ФГБОУ ВПО «Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского»

Институт математики и информационных технологий

Кафедра алгебры

Аналог теоремы Каца для разрешимых аффинных групповых суперсхем

Дипломная работа

Специальность «Прикладная математика и информатика»

Выполнил:
студент группы МПС-703-О
Уляшев Павел Александрович

____

(подпись студента)

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Зубков Александр Николаевич

____

(подпись руководителя)

Омск 2012

Введение

Главной задачей данной работы было изучение основ теории аффинных групповых схем и обобщение некоторых результатов на суперслучай. Аффинные схемы были введены А. Гротендиком в 1950-х гг. при построении теории схем как обобщение понятий аффинного и квазипроективного многообразий. Одним из главных инструментов теории аффинных схем является теория категорий, хотя изначально она строилась без нее, в чем можно убедиться, изучая традиционную алгебраическую геометрию ([11]). Основные понятия теории категорий можно найти в [9] или в работе С. Маклейна, одного ее авторов [10].

Аффинные групповые суперсхемы, или, как их часто называют, аффинные супергруппы (в данной работе я буду для ясности использовать полное название), и супералгебры Ли возникают в контексте теоретической физики. Если конкретно, то понятие супергруппы возникает при изучении суперсимметрии, которая является одной из составляющих теории струн. Теория струн, в свою очередь, является попыткой объединить квантовую механику и общую теорию относительности.

Основной задачей этой работы является аналог теоремы Каца для разрешимых аффинных групповых суперсхем. В. Г. Кац в работе [2] о супералгебрах Ли доказал, что супералгебра Ли разрешима тогда и только тогда, когда разрешима ее четная часть. Аналогично тому, что категория аффинных групповых схем дуальна категории алгебр Хопфа ([5]), аффинные групповые суперсхемы дуальны супералгебрам Хопфа, что позволяет развивать одну и ту же теорию либо в терминах суперсхем, либо в терминах супералгебр Хопфа в зависимости от ситуации.

В первом разделе собраны необходимые предварительные сведения: понятия супералгебры и супермодуля над супералгеброй, K-функторы как функторы из категории супералгебр над полем K в категорию множеств. Во втором разделе определяется основной объект исследований этой работы — аффинные групповые суперсхемы. Затем определяется супералгебра Хопфа как объект, дуальный аффинной групповой суперсхеме. Такой порядок подачи материала обусловлен тем, что сначала логичным образом вводятся кообъекты, и только затем приводятся формальные определения.

Третий раздел описывает супералгебры распределений аффинных групповых суперсхем и их связь с супералгебрами Ли. Некоторые дополнительные сведения для суперслучая можно найти в [6], исходные понятия алгебр распределений аффинных групповых схем можно найти в [5]. Вводится понятие функтора супералгебры Ли $\mathbf{Lie}(G)$.

В четвертом разделе вводятся понятия связной ($G^{(0)}$) и псевдосвязной ($G^{[0]}$) компонент аффинной групповой суперсхемы G, а также их эквивалентность для случая алгебраических аффинных групповых суперсхем над полем характеристики 0. Основной результат этого раздела — теорема о том, что максимальному абелеву суперидеалу I связной аффинной групповой суперсхемы соответствует нормальная суперподсхема H, такая что $\mathrm{Lie}(H) = I$.

В пятом разделе понятие разрешимой аффинной групповой схемы ([5], гл. 10) переносится на суперслучай, доказывается обоснованность этой аналогии. Главным результатом является теорема о том, что коммунант связной алгебраической аффинной групповой суперсхемы связен, что будет затем использовано при доказательстве основной теоремы этой работы.

В заключительной части доказывается аналог теоремы Каца о разрешимости аффинных групповых суперсхем.

Иногда в работе встречается понятие аффинной (групповой) схемы, не приведенное в тексте работы. Все понятия для аффинных схем аналогичны соответствующим понятиям для аффинных суперсхем, если супералгебры заменить на алгебры.

Содержание

1. Предварительные сведения

1.1. Супералгебры и супермодули

Следуя [3] и [8], приведем некоторые стандартные определения и теоремы.

Везде далее K — алгебраически замкнутое поле характеристики p (возможно, $p = 0$). Если $p = 0$, то предполагается, что $p \neq 2$. Супераналог произвольной алгебраической системы определяется введением $\mathbb{Z}_2$-градуировки, относительно которой все структурные функции однородны. Так, супералгебра — $\mathbb{Z}_2$-градуированное пространство, такое что четность произведения двух $\mathbb{Z}_2$-однородных элементов равна сумме их четностей по модулю 2. Если не оговорено противное, то морфизм двух суперсистем одинаковой сигнатуры сохраняет $\mathbb{Z}_2$-градуировку. Подробнее с градуированными пространствами можно познакомиться в [7].

Приведем более формальные определения:

Определение 1. *Будем называть (векторным) суперпространством пространство* $V = V_0 \oplus V_1$ *над полем* K. *Если* $\dim V_0 = m, \dim V_1 = n$, *то* $\dim V = m + n, \operatorname{sdim} V = (m, n)$. *Элементы из* V_0 *называются четными, из* V_1 *— нечетными.*

Определение 2. *Супералнеброй над полем* K *называется суперпространство* $A = A_0 \oplus A_1$, *наделенное структурой унитарной ассоциативной* K*-алгебры, такое что* $A_i A_j \subset A_{i+j}$, *где* $i, j = 0, 1$.

Под *суперидеалом* A подразумевается однородный идеал алгебры.

Пусть V, W — суперпространства. Их тензорное произведение наделяется структурой суперпространства по правилу $|v \otimes w| = |v| + |w| \pmod 2$, где прямыми скобками обозначена четность соответствующего элемента. Итерируя эту процедуру, можно определить тензорное произведение любого числа суперпространств.

Для произвольных суперпространств V, W пространство $\operatorname{Hom}_K(V, W)$ наделяется стандартной структурой суперпространства по правилу $\varphi \in \operatorname{Hom}_K(V, W)_i$, $i = 0, 1$, если $\varphi(V_s) \subseteq W_k$, где $i + s \equiv K \pmod 2$. В частности, если определить на K структуру суперпространства с $K_0 = K$, $K_1 = 0$, тогда $V^* = \operatorname{Hom}_K(V, K) = V_0^* \oplus V_1^*$.

Определение 3. *Пусть* A *— супералгебра. (Левым)* A*-супермодулем называется суперпространство* V, *которое является* A*-модулем в обычном смысле, такое что* $A_i V_j \subseteq V_{i+j}$ *для* $i, j \in \mathbb{Z}_2$. *Правый супермодуль определяется аналогично.*

Под гомоморфизмом $f : V \to W$ левых A-супермодулей подразумевается линейное отображение (не обязательно однородное), такое что

$$f(av) = (-1)^{|f||a|} a f(v), \qquad a \in A,\ v \in V,$$

а для правых A-супермодулей

$$f(va) = f(v)a, \qquad a \in A,\ v \in V.$$

Пусть A, B — суперале́бры, а V, W — (левые) супермодули над A и B соответственно. Тогда тензорное произведение $A \otimes B$ имеет структуру супералгебры относительно умножения $a \otimes b \cdot c \otimes d = (-1)^{|b||c|} ac \otimes bd,\ a, c \in A,\ b, d \in B$. Более того, суперпространство $V \otimes W$ будет $A \otimes B$-супермодулем относительно действия $a \otimes b \cdot v \otimes w = (-1)^{|b||v|} ac \otimes bd,\ a, \in A,\ b \in B,\ v \in V,\ w \in W$.

