Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского

Институт математики и информационных технологий

Кафедра алгебры

Аналог теоремы Каца для разрешимых аффинных групповых суперсхем

Дипломная работа

Специальность «Прикладная математика и информатика»

Выполнил:
студент группы МПС-703-О
Уляшев Павел Александрович

____

(подпись студента)

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Зубков Александр Николаевич

____

(подпись руководителя)

Омск 2012

Введение

Главной задачей данной работы было изучение основ теории аффинных групповых схем и обобщение некоторых результатов на суперслучай. Аффинные схемы были введены А. Гротендиком в 1950-х гг. при построении теории схем как обобщение понятия аффинного и квазипроективного многообразий. Одним из главных инструментов теории аффинных схем является теория категорий. Основные понятия теории категорий можно найти в [5] или в работе С. Маклейна, одного из авторов теории категорий [6].

В литературе аффинные групповые суперсхемы часто для краткости называют супергруппами. В данной работе я буду для ясности использовать полное название.

Основной задачей этой работы является аналог теоремы Каца для разрешимых аффинных групповых суперсхем. В. Г. Кац в работе [2] о супералгебрах Ли доказал, что супералгебра Ли разрешима тогда и только тогда, когда разрешима ее четная часть. Супералгебры Ли тесно связаны с теоретической физикой, а в теории аффинных схем появляются при изучении супералгебр распределений. Еще один алгебраический объект, тесно связанный с физикой — алгебра Хопфа. Аналогично тому, что категория аффинных групповых схем дуальна категории алгебр Хопфа ([3]), аффинные групповые суперсхемы дуальны супералгебрам Хопфа, что позволяет развивать одну и ту же теорию либо в терминах суперсхем, либо в терминах супералгебр Хопфа в зависимости от ситуации.

В первом разделе собраны необходимые предварительные сведения: понятия супералгебры, K-функторы, вводится основной объект исследований этой работы — аффинные групповые схемы, доказывается дуальность категорий аффинных групповых суперсхем категории супералгебр Хопфа. Второй раздел описывает супералгебры распределений аффинных групповых суперсхем и их связь с супералгебрами Ли. Некоторые дополнительные сведения для суперслучая можно найти в [4], исходные понятия алгебр распределений аффинных групповых схем можно найти в [3]. Вводится понятие функтора супералгебры Ли $\mathbf{Lie}(G)$. В третьем разделе вводятся понятия связной аффинной групповой суперсхемы. В четвертом разделе понятие разрешимой аффинной групповой схемы ([3], гл. 10) переносится на суперслучай, доказывается обоснованность этой аналогии. В заключительной части доказывается аналог теоремы Каца о разрешимости аффинных групповых суперсхем.

Содержание

1. Предварительные сведения

1.1. K-функторы

Определения, данные в [1] для обычного случая, можно почти дословно перенести на суперслучай. Некоторые из них можно найти в [4].

Введем некоторые предварительные обозначения. K – произвольное поле, $\mathbf{SAlg}_K$ — категория супералгебр над полем K, **Sets** — категория множеств, **Gr** — категория групп.

Определение 1. *K-функтором назовем функтор из категории $\mathbf{SAlg}_K$ в* **Sets***.*

Для K-функторов X, X' обозначим через $\mathrm{Mor}(X, X')$ множество морфизмов из в X'.

Определение 2. *Пусть X — K-функтор. K-функтор Y называется подфунктором функтора X, если $\forall\ A, A' \in \mathbf{SAlg}_K$ $\forall\ \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SAlg_K}}(A, A')$ выполнены условия: $Y(A) \subset X(A)$ и $Y(\varphi) = X(\varphi)|_{Y(A)}$.*

Для любого семейства подфункторов $\{Y_i\}_{i\in I} \subset X$ определим функтор-пересечение $\bigcap_{i\in I} Y_i$ следующим образом:

$$(\bigcap_{i\in I} Y_i)(A) = \bigcap_{i\in I} Y_i(A).$$

Для $f \in \mathrm{Mor}(X, X')$ $\forall\ Y' \subseteq X'$ определим функтор-прообраз

$$(f^{-1}(Y'))(A) = f(A)^{-1}(Y'(A)) \qquad \text{для } A \in \mathbf{SAlg}_K.$$

Очевидно, что $\bigcap_{i\in I} Y_i$ и $f^{-1}(Y')$.

