

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского
Институт математики и информационных технологий
Кафедра алгебры

Аналог теоремы Каца для разрешимых аффинных групповых суперсхем

Дипломная работа

Специальность «Прикладная математика и информатика»

Выполнил:
студент группы МПС-703-О
Уляшев Павел Александрович

(подпись студента)

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Зубков Александр Николаевич

(подпись руководителя)

Омск 2012

Введение

Здесь захватывающий текст гениального введения.

Предполагается знакомство читателя с базовыми понятиями теории категорий, алгебр и супералгебр.

Содержание

1. Предварительные сведения	3
1.1. K -функторы	3
1.2. Аффинные суперсхемы	3
1.3. Групповые K -функторы и аффинные групповые суперсхемы	4
2. Основные понятия	5
3. Супералгебра распределений и Лиевские супералгебры	6
3.1. Супералгебры распределений	6
3.2. Действие сопряжения и функтор $\mathbf{Lie}(G)$	6
4. Связная супергруппа	8
5. Разрешимые супергруппы	9
6. Аналог теоремы Каца	10

1. Предварительные сведения

В этом разделе вводятся основные понятия теории — аффинные суперсхемы, замкнутые подсуперсхемы

1.1. K -функторы

Определения, данные в [1] для обычного случая, можно почти дословно перенести на суперслучай. Некоторые из них можно найти в [4].

Введем некоторые предварительные обозначения. K — произвольное поле, \mathbf{SAlg}_K — категория супералгебр над полем K , \mathbf{Sets} — категория множеств, \mathbf{Gr} — категория групп.

Определение 1. K -функтором назовем функтор из категории \mathbf{SAlg}_K в \mathbf{Sets} .

Для K -функторов X, X' обозначим через $\text{Mor}(X, X')$ множество морфизмов из X в X' .

Определение 2. Пусть X — K -функтор. K -функтор Y называется подфунктором функтора X , если $\forall A, A' \in \mathbf{SAlg}_K \ \forall \varphi \in \text{Hom}_{\mathbf{SAlg}_K}(A, A')$ выполнены условия: $Y(A) \subset X(A)$ и $Y(\varphi) = X(\varphi)|_{Y(A)}$.

Для любого семейства подфункторов $\{Y_i\}_{i \in I} \subset X$ определим функтор-пересечение $\bigcap_{i \in I} Y_i$ следующим образом:

$$\left(\bigcap_{i \in I} Y_i\right)(A) = \bigcap_{i \in I} Y_i(A).$$

Для $f \in \text{Mor}(X, X') \ \forall Y' \subseteq X'$ определим функтор-прообраз

$$(f^{-1}(Y'))(A) = f(A)^{-1}(Y'(A)) \quad \text{для } A \in \mathbf{SAlg}_K.$$

Очевидно, что $\bigcap_{i \in I} Y_i$ и $f^{-1}(Y')$.

Определение 3. Прямым произведением K -функторов X_1 и X_2 называется функтор $(X_1 \times X_2)(A) = X_1(A) \times X_2(A)$ для $A \in \mathbf{SAlg}_K$.

1.2. Аффинные суперсхемы

Определение 4. K -функтор $SSp R$, определенный как

$$(SSp R)(A) = \text{Hom}_{\mathbf{SAlg}_K}(R, A) \quad \text{для } A \in \mathbf{SAlg}_K,$$

называется аффинной суперсхемой. Супералгебра $R \in \mathbf{SAlg}_K$ называется координатной супералгеброй суперсхемы $SSp R$. Если $X = SSp R$, то R обозначается $K[X]$.

Лемма 1 (лемма Йонеды). $\forall R \in \mathbf{SAlg}_K \ \forall K$ -функтора X отображение $f \mapsto f(R)(id_R)$ является биекцией

$$\text{Mor}(SSp R, X) \simeq X(R).$$

Доказательство. □

Определение 5. Аффинная суперсхема $\mathbf{A}^{m|n} = SSpr K[t_1, \dots, t_m | z_1, \dots, z_n]$ называется $(m|n)$ -аффинным суперпространством.

Очевидно, что $\mathbf{A}^{m|n}(B) = B_0^m \oplus B_1^n$ для $B \in \mathbf{SAlg}_K$. В частности, $\mathbf{A}^{1|1}(B) = B$ для любой супералгебры B .