Супералгебра A называется *коммутативной*, если для любых однородных $a, c \in A$ выполняется $ac = (-1)^{|a||c|} ca$. Несложно убедиться, что если супералгебры A и B коммутативны, то супералгебра $A \otimes B$ также коммутативна.

1.2. K-функторы

Определения, данные в [1] для обычного случая, можно почти дословно перенести на суперслучай. Некоторые из них можно найти в [6].

Введем некоторые предварительные обозначения. K – произвольное поле, $\mathbf{SAlg}_K$ — категория супералгебр над полем K, **Sets** — категория множеств, **Gr** — категория групп.

Определение 4. *K-функтором назовем функтор из категории $\mathbf{SAlg}_K$ в* **Sets**.

Для K-функторов X, X' обозначим через $\mathrm{Mor}(X, X')$ множество морфизмов из X в X'.

Определение 5. *Пусть X — K-функтор. K-функтор Y называется подфунктором функтора X, если $\forall\ A, A' \in \mathbf{SAlg}_K\ \ \forall\, \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SAlg}_K}(A, A')$ выполнены условия: $Y(A) \subset X(A)$ и $Y(\varphi) = X(\varphi)|_{Y(A)}$.*

Для любого семейства подфункторов $\{Y_i\}_{i \in I} \subset X$ определим функтор-пересечение $\bigcap_{i \in I} Y_i$ следующим образом:

$$(\bigcap_{i \in I} Y_i)(A) = \bigcap_{i \in I} Y_i(A).$$

Для $f \in \mathrm{Mor}(X, X')\ \forall\ Y' \subseteq X'$ определим функтор-прообраз

$$(f^{-1}(Y'))(A) = f(A)^{-1}(Y'(A)) \qquad \text{для } A \in \mathbf{SAlg}_K.$$

Нетрудно убедиться, что $\bigcap_{i \in I} Y_i$ и $f^{-1}(Y')$ — подфункторы X.

Определение 6. *Прямым произведением K-функторов X_1 и X_2 называется функтор $(X_1 \times X_2)(A) = X_1(A) \times X_2(A)$ для $A \in \mathbf{SAlg}_K$.*

Проекции $p_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ являются морфизмами функторов, и $(X_1 \times X_2, p_1, p_2)$ обладает обычными свойствами прямого произведения.

2. Аффинные групповые суперсхемы

2.1. Аффинные суперсхемы

Определение 7. *K-функтор $SSp\,R$, определенный как*

$$(SSp\,R)(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{SAlg}_K}(R, A) \qquad \text{для } A \in \mathbf{SAlg}_K,$$

называется аффинной суперсхемой. Супералгебра $R \in \mathbf{SAlg}_K$ называется координатной супералгеброй суперсхемы $SSp\,R$. Если $X = SSp\,R$, то R обозначается $K[X]$.

Пусть X_1, X_2 — аффинные суперсхемы. Тогда

$$K[X_1 \times X_2] = K[X_1] \otimes K[X_2]. \tag{1}$$

Определение 8. *Аффинная суперсхема $\mathbf{A}^{m|n} = SSp\,K[t_1, \ldots, t_m|z_1, \ldots, z_n]$ называется аффинным $(m|n)$-суперпространством.*

Очевидно, что $\mathbf{A}^{m|n}(B) = B_0^m \oplus B_1^n$ для $B \in \mathbf{SAlg}_K$. В частности, $\mathbf{A}^{1|1}(B) = B$ для любой супералгебры B.

Определение 9. *Аффинная суперсхема X называется алгебраической, если $K[X] \simeq K[t_1, \ldots, t_m|z_1, \ldots, z_n]\,/\,I$ для некоторых $m, n \in \mathbb{N}$ и конечнопорожденного суперидеала I.*

Определение 10. *Аффинная суперсхема X называется редуцированной, если $K[X]$ не содержит нильпотентных элементов, отличных от 0.*

Определение 11. *Пусть X — аффинная суперсхема, I — суперидеал $K[X]$. Подфунктор функтора X, определенный как*

$$\begin{aligned} V(I)(A) &= \{\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SAlg}_K}(R, A) \mid \varphi(I) = 0\} \\ &\simeq \{x \in (SSp\,R)(A) \mid f(x) = 0 \ \forall\ f \in I\}, \end{aligned}$$

называется замкнутым подфунктором, соответствующим суперидеалу I.

Отображение $I \mapsto V(I)$ из множества суперидеалов $K[X]$ в множество подфункторов X инъективно. Более точно,

Утверждение 1. *Для двух суперидеалов I, I' супералгебры $K[X]$*

$$I \subset I' \Leftrightarrow V(I) \supset V(I'). \tag{2}$$

Доказательство. Прямое утверждение тривиально, поэтому докажем верность обратного. Пусть $V(I') \subset V(I)$. Рассмотрим каноническое отображение $u : K[X] \to K[X]/I'$. $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SAlg}_K}(K[X], K[X]/I') = SSp\,(K[X]/I')$. Т.к. $u(I') = 0$, то $u \in V(I')(K[X]/I')$. Из условия $V(I') \subset V(I)$ следует, что $u \in V(I')(K[X]/I') \Rightarrow u(I) = 0 \Rightarrow I \subset I'$. $\square$

Замкнутый подфунктор является аффинной суперсхемой, т.к. $V(I) \simeq SSp\,(K[X]/I)$. Замкнутые подфункторы определяют топологию на аффинной суперсхеме $SSp\,R$:

$$V(R) = \varnothing, \quad V(0) = SSp\,R,$$
$$\bigcap_{j\in J} V(I_j) = V\left(\sum_{j\in J} I_j\right), \quad \bigcup_{j\in J} V(I_j) = V\left(\prod_{j\in J} I_j\right)$$

для любого семейства суперидеалов $\{I_j\}_{j\in J} \subset R$.

Для любого подфунктора Y аффинной суперсхемы X существует наименьший замкнутый подфунктор $\overline{Y}$ в X, такой что $Y(A) \subset \overline{Y(A)} \quad \forall\, A \in \mathbf{SAlg}_K$ (пересечение всех замкнутых подфункторов с таким свойством). Подфунктор $\overline{Y}$ называется *замыканием* Y.

Пусть X_1, X_2 — аффинные суперсхемы, $I_1 \subset K[X_1]$, $I_2 \subset K[X_2]$ — суперидеалы. Несложно проверить, что

$$V(I_1) \times V(I_2) \simeq V(I_1 \otimes K[X_2] + K[X_1] \otimes I_2). \tag{3}$$

2.2. Лемма Ионеды

Лемма Ионеды — фундаментальное утверждение теории категорий — позволяет вложить любую категорию $\mathcal{C}$ в категорию функторов, определенных в $\mathcal{C}$. В общем виде Лемму Ионеды можно найти в [10], в этой работе подробнее остановимся на случае для категории $\mathbf{SAlg}_K$.

Лемма 1 (Ионеда)**.** $\forall\ R \in \mathbf{SAlg}_K\ \forall\ K$*-функтора* X *существует канонический изоморфизм*

$$\mathrm{Mor}(SSp\,R, X) \simeq X(R),$$

который задается отображением $f \mapsto f(R)(id_R)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{Mor}(SSp\,R, X)$. Сначала убедимся, что $f(R)(id_R) \in X(R)$. Это следует из того, что $f(R) : (SSp\,R)(R) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{SAlg}_K}(R, R) \to X(R)$. Далее убедимся, что приведенное отображение действительно является изоморфизмом.