Определение 3. *Прямым произведением K-функторов X_1 и X_2 называется функтор $(X_1 \times X_2)(A) = X_1(A) \times X_2(A)$ для $A \in \mathbf{SAlg}_K$.*

1.2. Аффинные суперсхемы

Определение 4. *K-функтор $SSp\,R$, определенный как*

$$(SSp\,R)(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{SAlg_K}}(R, A) \qquad \textit{для } A \in \mathbf{SAlg}_K,$$

называется аффинной суперсхемой. Супералгебра $R \in \mathbf{SAlg}_K$ называется координатной супералгеброй суперсхемы $SSp\,R$. Если $X = SSp\,R$, то R обозначается $K[X]$.

Определение 5. *Аффинная суперсхема $\mathbf{A}^{m|n} = SSp\,K[t_1, \ldots, t_m|z_1, \ldots, z_n]$ называется $(m|n)$-аффинным суперпространством.*

Очевидно, что $\mathbf{A}^{m|n}(B) = B_0^m \oplus B_1^n$ для $B \in \mathbf{SAlg}_K$. В частности, $\mathbf{A}^{1|1}(B) = B$ для любой супералгебры B.

Определение 6. *Пусть I — суперидеал $B \in \mathbf{SAlg}_K$. Подфунктор $V(I) = \{\varphi \in (SSp\,R)(A) \mid \varphi(I) = 0\}$ функтора $SSp\,R$ называется замкнутым подфунктором, соответствующим суперидеалу I.*

Очевидно, что $V(I) \simeq SSp\,(K[X]/I)$.

Определение 7. *Аффинная суперсхема X называется алгебраической, если $K[X] \simeq K[t_1, \ldots, t_m | z_1, \ldots, z_n]\,/\,I$ для некоторых $m, n \in \mathbb{N}$ и конечнопорожденного суперидеала I.*

Определение 8. *Аффинная суперсхема X называется редуцированной, если $K[X]$ не содержит нильпотентных элементов, отличных от 0.*

1.3. Лемма Йонеды

Лемма Йонеды — фундаментальное утверждение теории категорий — позволяет вложить любую категорию $\mathcal{C}$ в категорию функторов, определенных в $\mathcal{C}$. В общем виде Лемму Йонеды можно найти в [6], в этой работе подробнее остановимся на случае для категории $\mathbf{SAlg}_K$.

Лемма 1 (лемма Йонеды)**.** *$\forall\ R \in \mathbf{SAlg}_K$ $\forall$ K-функтора X существует канонический изоморфизм*

$$\mathrm{Mor}(SSp\,R, X) \simeq X(R),$$

который задается отображением $f \mapsto f(R)(id_R)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{Mor}(SSp\,R, X)$. Сначала убедимся, что $f(R)(id_R) \in X(R)$. Это следует из того, что $f(R) : (SSp\,R)(R) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{SAlg_K}}(R, R) \to X(R)$. Далее убедимся, что приведенное отображение действительно является изоморфизмом.