Определение 6. Пусть I — суперидеал $B \in \mathbf{SAlg}_K$. Подфунктор $V(I) = \{\varphi \in (SSpr R)(A) \mid \varphi(I) = 0\}$ функтора $SSpr R$ называется замкнутым подфунктором, соответствующим суперидеалу I .

Очевидно, что $V(I) \simeq SSpr(K[X]/I)$.

Определение 7. Аффинная суперсхема называется алгебраической, если $K[X] \simeq K[t_1, \dots, t_m | z_1, \dots, z_n]$ для некоторых $m, n \in \mathbb{N}$ и конечнопорожденного суперидеала I .

Определение 8. Аффинная суперсхема X называется редуцированной, если $K[X]$ не содержит нильпотентных элементов, отличных от 0.

1.3. Групповые K -функторы и аффинные групповые суперсхемы

Определение 9. Групповым K -функтором будем называть функтор из \mathbf{SAlg}_K в \mathbf{Gr} .

Если взять композицию группового функтора с забывающим функтором из \mathbf{Gr} в \mathbf{Sets} , то групповой K -функтор можно рассматривать как K -функтор. Поэтому все результаты для K -функторов можно перенести на групповые K -функторы.

Пусть G, H — групповые K -функторы. Обозначим через $\text{Mor}(G, H)$ множество морфизмов из G в H , если рассматривать G и H как K -функторы; через $\text{Hom}(G, H)$ множество морфизмов групповых функторов.

2. Основные понятия

Аффинные суперсхемы, аффинные групповые суперсхемы, супералгебры Хопфа, дуальность категорий аффинных групповых суперсхем и супералгебр Хопфа. Все понятия дословно переносятся с книги [1], также можно посмотреть [4].

Пусть K – произвольное поле.

Определение 10. K -функтором будем называть функтор из категории \mathbf{SAlg}_K в \mathbf{Sets} .

Определение 11. Пусть X – K -функтор. K -функтор Y называется подфунктором функтора X , если $\forall A, A' \in \mathbf{SAlg}_K \forall \phi \in \text{Hom}_{\mathbf{SAlg}_K}(A, A')$ выполнены условия: $Y(A) \subset X(A)$ и $Y(\phi) = X(\phi)|_{Y(A)}$.

Определение 12. Для любого семейства подфункторов $\{Y_i\}_{i \in I} \subset X$ определим пересечение $\bigcap_{i \in I} Y_i$ следующим образом: $(\bigcap_{i \in I} Y_i)(A) = \bigcap_{i \in I} Y_i(A)$.

3. Супералгебра распределений и Лиевские супералгебры

3.1. Супералгебры распределений

Пусть X — аффинная суперсхема. Повторим определения, приведенные в [4] и [1]. Элемент из $\text{Dist}_n(X, \mathcal{M}) = (K[X]/\mathcal{M}^{n+1})^*$ будем называть *распределением* на X с носителем в \mathcal{M} порядка $\leq n$, где \mathcal{M} — максимальный идеал супералгебры $K[X]$. Имеем

$$\bigcup_{n \geq 0} \text{Dist}_n(X, \mathcal{M}) = \text{Dist}(X, \mathcal{M}) \subseteq K[X]^*.$$

Если $g : X \rightarrow Y$ — морфизм аффинных суперсхем, то он порождает морфизм суперпространств $dg_{\mathcal{M}} : \text{Dist}(X, \mathcal{M}) \rightarrow \text{Dist}(Y, (g^*)^{-1}(\mathcal{M}))$ такой, что

$$dg_{\mathcal{M}}(\text{Dist}_n(X, \mathcal{M})) \subseteq \text{Dist}_n(Y, (g^*)^{-1}(\mathcal{M})) \quad \forall n \geq 0.$$

Если $X = V(I)$ — замкнутая подсуперсхема в Y , то $\text{Dist}(X, \mathcal{M})$ отождествляется с $\{\varphi \in \text{Dist}(Y, \mathcal{M}) \mid \varphi(I) = 0\}$, где $I \subseteq \mathcal{M}$.