По определению морфизма функторов $\forall\ A \in \mathbf{SAlg}_K \quad \forall\ u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SAlg}_K}(B, A)$ коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} (SSp\,R)(B) & \xrightarrow{f(B)} & X(B) \\ {\scriptstyle (SSp\,R)(u)}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle X(u)} \\ (SSp\,R)(A) & \xrightarrow{f(A)} & X(A) \end{array} \tag{4}$$

Возьмем R в качестве B и получим, что $f(A) \circ X(u) = (SSp\,R)(u) \circ f(R)$. Обозначим

$x_f = f(R)(id_R)$. Принимая во внимание, что $(SSp\,R)(u)(id_R) = u \circ id_R$, получаем

$$f(A)(u) = X(u)(x_f).$$

Отсюда видно, что f однозначно определяется x_f. Осталось построить обратное отображение. Пусть $x \in X(R)$ и $A \in \mathbf{SAlg}_K$. Зададим $f_x(A) : SSp\,R \to X(A)$ отображением $u \mapsto X(u)(x)$. Несложно убедиться, что $f_x \in \mathrm{Mor}(SSp\,R, X)$ и что $x \mapsto f_x$ обратно отображению $f \mapsto f_x$. $\square$

Следствие 1. *Если взять $X = SSp\,R'$, то получим*

$$\mathrm{Mor}(SSp\,R, SSp\,R') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{SAlg_K}}(R', R) \tag{5}$$

для любых супер態алгебр R, R'.

Обозначим эту биекцию $f \mapsto f^*$ и будем называть f^* *коморфизмом*, соответствующим f. Таким образом, мы получили дуальность категорий аффинных суперсхем и суперaлгебр.

2.3. Групповые K-функторы и аффинные групповые суперсхемы

Определение 12. *Групповым K-функтором будем называть функтор из $\mathbf{SAlg}_K$ в* $\mathbf{Gr}$.

Если взять композицию группового функтора с забывающим функтором из $\mathbf{Gr}$ в $\mathbf{Sets}$, то групповой K-функтор можно рассматривать как K-функтор. Поэтому все результаты для K-функторов можно перенести на групповые K-функторы.

Пусть G, H — групповые K-функторы. Обозначим через $\mathrm{Mor}(G, H)$ множество морфизмов из G в H, если рассматривать G и H как K-функторы; через $\mathrm{Hom}(G, H)$ множество морфизмов групповых функторов.

Определение 13. *Аффинная групповая суперсхема — групповой K-функтор, который является аффинной суперсхемой, если его рассматривать как функтор.*

Определение 14. *Пусть G — групповой K-функтор. H называется групповым подфунктором G, если H — подфунктор G и $\forall\ A \in \mathbf{SAlg}_K$ $H(A)$ — подгруппа в $G(A)$.*

Нетрудно убедиться, что пересечение групповых подфункторов — групповой подфунктор, прообраз группового подфунктора относительно морфизма функторов — групповой подфунктор.

Определение 15. *Пусть G — аффинная групповая суперсхема. H — замкнутая аффинная групповая суперподсхема, если H — групповой подфунктор G, который замкнут, если рассматривать H как подфунктор аффинной суперсхемы G.*

2.4. Дуальность категорий аффинных групповых суперсхем и супералгебр Хопфа

Пусть G — групповой K-функтор, $A, B \in \mathbf{SAlg}_K$, $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SAlg_K}}(A, B)$, Групповая структура на $G(A)$ определяет морфизмы K-функторов (для каждого функтора приведена коммутативная диаграмма из определения морфизма функторов):

умножение $m_G : G \times G \to G$ ($m_G(A)$ — умножение в группе $G(A)$),

$$\begin{tikzcd} G(A) \times G(A) \arrow[r, "m_G(A)"] \arrow[d, "G(u)\times G(u)"'] & G(A) \arrow[d, "G(u)"] \\ G(B) \times G(B) \arrow[r, "f(A)"] & G(B) \end{tikzcd} \tag{6}$$

единица $1_G : SSp\,K \to G$ ($1_G(A) : f \mapsto 1_{G(A)}$ для $f \in (SSp\,K)(A)$),

$$\begin{tikzcd} (SSp\,K)(A) \arrow[r, "1_G(A)"] \arrow[d, "(SSp\,K)(u)"'] & G(A) \arrow[d, "(SSp\,K)(u)"] \\ (SSp\,K)(B) \arrow[r, "1_G(A)"] & G(B) \end{tikzcd} \tag{7}$$

обратная функция $i_G : G \to G$ ($i_G(A) : g \mapsto g^{-1}$ для $g \in G(A)$)

$$\begin{tikzcd} G(A) \arrow[r, "i_G(A)"] \arrow[d, "G(u)"'] & G(A) \arrow[d, "G(u)"] \\ G(B) \arrow[r, "i_G(A)"] & G(B) \end{tikzcd} \tag{8}$$

Пусть G — аффинная групповая суперсхема. Согласно следствию 1 каждому из этих морфизмов единственным образом советствует свой коморфизм.

$$\begin{aligned} \text{коумножение} \quad & \Delta_G = m_G^* : K[G] \to K[G] \otimes K[G], \\ \text{коединица} \quad & \varepsilon_G = 1_G^* : K[G] \to K, \\ \text{антипод} \quad & s_G = i_G^* : K[G] \to K[G], \end{aligned}$$

Из аксиом групповой структуры следуют аксиомы коумножения, коединицы и антипода. Ниже эти аксиомы записаны в виде коммутативных диаграмм. Ассоциативность умножения $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$ переходит в коассоциативность коумножения:

$$\begin{tikzcd} K[G] \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] & K[G]\otimes K[G] \arrow[d, "id\otimes\Delta"] \\ K[G]\otimes K[G] \arrow[r, "\Delta\otimes 1"] & K[G]\otimes K[G]\otimes K[G] \end{tikzcd} \tag{9}$$

Аксиома единицы $eg = ge = g$ переходит в аксиому коединицы:

$$\begin{tikzcd} K\otimes K[G] \arrow[r, equal] \arrow[d, "id\otimes id"] & K[G] \arrow[r, equal] \arrow[d, "\Delta\otimes id"] & K[G]\otimes K \arrow[d, "id\otimes id"] \\ K\otimes K[G] & K[G]\otimes K[G] \arrow[l, "\varepsilon\otimes 1"'] \arrow[r, "1\otimes\varepsilon"] & K[G]\otimes K \end{tikzcd} \tag{10}$$

Аксиома обратного элемента $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ переходит в аксиому антипода:

$$\begin{tikzcd} K[G]\otimes K[G] \arrow[r, "s\otimes id"] & K[G]\otimes K[G] \arrow[drr, "m"] & & \\ K[G] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[rr, "\varepsilon"] & & K \arrow[r, "1"] & K[G] \\ K[G]\otimes K[G] \arrow[r, "id\otimes s"] & K[G]\otimes K[G] \arrow[urr, "m"'] & & \end{tikzcd} \tag{11}$$

Следуя Свидлеру, будем писать $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$ (подробнее о коструктурах и соответствующих обозначениях будет рассказано ниже). Тогда вышеуказанные аксиомы записываются в виде:

$$(\Delta\otimes id)\circ\Delta = \Delta\circ(id\otimes\Delta) \qquad \sum c_{11}\otimes c_{12}\otimes c_2 = \sum c_1\otimes c_{21}\otimes c_{22} =: \sum c_1\otimes c_2\otimes c_3,$$

$$(\varepsilon\otimes id)\circ\Delta = id = (id\otimes\varepsilon)\circ\Delta \qquad c = \sum\varepsilon(c_1)c_2 = \sum c_1\varepsilon(c_2),$$

$$m\circ(id\otimes s)\circ\Delta = \eta\circ\varepsilon = m\circ(s\otimes id)\circ\Delta \qquad \varepsilon(c) = \sum c_1 s(c_2) = \sum s(c_1)c_2,$$

где η — единица $K[G]$, m — умножение в $K[G]\otimes K[G]$.