По определению морфизма функторов $\forall\ A \in \mathbf{SAlg}_K$ $\forall\ u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SAlg_K}}(B, A)$ коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} (SSp\,R)(B) & \xrightarrow{f(B)} & X(B) \\ {\scriptstyle (SSp\,R)(u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle X(u)} \\ (SSp\,R)(A) & \xrightarrow{f(A)} & X(A) \end{array} \tag{1}$$

Возьмем R в качестве B и получим, что $f(A) \circ X(u) = (SSp\,R)(u) \circ f(R)$. Обозначим $x_f = f(R)(id_R)$. Принимая во внимание, что $(SSp\,R)(u)(id_R) = u \circ id_R$, получаем

$$f(A)(u) = X(u)(x_f).$$

Отсюда видно, что f однозначно определяется x_f. Осталось построить обратное отображение. Пусть $x \in X(R)$ и $A \in \mathbf{SAlg}_K$. Зададим $f_x(A) : SSp\,R \to X(A)$ отображением $u \mapsto X(u)(x)$. Несложно убедиться, что $f_x \in \mathrm{Mor}(SSp\,R, X)$ и что $x \mapsto f_x$ обратно отображению $f \mapsto f_x$. $\square$

Следствие 1. *Если взять $X = SSp\,R'$, то получим*

$$\mathrm{Mor}(SSp\,R, SSp\,R') \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{SAlg}_\mathrm{K}}(R', R) \tag{2}$$

для любых супералгебр R, R'.

Обозначим эту биекцию $f \mapsto f^*$ и будем называть f^* *коморфизмом*, соответствующим f. Таким образом, мы получили дуальность категорий аффинных суперсхем и супералгебр.

1.4. Групповые K-функторы и аффинные групповые суперсхемы

Определение 9. *Групповым K-функтором будем называть функтор из $\mathbf{SAlg}_K$ в $\mathbf{Gr}$.*

Если взять композицию группового функтора с забывающим функтором из $\mathbf{Gr}$ в $\mathbf{Sets}$, то групповой K-функтор можно рассматривать как K-функтор. Поэтому все результаты для K-функторов можно перенести на групповые K-функторы.

Пусть G, H — групповые K-функторы. Обозначим через $\mathrm{Mor}(G, H)$ множество морфизмов из G в H, если рассматривать G и H как K-функторы; через $\mathrm{Hom}(G, H)$ множество морфизмов групповых функторов.

Определение 10. *Аффинная групповая суперсхема — групповой K-функтор, который является аффинной суперсхемой, если его рассматривать как функтор.*

Определение 11. *Пусть G — групповой K-функтор. H называется групповым подфунктором G, если H — подфунктор G и $\forall\ A \in \mathbf{SAlg}_K$ $H(A)$ — подгруппа в $G(A)$.*

Нетрудно убедиться, что пересечение групповых подфункторов — групповой подфунктор, прообраз группового подфунктора относительно гомоморфизма — групповой подфунктор.

Определение 12. *Групповой подфунктор H функтора G называется нормальным (соответственно, центральным), если $\forall\ A \in \mathbf{SAlg}_K$ $H(A)$ — нормальная (соответственно, центральная) подгруппа в $G(A)$.*

Определение 13. *Пусть G — аффинная групповая суперсхема. H — замкнутая аффинная групповая суперподсхема, если H — групповой подфунктор G, который замкнут, если рассматривать H как подфунктор аффинной суперсхемы G.*

1.5. Дуальность категорий аффинных групповых суперсхем и супералгебр Хопфа

Пусть G — групповой K-функтор, $A, B \in \mathbf{SAlg}_K$, $u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SAlg}_\mathrm{K}}(A, B)$, Групповая структура на $G(A)$ определяет морфизмы K-функторов (для каждого функтора коммутативная диаграмма из определения морфизма функторов):

умножение $m_G : G \times G \to G$ ($m_G(A)$ — умножение в группе $G(A)$),

$$\begin{array}{ccc} G(A) \times G(A) & \xrightarrow{m_G(A)} & G(A) \\ {\scriptstyle G(u)\times G(u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(u)} \\ G(B) \times G(B) & \xrightarrow{f(A)} & G(B) \end{array} \tag{3}$$