Если X — алгебраическая аффинная групповая суперсхема и $\mathcal{M} = \ker \varepsilon_X$, то $\text{Dist}(X, \mathcal{M})$ обозначается как $\text{Dist}(X)$. В этом случае $\text{Dist}(X)$ имеет структуру супералгебры Хопфа с умножением $\varphi\psi(f) = \sum (-1)^{|\varphi||\psi|} \varphi(f_1)\psi(f_2)$ для $\varphi, \psi \in \text{Dist}(X)$, $f \in K[X]$, и коумножением $\Delta_X(f) = \sum f_1 \otimes f_2$, с единицей ε_X , коединицей $\varepsilon_{\text{Dist}(X)} : \varphi \mapsto \varphi(1)$ и антиподом $s_{\text{Dist}(X)}(\varphi)(f) = \varphi(s_X(f))$ для $\varphi \in \text{Dist}(X)$ и $f \in K[X]$.

$\text{Dist}(X)$ — фильтрованная алгебра, т.е. $\forall m, n \geq 0 \text{Dist}_m(X)\text{Dist}_n(X) \subseteq \text{Dist}_{m+n}(X)$. Рассмотрим суперпространство $\text{Lie}(X) = \{\varphi \in \text{Dist}_1(X) \mid \varphi(1) = 0\}$. Его можно наделять структурой супералгебры Ли, положив $[\varphi, \psi] = \varphi\psi - (-1)^{|\varphi||\psi|}\psi\varphi$.

Замечание 1. $\text{Lie}(X)$ не является алгеброй Ли в обычном смысле — аксиомы выполняются в учетом четности элементов, а именно $\forall \varphi, \psi, \rho \in \text{Lie}(X)$

$$[\varphi, \psi] = (-1)^{|\varphi||\psi|}[\psi, \varphi],$$

$$[[\varphi, \psi], \rho] = (-1)^{|\psi||\rho|}[[\varphi, \rho], \psi] + [\varphi, [\psi, \rho]].$$

Как супералгебра Хопфа $\text{Dist}(X)$ кокоммутативна, т.е. $\sum \varphi_1 \otimes \varphi_2 = \sum (-1)^{|\varphi_1||\varphi_2|} \varphi_2 \otimes \varphi_1$.

3.2. Действие сопряжения и функтор $\text{Lie}(G)$

Определение 13. Пусть $A \in \mathbf{SAlg}_K$. Супералгеброй дуальных чисел называется $A[\varepsilon_0, \varepsilon_1] = \{a + \varepsilon_0 b + \varepsilon_1 c \mid a, b, c \in A\}$, $|\varepsilon_i| = i$, $\varepsilon_i \varepsilon_j = 0$, $i, j \in \{0, 1\}$.

Имеем проективный $p_A : A[\varepsilon_0, \varepsilon_1] \rightarrow A$ и инъективный $i_A : A \rightarrow A[\varepsilon_0, \varepsilon_1]$ морфизмы супералгебр, определенные как $a + \varepsilon_0 b + \varepsilon_1 c \mapsto a$ и $a \mapsto a$ соответственно.

Определение 14. Функтором супералгебры Ли будем называть функтор $\mathbf{Lie}(G)$, определенный как

$$\mathbf{Lie}(G) = \left(G(A[\varepsilon_0, \varepsilon_1]) \xrightarrow{G(p_A)} G(A) \right), \quad A \in \mathbf{SAlg}_K.$$

Пусть V — суперпространство. Определим функтор V_a из категории \mathbf{SAlg}_K в категорию векторных суперпространств: $V_a(A) = V \otimes A$.

Лемма 2. Существует изоморфизм абелевых групповых функторов $\mathbf{Lie}(G)_a \simeq \mathbf{Lie}(G)$, который задается отображением

$$(v \otimes a)(f) = \varepsilon_G(f) + (-1)^{|a||f|} \varepsilon_{v \otimes a} v(f) a, \quad v \in \mathbf{Lie}(G) = (\mathcal{M}/\mathcal{M}^2)^*, a \in A, f \in K[G].$$

Для более подробной информации см. [3].