Определение 16. *Суперaлгебра вместе с коумножением, коединицей и антиподом, удовлетворяющими аксиомам 9, 10, 11, называется суперaлгеброй Хопфа.*

Таким образом, имеем дуальность категорий аффинных групповых суперсхем и супералгебр Хопфа.

Определение 17. *Пусть — супералгебра Хопфа. Суперидеал I называется суперидеалом Хопфа, если* $\Delta(I) \subseteq C \otimes I + I \otimes C,\ I \subseteq \mathcal{M} = \ker\varepsilon,\ s(I) \subseteq I$.

Аналогично топологии, определенной на аффинной суперсхеме в пункте 2.1, на аффинной групповой суперсхеме топология определяется замкнутыми подфункторами $V(I)$, соответствующими супеидеалам Хопфа.

2.5. Суперкоалгебры и суперкомодули

Для простоты изложения материала супералгебры Хопфа были определены как объекты, дуальные аффинным групповым суперсхемам. Можно было сначала определить супералгебры Хопфа, изначально приняв аксиомы 9, 10, 11, а затем доказать дуальность. В этом разделе все-таки будут приведены некоторые стандартные понятия. Подробное изложение для случая обычных, неградуированных систем, можно найти в [4].

Суперпространство, наделенное коумножением и коединицей с соответствующими аксиомами называется *суперкоалгеброй* (соответственно, *коалгеброй*, если рассматривать неградуированные алгебры).

Определение 18. *Суперкоалгебра называется кокоммутативной, если*

$$\Delta_C(c) = \sum c_1 \otimes c_2 = (-1)^{|c_1||c_2|} c_2 \otimes c_1.$$

Супералгебра, которая в то же время является и суперкоалгеброй, называется *супербиалгеброй.* Таким образом, супералгебра Хопфа — супербиалгебра с антиподом. В супербиалгебре Δ и ε являются гомоморфизмами супералгебры, m и η — гомоморфизмами суперкоалгебры.

Антипод s является антиэндоморфизмом C как супералгебры и как суперкоалгебры. Для нас будет важно, что одним из уловий антиэндоморфизма является соотношение

$$\varepsilon s(c) = \varepsilon(c). \tag{12}$$

Определение 19. *V называется правым суперкомодулем над суперкоалгеброй C, если задано линейное отображение $\tau : V \to V \otimes C$, называемое кодействием суперкоалгебры на V, которое сохраняет градуировку и для которого следующие диаграммы коммутативны:*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\tau"'] & V \otimes C \arrow[d, "\tau\otimes id"] \\ V \otimes C \arrow[r, "id\otimes\Delta"] & V \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} V \otimes C \arrow[r, "id\otimes\varepsilon"] & V \otimes K \arrow[dl, "\simeq"] \\ V \arrow[u, "\tau"] & \end{tikzcd} \tag{13}$$

Любая суперкоалгебра может быть наделена структурой суперкомодуля над собой, тогда кодействием является коумножение. Пусть V, W — (правые) суперкомодули над суперкоалгебрами C и B соответственно. Тензорное произведение $C \otimes B$ наделяется структурой суперкоалгебры по правилу $\Delta_{C\otimes B}(c) = (c \otimes b) = \sum(-1)^{|b_1||c_2|}(c_1 \otimes b_1) \otimes (c_2 \otimes b_2)$, где $\Delta_C(c) = \sum c_1 \otimes c_2,\ \Delta_B(b) = \sum b_1 \otimes b_2$. Более того, суперпространство $V \otimes W$ будет $C \otimes B$-суперкомодулем относительно кодействия $\tau_{v\otimes W}(v \otimes w) = \sum(-1)^{|w_1||c_2|}(v_1 \otimes w_1) \otimes (c_2 \otimes b_2)$, где $\tau_V(v) = \sum v_1 \otimes c_2,\ \tau_W(w) = \sum w_1 \otimes b_2$.

Если $\varphi : C \to C'$ — гомоморфизм суперкоалгебр, то произвольный C-суперкомодуль будет и C'-суперкомодулем относительно кодействия $(id \otimes \varphi)_{\tau_V}$. Если C — супербиалгебра, то отображение $m : C \otimes C \to C$, индуцированное умножением, является гомоморфизмом суперкоалгебр. В частности, если V, W — левые -суперкомодули, то мы получаем диагональное кодействие $(id \otimes m)_{\tau_{V\otimes W}}$ супербиалгебры C на $V \otimes W$. Более того $V \otimes W$ и $W \otimes V$ изоморфны как C-суперкомодули относительно изоморфизма перестановки $t : v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|} w \otimes v,\ v \in V,\ w \in W$.

3. Супералгебры распределений и их связь с супералгебрами Ли

Супералгебры распределений позволяют установить связь аффинных групповых суперсхем с супералгебрами Ли, а введение функтора $\mathbf{Lie}(G)$ позволяет использовать функторный язык для изучения супералгебр Ли. Доказательства утверждений, приведенных в этом разделе, опущены. Их можно найти в [1, 5, 6].

3.1. Супералгебры распределений

Пусть X — аффинная суперсхема. Повторим определения, приведенные в [6] и [1]. Элемент из $\mathrm{Dist}_n(X, \mathcal{M}) = (K[X]/\mathcal{M}^{n+1})^*$ будем называть *распределением* на X с носителем в $\mathcal{M}$ порядка $\leqslant n$, где $\mathcal{M}$ — максимальный суперидеал супералгебры $K[X]$. Имеем

$$\bigcup_{n\geqslant 0} \mathrm{Dist}_n(X, \mathcal{M}) = \mathrm{Dist}(X, \mathcal{M}) \subseteq K[X]^*.$$

Если $g : X \to Y$ — морфизм аффинных суперсхем, то он порождает морфизм суперпространств $dg_{\mathcal{M}} : \mathrm{Dist}(X, \mathcal{M}) \to \mathrm{Dist}(Y, (g^*)^{-1}(\mathcal{M}))$, такой что

$$dg_{\mathcal{M}}(\mathrm{Dist}_n(X, \mathcal{M})) \subseteq \mathrm{Dist}_n(Y, (g^*)^{-1}(\mathcal{M})) \qquad \forall n \geqslant 0.$$

Если $X = V(I)$ — замкнутая подсуперсхема в Y, то $\mathrm{Dist}(X, \mathcal{M})$ отождествляется с $\{\varphi \in \mathrm{Dist}(Y, \mathcal{M}) \mid \varphi(I) = 0\}$, где $I \subseteq \mathcal{M}$.

Если X — алгебраическая аффинная групповая суперсхема и $\mathcal{M} = \ker \varepsilon_X$, то обозначим $\mathrm{Dist}(X, \mathcal{M})$ через $\mathrm{Dist}(X)$. В этом случае $\mathrm{Dist}(X)$ имеет структуру супералгебры Хопфа с умножением $\varphi\psi(f) = \sum(-1)^{|\varphi||\psi|}\varphi(f_1)\psi(f_2)$ для $\varphi, \psi \in \mathrm{Dist}(X), f \in K[X]$ и коумножением $\Delta_X(f) = \sum f_1 \otimes f_2$, с единицей ε_X, коединицей $\varepsilon_{\mathrm{Dist}(X)} : \varphi \mapsto \varphi(1)$ и антиподом $s_{\mathrm{Dist}(X)}(\varphi)(f) = \varphi(s_X(f))$ для $\varphi \in \mathrm{Dist}(X)$ и $f \in K[X]$.