единица $1_G : SSp\,K \to G$ ($1_G(A) : f \mapsto 1_{G(A)}$ для $f \in (SSp\,K)(A)$),

$$\begin{array}{ccc} (SSp\,K)(A) & \xrightarrow{1_G(A)} & G(A) \\ {\scriptstyle (SSp\,K)(u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (SSp\,K)(u)} \\ (SSp\,K)(B) & \xrightarrow{1_G(A)} & G(B) \end{array} \tag{4}$$

обратная функция $i_G : G \to G$ ($i_G(A) : g \mapsto g^{-1}$ для $g \in G(A)$)

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \xrightarrow{i_G(A)} & G(A) \\ {\scriptstyle G(u)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(u)} \\ G(B) & \xrightarrow{i_G(A)} & G(B) \end{array} \tag{5}$$

Пусть G — аффинная групповая суперсхема. Согласно следствию 1 каждому из этих морфизмов единственным образом советствует свой коморфизм.

$$\begin{array}{rl} \text{коумножение} & \Delta_G = m_G^* : K[G] \to K[G] \otimes K[G], \\ \text{коединица} & \varepsilon_G = 1_G^* : K[G] \to K, \\ \text{антипод} & s_G = i_G^* : K[G] \to K[G], \end{array}$$

Из аксиом групповой структуры следуют аксиомы коумножения, коединицы и антипода. Ниже эти аксиомы записаны в виде коммутативных диаграмм. Ассоциативность умножения $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$ переходит в коассоциативность коумножения:

$$\begin{array}{ccc} K[G] & \xrightarrow{\Delta} & K[G] \otimes K[G] \\ {\scriptstyle \Delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id\otimes\Delta} \\ K[G] \otimes K[G] & \xrightarrow{\Delta\otimes 1} & K[G] \otimes K[G] \otimes K[G] \end{array} \tag{6}$$

Аксиома единицы $eg = ge = g$ переходит в аксиому коединицы:

$$\begin{tikzcd}
K \otimes K[G] \arrow[r, equal] \arrow[d, "id\otimes id"] & K[G] \arrow[r, equal] \arrow[d, "\Delta\otimes id"] & K[G] \otimes K \arrow[d, "id\otimes id"] \\
K \otimes K[G] & K[G] \otimes K[G] \arrow[l, "\varepsilon\otimes 1"'] \arrow[r, "1\otimes\varepsilon"] & K[G] \otimes K
\end{tikzcd} \tag{7}$$

Аксиома обратного элемента $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ переходит в аксиому антипода:

$$\begin{tikzcd}
K[G] \otimes K[G] \arrow[r, "s\otimes id"] & K[G] \otimes K[G] \arrow[dr, "m"] & \\
K[G] \arrow[u, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[r, "\varepsilon"] & K \arrow[r, "1"] & K[G] \\
K[G] \otimes K[G] \arrow[r, "id\otimes s"] & K[G] \otimes K[G] \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd} \tag{8}$$

Следуя Свидлеру, будем писать $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$ (Подробнее о способе записи сумм тензоров, получающихся в результате коумножения, можно посмотреть в [?]). Тогда вышеуказанные аксиомы записываются в виде:

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta = \Delta \circ (id \otimes \Delta) \qquad \sum c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22} =: \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3,$$

$$(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = id = (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta \qquad c = \sum \Delta(c_1)c_2 = \sum c_1\Delta(c_2),$$

$$1 \circ (id \otimes s) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon = 1 \circ (s \otimes id) \circ \Delta \qquad \varepsilon(c) = \sum c_1 s(c_2) = \sum s(c_1)c_2,$$

где η — единица $K[G]$, 1 — умножение в $K[G] \otimes K[G]$.

Определение 14. *Супералгебра вместе с коумножением, коединицей и антиподом, удовлетворяющими аксиомам 6, 7, 8 называется супералгеброй Хопфа.*

Таким образом, имеем дуальность категорий аффинных групповых суперсхем и супералгебр Хопфа.

