p_{\lambda_1} + x_3 p_{\lambda_1 - 1})(p_{\lambda_2} + x_3 p_{\lambda_2 - 1}), & \lambda_3 = 0 \\ (\,x_1 + x_2 + x_3\,)(p_{\lambda_1} + x_3 p_{\lambda_1 - 1})(p_{\lambda_2} + x_3 p_{\lambda_2 - 1}), & \lambda_3 = 1 \\ x_3^{\lambda_3 - 2}[\,x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_3^2\,](p_{\lambda_1} + x_3 p_{\lambda_1 - 1})(p_{\lambda_2} + x_3 p_{\lambda_2 - 1}), & \lambda_3 \geqslant 2 \end{cases}$$

4.3. Вычисление размерностей $d_{\mu,\lambda}$

Напомним, что вес $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2 \,|\, \lambda_3)$ является старшим, если $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ и $p \,|\, \lambda_3$, если $\lambda_2 = 0$.

Лемма 5. *При $r < p$ любой старший вес $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2 \,|\, \lambda_3)$ степени r является регулярным за исключением $(r, 0 \,|\, 0)$.*

Доказательство. Если λ – сильно критический, то $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$, т.к. $\lambda_2 + \lambda_3 < p$. Тогда $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, т.е. $\lambda = (r, 0 \,|\, 0)$.

Если λ – критический, то $\lambda_1 + \lambda_3 + 1 = p$, т.е. $\lambda_1 + \lambda_3 = p - 1$, но тогда $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ и вес не является критическим. $\square$

Для определения ненулевых размерностей $d_{\mu,\lambda}$ составим иерархию всех весов из $\Lambda(r)^+$.

Определение 9. *Назовем вес μ последователем веса λ, если $d_{\lambda,\mu} > 0$ и $\nexists \eta \in \Lambda(r)^+ : \lambda > \eta > \mu$.*

Для веса $(r, 0 \,|\, 0)$ последователем является только $(r - 1, 1 \,|\, 0)$

Лемма 6. *Пусть $\lambda \in \Lambda(r)^+$ – регулярный вес. Тогда его последователями являются несравнимые веса $(\lambda_1 - 1, \lambda_2 + 1 \,|\, \lambda_3)$ и $(\lambda_1, \lambda_2 - 1 \,|\, \lambda_3 + 1)$.*

Доказательство. L_λ имеет базис v_i, w_i, u_i, r_i с весами $(\lambda_1 - i, \lambda_2 + i \,|\, \lambda_3), (\lambda_1 - i - 1, \lambda_2 + i \,|\, \lambda_3 + 1), (\lambda_1 - i, \lambda_2 + i - 1 \,|\, \lambda_3 + 1), (\lambda_1 - i - 1, \lambda_2 + i - 1 \,|\, \lambda_3 + 2)$. Подразумевая сравнение весов, имеем $v_1 > v_i, u_0 > u_i, w_0 > w_i, r_0 > r_i$, поэтому последователями λ могут быть только веса векторов v_1, w_0, u_0, r_0. Поскольку $v_1 > w_0, v_1 > r_0, u_0 > w_0, u_0 > r_0$, а v_1 и u_0 не сравнимы, то последователями λ являются веса векторов v_1 и u_0 – $(\lambda_1 - 1, \lambda_2 + 1 \,|\, \lambda_3)$ и $(\lambda_1, \lambda_2 - 1 \,|\, \lambda_3 + 1)$. $\square$

Замечание 3. *Если $\lambda = (\lambda_1, 1 \,|\, \lambda_3)$, то последователь будет только один – $(\lambda_1 - 1, \lambda_2 + 1 \,|\, \lambda_3)$. Если $\lambda_1 = \lambda_2$, то последователем будет только $(\lambda_1, \lambda_2 - 1 \,|\, \lambda_3 + 1)$. Таким образом, иерархия заканчивается, когда оба условия выполнены, т.е. последним весом будет $(1, 1 \,|\, r - 2)$.*

Лемма 7. *Пусть $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2 \,|\, \lambda_3), \mu = (\mu_1, \mu_2 \,|\, \mu_3) \in \Lambda(r)^+$.*

а) $d_{\lambda,\mu} = 1$, если выполнено одно из условий:

1) $\mu_3 = \lambda_3$;

2) $\mu_3 = \lambda_3 + 2$*;*

3) $\mu_3 = \lambda_3 + 1, \mu_1 = \lambda_1$*;*

4) $\mu_3 = \lambda_3 + 1, \mu_2 = \lambda_1$.

b) $d_{\lambda,\mu} = 1$*, если* $\mu_3 = \lambda_3 + 1, \mu_1 \neq \lambda_1, \mu_2 \neq \lambda_1$.

c) Иначе $d_{\lambda,\mu} = 0$.