$\mathrm{Dist}(X)$ — фильтрованная алгебра, т.е. $\forall\ m, n \geqslant 0 \mathrm{Dist}_m(X)\mathrm{Dist}_n(X) \subseteq \mathrm{Dist}_{m+n}(X)$. Рассмотрим суперпространство $\mathrm{Lie}(X) = \{\varphi \in \mathrm{Dist}_1(X) \mid \varphi(1) = 0\}$. Его можно наделить структурой супералгебры Ли, положив $[\varphi, \psi] = \varphi\psi - (-1)^{|\varphi||\psi|}\varphi\psi$.

Замечание 1. *Супералгебра Ли не является алгеброй Ли в обычном смысле — аксиомы выполняются в учетом четности элементов, а именно* $\forall\ \varphi, \psi, \rho \in \mathrm{Lie}(X)$

$$[\varphi, \psi] = (-1)^{|\varphi||\psi|}[\psi, \varphi],$$

$$(-1)^{|\rho||\varphi|}[[\varphi, \psi], \rho] + (-1)^{|\psi||\rho|}[[\rho, \varphi], \psi] + (-1)^{|\varphi||\psi|}[\psi, [\rho, \varphi]] = 0.$$

Как супералгебра Хопфа $\mathrm{Dist}(X)$ кокоммутативна, т.е. для $\varphi \in \mathrm{Dist}(X)$

$$\Delta(\varphi) = \sum \varphi_1 \otimes \varphi_2 = \sum (-1)^{|\varphi_1||\varphi_2|}\varphi_2 \otimes \varphi_1.$$

3.2. Действие сопряжения и функтор $\mathbf{Lie}(G)$

Определение 20. *Пусть* $A \in \mathbf{SAlg}_K$. *Супералгеброй дуальных чисел называется* $A[\varepsilon_0, \varepsilon_1] = \{a + \varepsilon_0 b + \varepsilon_1 c \mid a, b, c \in A\}$, $|\varepsilon_i| = i$, $\varepsilon_i \varepsilon_j = 0$, $i, j \in \{0, 1\}$.

Имеем проективный $p_A : A[\varepsilon_0, \varepsilon_1] \to A$ и инъективный $i_A : A \to A[\varepsilon_0, \varepsilon_1]$ морфизмы супералгебр, определенные как $a + \varepsilon_0 b + \varepsilon_1 c \mapsto a$ и $a \mapsto a$ соответственно.

Определение 21. *Функтором супералгебры Ли будем называть функтор* $\mathbf{Lie}(G)$, *определенный как*

$$\mathbf{Lie}(G)(A) = \ker\left(G(A[\varepsilon_0, \varepsilon_1]) \xrightarrow{G(p_A)} G(A)\right), \qquad A \in \mathbf{SAlg}_K.$$

Пусть V — суперпространство. Определим функтор V_a из категории $\mathbf{SAlg}_K$ в категорию векторных суперпространств: $V_a(A) = V \otimes A$.

Лемма 2. *Существует изоморфизм абелевых групповых функторов* $\mathrm{Lie}(G)_a \simeq \mathbf{Lie}(G)$, *который задается отображением*

$$(v \otimes a)(f) = \varepsilon_G(f) + (-1)^{|a||f|} \varepsilon_{v \otimes a} v(f) a, \qquad v \in \mathrm{Lie}(G) = (\mathcal{M}/\mathcal{M}^2)^*, a \in A, f \in K[G].$$

Для более подробной информации см. [5].

Если мы отождествляем $\mathrm{Lie}(G) \otimes A$ с $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{M}/\mathcal{M}^2, A)$ при помощи отображения $(v \otimes a)(f) = (-1)^{|a||f|} v(f) a$, то вышеуказанный изоморфизм может быть представлен отображением

$$u \mapsto \varepsilon_G + \varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1, \qquad u \in \mathrm{Hom}_K(\mathcal{M}/\mathcal{M}^2, A).$$

Определение 22. *Рассмотрим действие аффинной групповой суперсхемы* G *на функтор* $\mathbf{Lie}(G)$:

$$(g, x) \mapsto G(i_a)(g)\, x\, G(i_A)(g)^{-1}, \qquad g \in G(A),\ x \in \mathbf{Lie}(G)(A),\ A \in \mathbf{SAlg}_K.$$

Это действие называется сопряжением и обозначается $\mathbf{Ad}$.

Лемма 3. *Сопряжение линейно. В частности, оно порождает морфизм аффинных групповых суперсхем* $G \to \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(G))$.

4. Связные аффиные групповые суперсхемы

В этом разделе будут введены понятия связности ([5]) и псевдосвязности ([6]) аффинной групповой суперсхемы, а также указана их эквивалентность для алгебраической аффинной групповой суперсхемы над полем характеристики 0. Доказательства сопутствующих фактов в основном опущены, поскольку опираются на понятия, которые мы не будем вводить в этой работе.

4.1. Топология Зарисского и связность аффинных груповых суперсхем

Сначала рассмотрим понятие связной компоненты для обычного случая, который подробно описан в [5], главы 5-6, а затем перенесем полученные понятия на суперслучай.

Пусть A — коммутативная алгебра. Множество $\{p \mid p$ — простой идеал алгебры $A\} = Spec\, A$ называется *спектром* алгебры A. Подмножество спектра называется замкнутым, если оно имеет вид $Z(I) = \{p \in Spec\, A \mid I \subseteq p\}$. для некоторого идеала I. Соотношения $\bigcap Z(I_n) = Z\left(\bigcap I_n\right),\ Z(I) \cup Z(J) = Z(IJ)$ определяют *топологию Зарисского* на $Spec\, A$.

Аффинную групповую схему X будем называть *связной*, если $Spec\, K[G]$ связен как топологическое пространство. По теореме из пункта 6.6 из [5] X связна $\Leftrightarrow$ $Spec\, A$ неприводим, т.е. в $K[G]$ нет нетривиальных идемпотентов.

Теперь перейдем к суперслучаю. Пусть A — коммутативная супералгебра. Рассмотрим *суперспектр* $SSpec\, A = \{p \mid p$ — простой супеpидеал $A\}$.

Покажем, что в силу коммутативности A простой идеал A является суперидеалом. Пусть $x = x_0 + x_1 \in p$. В силу коммутативности $x_1^2 = (-1)^{|x_1||x_1|}x_1^2 \ \Rightarrow\ x_1^2 = 0 \in p \ \Rightarrow$ $x_1 \in p \ \Rightarrow x_0 \in p$. Получаем, что все нечетные элементы лежат в p, поэтому $p = p_0 \oplus A_1$, где p_0 — простой идеал A_0.

Таким образом, $SSpec\, A = Spec\, A_0$. Поскольку $A_0 = A_0/A_1^2 = A/AA_1$, то $SSpec\, A = SSpec\,(A/AA_1)$. Аналогично определяем топологию Зарисского: замкнутое подмножество $Z(I) = \{p \in SSpec\, A \mid I \subseteq p\}$ определяется суперидеалом I. В силу вышеизложенного топология Зарисского на $SSpec\, A$ равна топологии Зарисского на $Spec\, A$.

Можно доказать, что AA_1 — суперидеал Хопфа. $G_{ev} = V(AA_1) = SSp\,(A/AA_1)$ — наибольшая четная суперподсхема G.