Если мы отождествляем $\mathbf{Lie}(G) \otimes A$ с $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{M}/\mathcal{M}^2, A)$ при помощи отображения $(v \otimes a)(f) = (-1)^{|a||f|} v(f) a$, то вышеуказанный изоморфизм может быть представлен отображением

$$u \mapsto \varepsilon_G + \varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1, \quad u \in \mathrm{Hom}_K(\mathcal{M}/\mathcal{M}^2, A).$$

Определение 15. Рассмотрим действие аффинной групповой суперсхемы G на функторе $\mathbf{Lie}(G)$:

$$(g, x) \mapsto G(i_a)(g) x G(i_A)(g)^{-1}, \quad g \in G(A), x \in \mathbf{Lie}(G)(A), A \in \mathbf{SAlg}_K.$$

Это действие называется сопряжением и обозначается \mathbf{Ad} .

Лемма 3. Сопряжение линейно. В частности, оно порождает морфизм аффинных групповых схем $G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbf{Lie}(G))$.

4. Связная супергруппа

Связная компонента, связная супергруппа, утверждение про центр группы (если оно нужно для доказательства). [4]

Везде в этом пункте G – аффинная групповая суперсхема над полем K .

Определение 16. *Подфунктор $\mathbf{Z}(G)$ группового K -функтора G называется центральным, если H – подфунктор в G и $\forall A \in \mathbf{SAlg}_K H(A)$ – центральная подгруппа в $G(A)$.*

Утверждение 1. *Пусть G – аффинная групповая суперсхема. $\mathbf{Z}(G)$ – замкнутая аффинная групповая подсуперсхема в G .*

Доказательство.

□

Утверждение 2. *Если G связна, $\text{char } K = 0$, то $\text{Lie}(\mathbf{Z}(G)) = \mathbf{Z}(\text{Lie}(G))$.*

Доказательство.

□

Теорема 1. *Пусть $\text{char } K = 0$, G – связная аффинная групповая суперсхема, I – максимальный абелев суперидеал в $\text{Lie}(G)$. Существует $H \triangleleft G : \text{Lie}(H) = I$.*

Доказательство. Обозначим $L = \text{Lie}(G)$. Доказательство проведем индукцией по $\dim L$. Предположим, что если H – связная аффинная групповая суперсхема и $\dim \text{Lie}(H) < \dim L$, то утверждение выполнено для H .

Рассмотрим действие $\mathbf{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(I)$, $\ker \mathbf{Ad} = R$. Пусть $J = \text{Lie}(R) = \{x \in L \mid [x, I] = 0\}$. Очевидно, $I \subseteq J$.

Если $\dim J \leq \dim L$, то по предположению индукции утверждение выполнено для R , т.е. $\exists H \triangleleft R : \text{Lie}(H) = I$. Поскольку $H \triangleleft R$ и $R \triangleleft G$ как ядро \mathbf{Ad} , то $H \triangleleft G$, следовательно, утверждение выполнено для G .

Рассмотрим случай $\dim J = \dim L$. Т.к. G алгебраическая, то $\dim L < \infty \Rightarrow J = L$. Отсюда следует, что $[L, I] = 0$, а в силу определения центра $I \subseteq \mathbf{Z}(L)$. По условию I – максимальный суперидеал $\Rightarrow I$ не может быть собственным подмножеством $\Rightarrow I = \mathbf{Z}(L)$. По лемме 2 получаем, что $I = \text{Lie}(\mathbf{Z}(G))$, а $\mathbf{Z}(G) \triangleleft G$. □

5. Разрешимые супергруппы

Для того, чтобы сформулировать определение разрешимой супергруппы, сначала необходимо определить коммутант супергруппы.

Пусть S - алгебраическая матричная супергруппа. Рассмотрим отображение $S \times S \rightarrow S$, переводящее (x, y) в $xyx^{-1}y^{-1}$. Ядро I_1 соответствующего отображения $K[S] \rightarrow K[S] \otimes K[S]$ состоит из функций, зануляющихся на всех коммутаторах из S ; таким образом, замкнутое множество, им определяемое, является замыканием коммутаторов. Аналогично имеем отображение $S^{2n} \rightarrow S$, переводящее $(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$ в $x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1} \cdots x_ny_nx_n^{-1}y_n^{-1}$. Соответствующее отображение $K[S] \rightarrow \otimes^{2n} K[S]$ имеет ядро I_n , определяющее замыкание произведения n коммутаторов. Очевидно, что $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \dots$.