Определение 15. *Пусть — супералгебра Хопфа. Суперидеал I называется суперидеалом Хопфа, если $\Delta(I) \subseteq C \otimes I + I \otimes C,\ I \subseteq \mathcal{M} = \ker \varepsilon,\ s(I) \subseteq I$.*

2. Супералгебры распределений и их связь с супералгебрами Ли

2.1. Супералгебры распределений

Пусть X — аффинная суперсхема. Повторим определения, приведенные в [4] и [1]. Элемент из $\mathrm{Dist}_n(X, \mathcal{M}) = (K[X]/\mathcal{M}^{n+1})^*$ будем называть *распределением* на X с носителем в $\mathcal{M}$ порядка $\leqslant n$, где $\mathcal{M}$ — максимальный идеал супералгебры $K[X]$. Имеем

$$\bigcup_{n \geqslant 0} \mathrm{Dist}_n(X, \mathcal{M}) = \mathrm{Dist}(X, \mathcal{M}) \subseteq K[X]^*.$$

Если $g : X \to Y$ — морфизм аффинных суперсхем, то он порождает морфизм суперпространств $dg_{\mathcal{M}} : \mathrm{Dist}(X, \mathcal{M}) \to \mathrm{Dist}(Y, (g^*)^{-1}(\mathcal{M}))$ такой, что

$$dg_{\mathcal{M}}(\mathrm{Dist}_n(X, \mathcal{M})) \subseteq \mathrm{Dist}_n(Y, (g^*)^{-1}(\mathcal{M})) \qquad \forall n \geqslant 0.$$

Если $X = V(I)$ — замкнутая подсуперсхема в Y, то $\mathrm{Dist}(X, \mathcal{M})$ отождествляется с $\{\varphi \in \mathrm{Dist}(Y, \mathcal{M}) \mid \varphi(I) = 0\}$, где $I \subseteq \mathcal{M}$.

Если X — алгебраическая аффинная групповая суперсхема и $\mathcal{M} = \ker \varepsilon_X$, то $\mathrm{Dist}(X, \mathcal{M})$ обозначается как $\mathrm{Dist}(X)$. В этом случае $\mathrm{Dist}(X)$ имеет структуру супералгебры Хопфа с умножением $\varphi\psi(f) = \sum (-1)^{|\varphi||\psi|} \varphi(f_1)\psi(f_2)$ для $\varphi, \psi \in \mathrm{Dist}(X), f \in K[X]$, и коумножением $\Delta_X(f) = \sum f_1 \otimes f_2$, с единицей ε_X, коединицей $\varepsilon_{\mathrm{Dist}(X)} : \varphi \mapsto \varphi(1)$ и антиподом $s_{\mathrm{Dist}(X)}(\varphi)(f) = \varphi(s_X(f))$ для $\varphi \in \mathrm{Dist}(X)$ и $f \in K[X]$.

$\mathrm{Dist}(X)$ — фильтрованная алгебра, т.е. $\forall\ m, n \geqslant 0 \mathrm{Dist}_m(X)\mathrm{Dist}_n(X) \subseteq \mathrm{Dist}_{m+n}(X)$. Рассмотрим суперпространство $\mathrm{Lie}(X) = \{\varphi \in \mathrm{Dist}_1(X) \mid \varphi(1) = 0\}$. Его можно наделить структурой супералгебры Ли, положив $[\varphi, \psi] = \varphi\psi - (-1)^{|\varphi||\psi|}\varphi\psi$.

Замечание 1. $\mathrm{Lie}(X)$ *не является алгеброй Ли в обычном смысле — аксиомы выполняются в учетом четности элементов, а именно* $\forall\ \varphi, \psi, \rho \in \mathrm{Lie}(X)$

$$[\varphi, \psi] = (-1)^{|\varphi||\psi|}[\psi, \varphi],$$

$$[[\varphi, \psi], \rho] = (-1)^{|\psi||\rho|}[[\varphi, \rho], \psi] + [\varphi, [\psi, \rho]].$$

Как супералгебра Хопфа $\mathrm{Dist}(X)$ кокоммутативна, т.е. $\sum \varphi_1 \otimes \varphi_2 = \sum (-1)^{|\varphi_1||\varphi_2|} \varphi_2 \otimes \varphi_1$.