Для нас будет важно, что

Утверждение 2. *Аффинная групповая суперсхема G связна тогда и только тогда, когда G_{ev} связна.*

4.2. Псевдосвязная компонента

Определение 23. *Алгебраическая аффинная групповая суперсхема $G = SSp\, A$ называется псевдосвязной, если $\bigcap_{n\geqslant 0} \mathcal{M}^n = 0$, где $\mathcal{M} = \ker s_G$.*

Лемма 4. *Пусть G — алгебраическая аффинная групповая суперсхема. Суперидеал $I = \bigcap_{n\geqslant 0} \mathcal{M}^n$ является суперидеалом Хопфа, а аффинная групповая суперподсхема $G^{[0]} = V(I)$ нормальна и связна.*

$G^{[0]}$ называется *псевдосвязной компонентой* G. Очевидно, что G псевдосвязна тогда и только тогда, когда $G = G^{[0]}$.

Лемма 5 (Теорема Крулля о пересечении)**.** *Пусть A — конечнопорожденная коммутативная супералгебра и V — конечнопорожденный A-суперкомодуль. Для любого суперидела $I \subseteq A$ $\bigcap_{n\geqslant 0} I^n V = v \in V \mid \exists\, x \in I_0 : (1-x)v = 0$.*

Утверждение 3. *Пусть $\pi : G \to H$ — эпиморфизм алгебраических аффинных групповых суперсхем. Если $\operatorname{char} K = 0$, то порожденная эпиморфизмом короткая последовательность супералгебр Ли*

$$0 \to \mathrm{Lie}(\ker \pi) \to \mathrm{Lie}(G) \xrightarrow{d\pi} \mathrm{Lie}(H) \to 0$$

является точной.

Лемма 6. *Пусть G — алгебраическая аффинная груповая суперсхема, H_1, H_2 — суперподсхемы G, H_1 псевдосвязна. Тогда $H_1 \subseteq H_2 \Leftrightarrow \mathrm{Dist}(H_1) \subseteq \mathrm{Dist}(H_2)$, а если $\operatorname{char} K = 0$, то $H_1 \subseteq H_2 \Leftrightarrow \mathrm{Lie}(H_1) \subseteq \mathrm{Lie}(H_2)$.*

Лемма 7. *Если G псевдосвязна или связна, то из $\mathrm{Lie}(G) = 0$ следует $G = E$. В частности, если $\operatorname{char} K = 0$ и G алгебраическая, то $G^{(0)} = G^{[0]}$.*

Это важное утверждение позволяет при рассмотрении алгебраических аффинных групповых суперсхем в случае поля нулевой характеристики использовать определения связности и псевдосвязности как эквивалентные.

4.3. Соответствие нормальных суперподсхем G максимальным абелевым суперидеалам $\mathrm{Lie}(G)$

Определение 24. *Подфунктор $\mathrm{Z}(G)$ групового K-функтора G называется центральным, если H – подфунктор в G и $\forall A \in \mathbf{SAlg}_K$ $H(A)$ — центральная подгруппа в $G(A)$.*

Утверждение 4. *Пусть G — аффинная групповая суперсхема. $\mathrm{Z}(G)$ — замкнутая аффинная групповая суперподсхема в G.*

Доказательство. Запишем формально определение центрального подфунктора:

$$\mathrm{Z}(G)(A) = \{x \in G(A) \mid \forall B \in \mathbf{SAlg}_K \ \forall\ \varphi : A \to B \quad G(\varphi)(x)g = gG(\varphi)(x)\}.$$

Понятие центральной подгруппы подразумевает отображение $[g,x] = g^{-1}x^{-1}gx$. Соответствующий ему коморфизм выглядит следующим образом:

$$\nu(f) = \sum (-1)^{|f_2||f_3|} s(f_1)f_3 \otimes s(f_2)f_4 =: \sum u_1 \otimes u_2.$$

Покажем, что супеpидеал, порожденный элементом $(u_2 - \varepsilon(u_2))$, определяет $\mathrm{Z}(G)$, т.е. $\mathrm{Z}(G)(A) = \{x \in G(A) \mid x(u_2 - \varepsilon(u_2)) = 0\}$.

а) Пусть $x \in \mathrm{Z}(G)(A)$. Сначала заметим, что $\forall\ g\ [g,x] = 1$, откуда следует, что $(g \otimes x)(f) = \varepsilon(f)$. Теперь рассмотрим

$$\sum u_1 \otimes \varepsilon(u_2) = \sum (-1)^{|f_2||f_3|} s(f_1)f_3 \otimes \varepsilon(s(f_2))\varepsilon(f_4) = (*).$$

Поскольку $\varepsilon(f_4)$ — скалярная величина, то ее можно перенести в первую часть тензора перед f_3 (в этом случае знак перед тензором не изменится). Из аксиомы коедницы и обозначений Свидлера получаем $f_4\varepsilon(f_3) = f_3$. Учитывая соотношение (12), имеем

$$(*) = \sum (-1)^{|f_2||f_3|} s(f_1)f_3 \otimes \varepsilon(f_2).$$

Снова используем аксиому коединицы (при этом f_2 перескакивает через f_3, поэтому $(-1)^{|f_2||f_3|}$ исчезает), а затем аксиому антипода, получаем

$$(*) = \sum \varepsilon(f) \otimes 1.$$

Взяв теперь $B = A \otimes K[G]$, $g = id_B$, получаем $(g \otimes x)(\sum u_1 \otimes \varepsilon(u_2)) = \varepsilon(f)$, откуда следует, что $(g \otimes x)(\sum u_1 \otimes (u_2 - \varepsilon(u_2))) = 0$, а в силу того, что $g = id_B$, получаем $x(u_2 - \varepsilon(u_2)) = 0$.

б) Обратно, если $x(u_2 - \varepsilon(u_2)) = 0$, I — супеpидеал, порожденный элементом $u_2 - \varepsilon(u_2)$, то $x \in \mathrm{Z}(G)(A)$. □

Лемма 8. *Если G связна,* $\mathrm{char}\, K = 0$*, то* $\mathrm{Lie}(\mathrm{Z}(G)) = \mathrm{Z}(\mathrm{Lie}(G))$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathrm{char}\, K = 0$*, G — связная аффинная групповая суперсхема,*
I — максимальный абелев суперидеал в $\mathrm{Lie}(G)$*. Существует* $H \lhd G : \mathrm{Lie}(H) = I$.

Доказательство. Обозначим $L = \mathrm{Lie}(G)$. Доказательство проведем индукцией по $\dim L$. База индукции очевидна: для $I = 0$ достаточно взять $H = E$. Предположим, что если H — связная аффинная групповая суперсхема и $\dim \mathrm{Lie}(H) < \dim L$, то утверждение выполнено для H.

Рассмотрим действие $\mathbf{Ad} : G \to \mathrm{GL}(I)$, $\ker \mathbf{Ad} = R$. Пусть $J = \mathrm{Lie}(R) = \{x \in L | [x, I] = 0\}$. Очевидно, $I \subseteq J$.

Если $\dim J \leqslant \dim L$, то по предположению индукции утверждение выполнено для R, т.е. $\exists\ H \lhd R : \mathrm{Lie}(H) = I$. Поскольку $H \lhd R$ и $R \lhd G$ как ядро $\mathbf{Ad}$, то $H \lhd G$, следовательно, утверждение выполнено для G.

Рассмотрим случай $\dim J = \dim L$. Т.к. G алгебраическая, то $\dim L < \infty \Rightarrow J = L$. Отсюда следует, что $[L, I] = 0$, а в силу определения центра $I \subseteq \mathrm{Z}(L)$. По условию I — максимальный суперидеал $\Rightarrow$ I не может быть собственным подмножеством $\Rightarrow$ $I = \mathrm{Z}(L)$. По лемме 8 получаем, что $I = \mathrm{Lie}(\mathrm{Z}(G))$, а из утверждения 4 $\mathrm{Z}(G) \lhd G$. $\square$

5. Разрешимость аффиных групповых суперсхем

5.1. Нормальные аффинные групповые суперподсхемы

Повторим некоторые определения и утверждения из [6], раздел 6.