Доказательство. В L_λ повторяются только веса векторов u_i и w_{i+1}. Для векторов v_i $\mu_3 = \lambda_3$, для векторов r_i $\mu_3 = \lambda_3 + 2$. Также не повторяются веса векторов w_0, u_t – $(\lambda_1, \lambda_2 - 1 \,|\, \lambda_3 + 1), (\lambda_2 - 1, \lambda_1 \,|\, \lambda_3 + 1)$, т.е. $\mu_3 = \lambda_3 + 1$ и $\mu_1 = \lambda_1$ или $\mu_2 = \lambda_1$.

Все остальные веса с $\mu_3 = \lambda_3 + 1$ имеют кратность 2. $\square$

4.4. Вычисление формальных характеров $I(\lambda)$

Обозначим $\chi(\xi_\lambda) = \chi(A(r)\xi_\lambda), \quad \chi(I_\lambda) = \chi(I(\lambda))$.

Для самого старшего вектора в иерархии $\lambda' = (r, 0 \,|\, 0)$ только $d_{\lambda',\lambda'} = 1$, поэтому $\chi(\xi_{\lambda'}) = \chi(I_{\lambda'})$. Для его последователя λ'' верно $\chi(\xi_{\lambda''}) = \chi(I_{\lambda''}) + d_{\lambda',\lambda''}\chi(I_{\lambda'})$, откуда имеем $\chi(I_{\lambda''}) = \chi(\xi_{\lambda''}) - d_{\lambda',\lambda''}\chi(I_{\lambda'})$.

Итерируя эту процедуру, можно вычислить $\chi(\xi_\mu)$ для любого $\mu \in \Lambda(r)^+$. Таким образом, имеем алгоритм вычисления $\chi(\xi_\mu)$:

1) Строим иерархию весов из $\Lambda(r)^+$.

Пример иерархии для $r = 9, p = 11$.

$(9,0\|0)$							
$(8,1\|0)$							
$(7,2\|0)$							
$(6,3\|0)$	$(7,1\|1)$						
$(5,4\|0)$	$(6,2\|1)$						
	$(5,3\|1)$	$(6,1\|2)$					
	$(4,4\|1)$	$(5,2\|2)$					
		$(4,3\|2)$	$(5,1\|3)$				
			$(4,2\|3)$				
			$(3,3\|3)$	$(4,1\|4)$			
				$(3,2\|4)$			
					$(3,1\|5)$		
					$(2,2\|5)$		
						$(2,1\|6)$	
							$(1,1\|7)$

Последователи расположены друг за другом по вертикали и вправо-вниз по диагонали. Веса, находящиеся в одном горизонтальном ряду, не сравнимы.

2) Для вычисления $\chi(\xi_\lambda)$ нужно посчитать $\chi(\xi_\mu)$ для всех предшественников μ, начиная от вершины.

3) Выразить $\chi(\xi_\lambda)$ через $\chi(\xi_\mu)$ для предшественников μ из двух предшествующих столбцов. При этом если λ и μ находятся в одном столбце или через столбец, то $d_{\mu,\lambda} = 1$. Если λ находится вправо-вниз по диагонали от μ, то $d_{\mu,\lambda} = 1$. Для всех остальных предшественников μ в соседнем столбце $d_{\mu,\lambda} = 2$.

Список литературы

[1] A.N. Zubkov A.N. Grishkov, F. Marko. Description of costandard modules for schur superalgebra s(2|1) in positive characteristic. *Linear and Multilinear Algebra*, 59:57–64, April 2010.

[2] S. Donkin. Symmetric and exterior powers, linear source modules andrepresentations of schursuperalgebras. *London Mathematical Society*, 83:647–680, 2001.

[3] J. Kujawa J. Brundan. A new proof of the mullineux conjecture. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 18:13–39, 2003.

[4] J. Kujawa. The steinberg tensor product theorem for $gl(m|n)$. *American Mathematical Society*, 413:123–132, 2006.

[5] A.N. Zubkov R.L. Scala. Costandard modules over schur superalgebras in characteristic p. *Journal of Algebra and its Applications*, 7(2):147–166, April 2008.

[6] А.Н. Зубков. Подалгебры Бореля супералгебр Шура. *Алгебра и логика*, 44(3):305–334, 2005.

[7] А.Н. Зубков. О некоторых свойствах общих линейных супергрупп и супералгебр Шура. *Алгебра и логика*, 45(3):257–299, 2006.