2.2. Действие сопряжения и функтор Lie(G)

Определение 16. *Пусть* $A \in \mathbf{SAlg}_K$. *Супералгеброй дуальных чисел называется* $A[\varepsilon_0, \varepsilon_1] = \{a + \varepsilon_0 b + \varepsilon_1 c \mid a, b, c \in A\},\ |\varepsilon_i| = i,\ \varepsilon_i\varepsilon_j = 0,\ i, j \in \{0, 1\}$.

Имеем проективный $p_A : A[\varepsilon_0, \varepsilon_1] \to A$ и инъективный $i_A : A \to A[\varepsilon_0, \varepsilon_1]$ морфизмы супералгебр, определенные как $a + \varepsilon_0 b + \varepsilon_1 c \mapsto a$ и $a \mapsto a$ соответственно.

Определение 17. *Функтором супералгебры Ли будем называть функтор* $\mathbf{Lie}(G)$*, определенный как*

$$\mathbf{Lie}(G) = \Big(G(A[\varepsilon_0, \varepsilon_1]) \xrightarrow{G(p_A)} G(A)\Big), \qquad A \in \mathbf{SAlg}_K.$$

Пусть V — суперпространство. Определим функтор V_a из категории $\mathbf{SAlg}_K$ в категорию векторных суперпространств: $V_a(A) = V \otimes A$.

Лемма 2. *Существует изоморфизм абелевых групповых функторов* $\mathrm{Lie}(G)_a \simeq \mathbf{Lie}(G)$*, который задается отображением*

$$(v \otimes a)(f) = \varepsilon_G(f) + (-1)^{|a||f|}\varepsilon_{v\otimes a} v(f)a, \qquad v \in \mathrm{Lie}(G) = (\mathcal{M}/\mathcal{M}^2)^*, a \in A, f \in K[G].$$

Для более подробной информации см. [3].

Если мы отождествляем $\mathrm{Lie}(G) \otimes A$ с $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{M}/\mathcal{M}^2, A)$ при помощи отображения $(v \otimes a)(f) = (-1)^{|a||f|}v(f)a$, то вышеуказанный изоморфизм может быть представлен отображением

$$u \mapsto \varepsilon_G + \varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1, \qquad u \in \mathrm{Hom}_K(\mathcal{M}/\mathcal{M}^2, A).$$

Определение 18. *Рассмотрим действие аффинной групповой суперсхемы* G *на функтор* $\mathbf{Lie}(G)$*:*

$$(g, x) \mapsto G(i_a)(g)\, x\, G(i_A)(g)^{-1}, \qquad g \in G(A),\ x \in \mathbf{Lie}(G)(A),\ A \in \mathbf{SAlg}_K.$$

Это действие называется сопряжением и обозначается $\mathbf{Ad}$.

Лемма 3. *Сопряжение линейно. В частности, оно порождает морфизм аффинных групповых схем* $G \to \mathrm{GL}(\mathrm{Lie}(G))$.

3. Связные аффиные групповые суперсхемы

Связная компонента, связная супергруппа, утверждение про центр группы (если оно нужно для доказательства). [4]

Везде в этом пункте G — аффинная групповая суперсхема над полем K.

Определение 19. *Подфунктор* $\mathbf{Z}(G)$ *групового* K*-функктора* G *называется центральным, если* H *– подфунктор в* G *и* $\forall A \in \mathbf{SAlg}_K$ $H(A)$ *– центральная подгруппа в* $G(A)$.