Определение 25. *Групповой подфунктор H K-функтора G называется нормальным если $\forall\ A \in \mathbf{SAlg}_K$ $H(A)$ — нормальная подгруппа в $G(A)$.*

Если G — аффинная групповая суперсхема и H — замкнутая суперподсхема, то $H \lhd G$ тогда и только тогда, когда H удовлетворяет одному из следующих условий:

$$\nu_r(f) = \sum (-1)^{|f_1||f_2|} f_2 \otimes f_1 s_G(f_3) \ \in \ I_H \otimes K[G],$$

или

$$\nu_l(f) = \sum (-1)^{|f_1||f_2|} f_2 \otimes s_G(f_1) f_3 \ \in \ I_H \otimes K[G],$$

для любого $f \in I_H$. Первое условие называется условием *правой нормальности*, а второе — условием *левой нормальности*. Для аффинных групповых суперсхем эти условия эквивалентны.

Морфизм супералгебр ν_l дуален морфизму суперсхем $G \times G \to G$, который задается отображением $con : (g_1, g_2) \mapsto g_2^{-1} g_1 g_2$ для $g_1, g_2 \in G(A)$, $A \in \mathbf{SAlg}_K$. Симметричное отображение $(g_1, g_2) \mapsto g_2 g_1 g_2^{-1}$ задает дуальный морфизм ν_r.

Лемма 9. *Пусть G — аффинная групповая суперсхема, $H \lhd G$. Тогда* $\mathrm{Lie}(H)$ *— суперидеал Ли* $\mathrm{Lie}(G)$.

5.2. Куммутант аффинной групповой суперсхемы

Перед тем, как дать определение разрешимой аффинной групповой суперсхемы, сначала необходимо определить коммутаторную суперподсхему. Нижеизложенное повторяет описание коммутанта для обычных схем ([5], глава 10), но более подробно.

Пусть G - аффинная групповая суперсхема над полем K. Определим морфизм функторов $\pi : G \times G \to G$, переводящее (g, h) в коммутатор $ghg^{-1}h^{-1}$. Ему соответствует коморфизм $\pi^* : K[G] \to K[G] \otimes K[G]$. Обозначим $I_1 = \ker \pi^*$. Как ядро гомоморфизма супералгебр Хопфа I_1 — суперидеал Хопфа. Аналогично для $n \in \mathbb{N}$ имеем морфизм $\pi_n : (g_1, h_1, \ldots, g_n, h_n) \mapsto g_1 h_1 g_1^{-1} h_1^{-1} \cdots g_n h_n g_n^{-1} h_n^{-1}$ и коморфизм $\pi_n^* : K[G] \to K[G]^{\otimes 2n}$. $I_n = \ker \pi_n^*$.

Утверждение 5. $I_{n+1} \subseteq I_n$.

Доказательство. Очевидно, что $\ker \pi_n \subseteq \ker \pi_{n+1}$. Переходя к коморфизмам, получаем, что $\ker \pi_{n+1}^* \subseteq \ker \pi_n^*$. $\square$

Обозначим $I = \bigcap_{n \geqslant 0} I_n$.

Утверждение 6. *$I = \bigcap I_n$ – супеpидеал Хопфа.*

Доказательство. Для любого $n \in \mathbb{N}$ $\quad I_n$ — суперидеал Хопфа, то есть

$$I \subseteq \ker \varepsilon, \quad \Delta(I_n) \subseteq K[G] \otimes I_n + I_n \otimes K[G], \quad s(I_n) \subseteq I.$$

Очевидно, что $I \subseteq \ker \varepsilon$ и $s(I) \subseteq I$.

Рассмотрим I_{2n}. $\pi_{2n} = m \circ (\pi_n \times \pi_n)$, поэтому можно записать дуальную коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} G^{2n} \times G^{2n} \arrow[r, "\pi_n \times \pi_n"] \arrow[dr, "\pi_{2n}"'] & G \times G \arrow[d, "m"] \\ & G \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K[G]^{\otimes 2n} \otimes K[G]^{\otimes 2n} & K[G] \times K[G] \arrow[l, "\pi_n^* \otimes \pi_n^*"'] \\ & K[G] \arrow[u, "\Delta"'] \arrow[ul, "\pi_{2n}^*"] \end{tikzcd}$$

Отсюда получаем, что $\pi_{2n}^* = (\pi_n^* \times \pi_n^*) \circ \Delta$. Если $\Delta(\varphi) = 0$, то $(\pi_n^* \times \pi_n^*)(\Delta(\varphi)) = 0$, поэтому

$$\Delta(I_{2n}) \subseteq \ker(\pi_n^* \times \pi_n^*) = I_n \otimes K[G] + K[G] \otimes I_n. \tag{14}$$

$I = \bigcap I_n = \bigcap I_{2n} \;\Rightarrow\; \Delta(I) = \Delta(\bigcap I_{2n}) \subseteq \bigcap (I_n \otimes K[G] + K[G] \otimes I_n) = \bigcap I_n \otimes K[G] + K[G] \otimes \bigcap I_n = I \otimes K[G] + K[G] \otimes I$, что и требовалось для суперидеала Хопфа. $\square$

Утверждение 7. *Замкнутая суперподсхема $V(I)$, определяемая суперидеалом Хопфа I, является наименьшей замкнутой суперподсхемой, содержащей произведения любых коммутаторов.*

Это утверждение расносильно тому, что $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \overline{\operatorname{Im} \pi_n} = V(I_n)$.

Определение 26. *Замкнутая подгруппа $V(I) = G'$, определяемая суперидеалом Хопфа I, называется коммутантом аффинной групповой суперсхемы G.*

Утверждение 8. *G' — нормальная суперподсхема аффинной групповой суперсхемы G.*

Доказательство. Докажем, что $\nu(I) \subseteq I \otimes K[G]$. Рассмотрим отображение $f = con \circ (\pi_n \times id) : ((g_1, h_1, \ldots, g_n, h_n), g) \mapsto g^{-1} g_1 h_1 g_1^{-1} h_1^{-1} \cdots g_n h_n g_n^{-1} h_n^{-1} g$.

Покажем, что $g^{-1}\pi(g_1, h_1)g = xyx^{-1}y^{-1}$ для некоторых x, y.

$$g^{-1} g_1 h_1 g_1^{-1} h_1^{-1} g = (g^{-1} g_1 g)(g^{-1} h_1 g^{-1})(g g_1^{-1} g^{-1})(g h_1^{-1} g),$$

поэтому для $x = g^{-1} g_1 g,\ y = g^{-1} h_1 g^{-1}$ получаем требуемое. Аналогичные рассуждения можно провести для $g^{-1}\pi(g_1, h_1, \ldots, g_n, h_n)g$.

Это означает, что $V(\ker f^*) = \overline{\operatorname{Im} f} \;\subseteq\; \overline{\operatorname{Im} \pi_n} = V(I_n)$.