Коммутаторная подгруппа в S - объединение произведений из n коммутаторов по всем n , поэтому идеалом функций, зануляющихся на S является $I = \bigcap I_n$. Замкнутое множество, определяемое идеалом I , является замыканием коммутаторной подгруппы. Это замкнутая нормальная подгруппа в S , которую будем называть коммутантом $\mathcal{D}S$. Итерируя эту процедуру, получаем цепочку замкнутых подгрупп $\mathcal{D}^n S$. Если S разрешима как абстрактная группа, то последовательность $\mathcal{D}^n S$ достигает $\{e\}$.

Все эти рассуждения могут быть проведены и в общем случае. Пусть G - аффинная групповая суперсхема над полем K . Имеем отображения $G^{2n} \rightarrow G$, которые соответствуют $K[G] \rightarrow \otimes^{2n} K[G]$ с ядрами I_n , удовлетворяющими условию $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \dots$. Если $f \in I_{2n}$, то $\Delta(f)$ обращается в нуль на $K[G]/I_n \otimes K[G]/I_n$ в силу того, что при перемножении двух произведений по n коммутаторов образуется произведение $2n$ коммутаторов. Поэтому $I = \bigcap I_n$ определяет замкнутую подгруппу $\mathcal{D}S$.

Будем называть супергруппу G *разрешимой*, если $\mathcal{D}^n G$ тривиальна для некоторого n .

Замечание 2. Все коммутаторы $G(R)$ лежат в $\mathcal{D}G(R)$, $\mathcal{D}G$ - нормальная подгруппа в G .

Теорема 2. Пусть G - алгебраическая супергруппа. Если G связна, то и $\mathcal{D}G$ связна.

Доказательство.

□

Утверждение 3. $I = \bigcap I_n$ - суперидеал Хопфа

Утверждение 4. $\mathcal{D}G$ - нормальная подгруппа в G .

Утверждение 5. $I_{n+1} \subseteq I_n$

Утверждение 6. I - наименьшая замкнутая подгруппа G , содержащая произведение любых коммутаторов

Утверждение 7. G абелева $\Leftrightarrow \text{Lie}(G)$ абелева.

Доказательство. Достаточно доказать, что $\text{Dist}(G)$ абелева $\Leftrightarrow K[G]^*$ кокоммутативна.

6. Аналог теоремы Каца

Лемма 4. Обозначим $\text{Lie}(G) = L = L_0 \oplus L_1$. $\text{Lie}(G_{ev}) = L_0$.

Доказательство. □

Лемма 5. Аффинная групповая суперсхема G абелева $\Leftrightarrow \text{Lie}(G)$ абелева.

Доказательство. □

Теорема 3 (Кац). Супералгебра Ли $L = L_0 \oplus L_1$ разрешима \Leftrightarrow разрешима алгебра Ли L_0 . Доказательство можно найти в статье [2].

Теорема 4. Пусть $\text{char } K = 0$, G - связная аффинная групповая суперсхема. G разрешима $\Leftrightarrow \text{Lie}(G)$ разрешима $\Leftrightarrow G_{ev}$ разрешима.

Доказательство. 1) тут ссылка на теорему Каца и на предыдущие леммы. из них следует вторая эквивалентность

2) Предположим, что G разрешима, т.е. для некоторого $n \in \mathbb{N}$

$$G \triangleright G' \triangleright G'' \triangleright \dots \triangleright G^{(n)} = 1$$

Рассмотрим $G \triangleright G' \triangleright G''$, следовательно, имеем точную последовательность

$$1 \rightarrow G' \rightarrow G \rightarrow G/G' \rightarrow 1,$$

которая эквивалентна точной последовательности для супералгебр Ли:

$$0 \rightarrow \text{Lie}(G') \rightarrow \text{Lie}(G) \rightarrow \text{Lie}(G/G') \rightarrow 0$$

. Все факторы субнормальной цепочки абелевы $\Leftrightarrow G/G'$ абелев, откуда по лемме 5 получаем, что $\text{Lie}(G/G')$ абелева. □

Список литературы

- [1] J.C. Jantzen. *Representations of Algebraic Groups*. Academic Press, Inc., Orlando, Florida, 1987.
- [2] V.G. Кас. Lie superalgebras. *Advanced in Mathematics*, 26:8–96, 1977.
- [3] W.C. Waterhouse. *Introduction to Affine Group Schemes*. Springer Verlag, 1979.
- [4] A.N. Zubkov. Affine quotients of supergroups. *Transformation Groups*, 14(3):713–745, 2009.