Утверждение 1. *Пусть* G *— аффинная групповая суперсхема.* $\mathbf{Z}(G)$ *— замкнутая аффинная групповая подсуперсхема в* G.

Доказательство. □

Утверждение 2. *Если* G *связна,* $\operatorname{char} K = 0$*, то* $\operatorname{Lie}(\mathbf{Z}(G)) = \mathbf{Z}(\operatorname{Lie}(G))$.

Доказательство. □

Теорема 1. *Пусть* $\operatorname{char} K = 0$*,* G *— связная аффинная групповая суперсхема,*
I *— максимальный абелев суперидеал в* $\operatorname{Lie}(G)$*. Существует* $H \lhd G : \operatorname{Lie}(H) = I$.

Доказательство. Обозначим $L = \operatorname{Lie}(G)$. Доказательство проведем индукцией по $\dim L$. Предположим, что если H — связная аффинная групповая суперсхема и $\dim \operatorname{Lie}(H) < \dim L$, то утверждение выполнено для H.

Рассмотрим действие $\mathbf{Ad} : G \to \mathrm{GL}(I)$, $\ker \mathbf{Ad} = R$. Пусть $J = \operatorname{Lie}(R) = \{x \in L | [x, I] = 0\}$. Очевидно, $I \subseteq J$.

Если $\dim J \leqslant \dim L$, то по предположению индукции утверждение выполнено для R, т.е. $\exists\ H \lhd R : \operatorname{Lie}(H) = I$. Поскольку $H \lhd R$ и $R \lhd G$ как ядро $\mathbf{Ad}$, то $H \lhd G$, следовательно, утверждение выполнено для G.

Рассмотрим случай $\dim J = \dim L$. Т.к. G алгебраическая, то $\dim L < \infty \Rightarrow J = L$. Отсюда следует, что $[L, I] = 0$, а в силу определения центра $I \subseteq \mathbf{Z}(L)$. По условию I — максимальный суперидеал $\Rightarrow I$ не может быть собственным подмножеством $\Rightarrow I = \mathbf{Z}(L)$. По лемме 2 получаем, что $I = \operatorname{Lie}(\mathbf{Z}(G))$, а $\mathbf{Z}(G) \lhd G$. □

4. Разрешимость аффиных групповых суперсхем

Для того, чтобы сформулировать определение разрешимой супергруппы, сначала необходимо определить коммутант супергруппы.

Пусть S — алгебраическая матричная супергруппа. Рассмотрим отображение $S \times S \to S$, переводящее (x, y) в $xyx^{-1}y^{-1}$. Ядро I_1 соотвествующего отображения $K[S] \to K[S] \otimes K[S]$ состоит из функций, зануляющихся на всех коммутаторах из S; таким образом, замкнутое множество, им определяемое, является замыканием коммутаторов. Аналогично имеем отображение $S^{2n} \to S$, переводящее $(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ в $x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1} \cdots x_ny_nx_n^{-1}y_n^{-1}$. Соответствующее отображение $K[S] \to \otimes^{2n} K[S]$ имеет ядро I_n, определяющее замыкание произведения n коммутаторов. Очевидно, что $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$.

Коммутаторная подгруппа в S — объединение произведений из n коммутаторов по всем n, поэтому идеалом функций, зануляющихся на S является $I = \bigcap I_n$. Замкнутое множество, определяемое идеалом I, является замыканием коммутаторной подгруппы. Это замкнутая нормальная подгруппа в S, которую будем называть коммутантом $\mathscr{D}S$. Итерируя эту процедуру, получаем цепочку замкнутых подгрупп $\mathscr{D}^nS$. Если S разрешима как абстрактрая группа, то последовательность $\mathscr{D}^nS$ достигает $\{e\}$.