Запишем соответствующие коммутативные диаграммы:

$$
\begin{tikzcd}
G^{2n}\times G \arrow[r, "\pi_n\times id"] \arrow[dr, "f"'] & G\times G \arrow[d, "con"] \\
& G
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
K[G]^{\otimes 2n}\otimes K[G] & K[G]\times K[G] \arrow[l, "\pi_n^*\otimes id"'] \\
& K[G] \arrow[u, "\nu_l"'] \arrow[ul, "f^*"]
\end{tikzcd}
$$

Получаем $f^* = (\pi_n^* \otimes id) \circ \nu_l$.
$I_n \subseteq \ker((\pi_n^* \otimes id) \circ \nu_l) \ \Rightarrow (\pi_n^* \otimes id)(\ \nu_l(I_n)) = 0$, откуда получаем

$$\nu_l(I_n) \subseteq \ker(\pi_n^* \otimes id) = I_n \otimes K[G] + K[G] \otimes \ker id = I_n \otimes K[G].$$

Следовательно, $\nu_l\left(\bigcap I_n\right) \subseteq \bigcap(I_n \otimes K[G]) = \left(\bigcap I_n\right) \otimes K[G] = I \otimes K[G]$. $\square$

Стандартным образом определим n-й коммутант $G^{(n)}$.

Определение 27. *Будем называть аффинную групповую суперсхему G разрешимой, если $G^{(n)}$ тривиальна для некоторого n.*

Следующее утверждение будет важно для дальнейших рассуждений. Доказательство можно найти в [5].

Теорема 2. *Пусть G алгебраическая. Если G связна, то и G' связна.*

6. Аналог теоремы Каца

Сначала приведем несколько вспомогательных утверждений и определим понятие разрешимой супералгебры Ли.

Лемма 10. *Обозначим* $\mathrm{Lie}(G) = L = L_0 \oplus L_1$. $\mathrm{Lie}(G_{ev}) = L_0$.

Лемма 11. *Аффинная групповая суперсхема G абелева* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Lie}(G)$ *абелева.*

Определение 28. *Супералгебра Ли L называется разрешимой, если существует конечная убывающая цепочка супеpидеалов $L = I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_n = 0$, таких что все факторы I_i/I_{i+1} абелевы.*

Теорема 3 (Кац)**.** *Супералгебра Ли $L = L_0 \oplus L_1$ разрешима тогда и только тогда, когда разрешима алгебра Ли L_0.*

Доказательство можно найти в статье [2]. Теперь все готово для доказательства основной теоремы этой работы.

Теорема 4. *Пусть* $\mathrm{char}\, K = 0$, *G - связная алгебраическая аффинная групповая суперсхема. G разрешима* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Lie}(G)$ *разрешима* $\Leftrightarrow$ *G_{ev} разрешима.*

Доказательство. а) Предположим, что G разрешима, т.е. для некоторого $n \in \mathbb{N}$

$$G \;\triangleright\; G' \;\triangleright\; G'' \;\triangleright\; \ldots \;\triangleright\; G^{(n)} = 1. \tag{15}$$

По лемме 9 в силу нормальности G' получаем, что $\forall\ i$ $\mathrm{Lie}(G^{(i)})$ — суперидеал, а по лемме 6 имеем $\forall\ i$ $\mathrm{Lie}(G^{(i)}) \subseteq \mathrm{Lie}(G^{(i+1)})$. Рассмотрим абелев фактор G/G'. Отображение $\pi : G \to G/G'$ является эпиморфизмом алгебраических аффинных групповых суперсхем, следовательно по утверждению 3 имеем точную последовательность

$$0 \to \mathrm{Lie}(G') \to \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G/G') \to 0.$$

Поскольку фактор G/G' абелев, то по лемме 11 $\mathrm{Lie}(G/G')$ абелева, а значит и фактор $\mathrm{Lie}(G)/\mathrm{Lie}(G') = \mathrm{Lie}(G/G')$ абелев. Рассматривая таким образом все факторы цепочки (15), получаем цепочку

$$\mathrm{Lie}(G) \;\triangleright\; \mathrm{Lie}(G') \;\triangleright\; \mathrm{Lie}(G'') \;\triangleright\; \ldots \;\triangleright\; \mathrm{Lie}(G^{(n-1)} \;\triangleright 0,$$

в которой все факторы абелевы, то есть $\mathrm{Lie}(G)$ разрешима.

Обратно, предположим, что $\mathrm{Lie}(G)$ разрешима, то есть существует цепочка

$$\mathrm{Lie}(G) \;\triangleright\; I_1 \;\triangleright\; I_2 \;\triangleright\; \ldots \;\triangleright\; I_n = 0. \tag{16}$$

Рассмотрим I_{n-1}. Т.к. $I_n = 0$, то I_{n-1} — максимальный суперидеал $\mathrm{Lie}(G)$. При этом он абелев, как и все суперидеалы этой цепочки. Тогда по теореме 1 существует нормальная суперподсхема $H_{n-1} \triangleleft G$: $\mathrm{Lie}(H_{n-1}) = I_{n-1}$. Суперидеал I_{n-1} абелев $\Rightarrow$ $\mathrm{Lie}(H_{n-1})$ абелева $\Rightarrow$ абелевы H_{n-1} и G/H_{n-1}.

Теперь рассмотрим $\mathrm{Lie}(G)/I_{n-1} = \mathrm{Lie}(G/H_{n-1})$. I_{n-1} — максимальный абелев суперидеал $\mathrm{Lie}(G/H_{n-2}) \Rightarrow \exists\, H_{n-2} \triangleleft G/H_{n-1}$: $\mathrm{Lie}(H_{n-2}) = I_{n-2}$. Таким образом, мы получили $\mathrm{Lie}(H_{n-1}) \triangleleft \mathrm{Lie}(H_{n-2})$, а по лемме 6 получаем, что $H_{n-1} \triangleleft H_{n-2}$. Аналогичным образом продолжая разбирать цепочку (16) вверх, получаем цепочку

$$G \triangleright H_1 \triangleright \ldots \triangleright H_{n-2} \triangleright H_{n-1} \triangleright E,$$

в которой все факторы абелевы, то есть G разрешима.

Таким образом, мы доказали, что G разрешима $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Lie}(G)$ разрешима.

б) По теореме 3 $\mathrm{Lie}(G)$ разрешима тогда и только тогда, когда разрешима $\mathrm{Lie}(G)_0$. По лемме 10 $\mathrm{Lie}(G)_0 = \mathrm{Lie}(G_{ev})$, а из первой части доказательства следует, что $\mathrm{Lie}(G_{ev})$ разрешима тогда и только тогда, когда G_{ev} разрешима. Таким образом доказана вторая эквивалентность, а с ней и вся теорема. $\square$

Список литературы

[1] J.C. Jantzen. *Representations of Algebraic Groups.* Academic Press, Inc., Orlando, Florida, 1987.

[2] V.G. Kac. Lie superalgebras. *Advanced in Mathematics*, 26:8–96, 1977.

[3] A. Kleshchev. *Linear and projective representations of symmetric groups.* Cambridge University Press, 2005.

[4] M.E. Sweedler. *Hopf Algebras.* W.A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

[5] W.C. Waterhouse. *Introduction to Affine Group Schemes.* Springer Verlag, 1979.

[6] A.N. Zubkov. Affine quotients of supergroups. *Transformation Groups*, 14(3):713–745, 2009.

[7] И.В. Аржанцев. *Градуированные алгебры и 14-я проблема Гильберта.* МЦНМО, Москва, 2009.

[8] А.Н. Зубков. О некоторых свойствах общих линейных супергрупп и супералгебр Шура. *Алгебра и логика*, 45(3):257–299, 2006.

[9] А. Деляну И. Букур. *Введение в теорию категорий и функторов.* Мир, Москва, 1972.

[10] С. Маклейн. *Категории для работающего математика.* ФИЗМАТЛИТ, 2004.

[11] И.Р. Шафаревич. *Основы алгебраической геометрии*, volume 1. Наука, Москва, 1988.