Все эти рассуждения могут быть проведены и в общем случае. Пусть G - аффинная групповая суперсхема над полем K. Имеем отображения $G^{2n} \to G$, которые соответствут $K[G] \to \otimes^{2n} K[G]$ с ядрами I_n, удовлетворяющими условию $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \ldots$. Если $f \in I_{2n}$, то $\Delta(f)$ обращается в нуль на $K[G]/I_n \otimes K[G]/I_n$ в силу того, что при перемножении двух произведений по n коммутаторов образуется произведение $2n$ коммутаторов. Поэтому $I = \bigcap I_n$ определяет замкнутую подгруппу $\mathscr{D}S$.

Определение 20. *Будем называть супергруппу G разрешимой, если $\mathscr{D}^nG$ тривиальна для некоторого n.*

Замечание 2. *Все коммутаторы $G(R)$ лежат в $\mathscr{D}G(R)$, $\mathscr{D}G$ - нормальная подгруппа в G.*

Теорема 2. *Пусть G – алгебраическая супергруппа. Если G связна, то и $\mathscr{D}G$ связна.*

Доказательство. □

Утверждение 3. *$I = \bigcap I_n$ – суперидеал Хопфа*

Утверждение 4. *$\mathscr{D}G$ – нормальная подгруппа в G.*

Утверждение 5. *$I_{n+1} \subseteq I_n$*

Утверждение 6. *I – наименьшая замкнутая подгруппа G, содержащая произведение любых коммутаторов*

Утверждение 7. *G абелева $\Leftrightarrow$ $Lie(G)$ абелева.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\mathrm{Dist}(G)$ абелева $\Leftrightarrow K[G]^*$ кокоммутативна. □

5. Аналог теоремы Каца

Лемма 4. *Обозначим* $Lie(G) = L = L_0 \oplus L_1$. $Lie(G_{ev}) = L_0$.

Доказательство. $\square$

Лемма 5. *Аффинная групповая суперсхема* G *абелева* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Lie}(G)$ *абелева.*

Доказательство. $\square$

Теорема 3 (Кац)**.** *Супералгебра Ли* $L = L_0 \oplus L_1$ *разрешима* $\Leftrightarrow$ *разрешима алгебра Ли* L_0. *Доказательство можно найти в статье [2].*

Теорема 4. *Пусть* $\mathrm{char}\, K = 0$, G *- связная аффинная групповая суперсхема.* G *разрешима* $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Lie}(G)$ *разрешима* $\Leftrightarrow$ G_{ev} *разрешима.*

Доказательство. 1) тут ссылка на теорему Каца и на предыдущие леммы. из них следует вторая эквивалентность

2) Предположим, что G разрешима, т.е. для некоторого $n \in \mathbb{N}$

$$G \rhd G' \rhd G'' \rhd \ldots \rhd G^{(n)} = 1$$

Рассмотрим $G \rhd G' \rhd G''$, следовательно, имеем точную последовательность

$$1 \to G' \to G \to G/G' \to 1,$$

которая эквивалентна точной последовательности для супералгебр Ли:

$$0 \to \mathrm{Lie}(G') \to \mathrm{Lie}(G) \to \mathrm{Lie}(G/G') \to 0$$

. Все факторы субнормальной цепочки абелевы $\Leftrightarrow$ G/G' абелев, откуда по лемме 5 получаем, что $\mathrm{Lie}(G/G')$ абелева. $\square$

Заключение

Список литературы

[1] J.C. Jantzen. *Representations of Algebraic Groups.* Academic Press, Inc., Orlando, Florida, 1987.

[2] V.G. Kac. Lie superalgebras. *Advanced in Mathematics*, 26:8–96, 1977.

[3] W.C. Waterhouse. *Introduction to Affine Group Schemes.* Springer Verlag, 1979.

[4] A.N. Zubkov. Affine quotients of supergroups. *Transformation Groups*, 14(3):713–745, 2009.

[5] А. Деляну И. Букур. *Введение в теорию категорий и функторов.* Мир, Москва, 1972.

[6] С. Маклейн. *Категории для работающего математика.* ФИЗМАТЛИТ, 2004.