

Омский государственный университет им. Ф.М. Достоевского
Институт математики и информационных технологий
Кафедра алгебры

Аналог теоремы Каца для разрешимых аффинных групповых суперсхем

Дипломная работа

Специальность «Прикладная математика и информатика»

Выполнил:
студент группы МПС-703-О
Уляшев Павел Александрович

(подпись студента)

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Зубков Александр Николаевич

(подпись руководителя)

Омск 2012

Введение

Главной задачей данной работы было изучение основ теории аффинных групповых схем и обобщение некоторых результатов на суперслучай. Аффинные схемы были введены А. Гротендиком в 1950-х гг. при построении теории схем как обобщение понятия аффинного и квазипроективного многообразий. Одним из главных инструментов теории аффинных схем является теория категорий, хотя изначально теория строилась без теории категорий, в чем можно убедиться, изучая традиционную алгебраическую геометрию ([11]). Основные понятия теории категорий можно найти в [9] или в работе С. Маклейна, одного из авторов теории категорий [10].

В литературе аффинные групповые суперсхемы часто для краткости называют супергруппами. В данной работе я буду для ясности использовать полное название.

Основной задачей этой работы является аналог теоремы Каца для разрешимых аффинных групповых суперсхем. В. Г. Кац в работе [2] о супералгебрах Ли доказал, что супералгебра Ли разрешима тогда и только тогда, когда разрешима ее четная часть. Супералгебры Ли тесно связаны с теоретической физикой, а в теории аффинных схем появляются при изучении супералгебр распределений. Еще один алгебраический объект, тесно связанный с физикой — алгебра Хопфа. Аналогично тому, что категория аффинных групповых схем дуальна категории алгебр Хопфа ([5]), аффинные групповые суперсхемы дуальны супералгебрам Хопфа, что позволяет развивать одну и ту же теорию либо в терминах суперсхем, либо в терминах супералгебр Хопфа в зависимости от ситуации.

В первом разделе собраны необходимые предварительные сведения: понятия супералгебры и супермодуля над супералгеброй, K -функторы как функторы из категории супералгебр над полем K в категорию множеств. Во втором разделе определяется основной объект исследований этой работы — аффинные групповые суперсхемы. Затем определяется супералгебра Хопфа как объект, дуальный аффинной групповой суперсхеме. Такой порядок подачи материала обусловлен тем, что сначала обуславливается возникновение кообъектов, и только затем приводятся формальные определения.

Третий раздел описывает супералгебры распределений аффинных групповых суперсхем и их связь с супералгебрами Ли. Некоторые дополнительные сведения для суперслучая можно найти в [6], исходные понятия алгебр распределений аффинных групповых схем можно найти в [5]. Вводится понятие функтора супералгебры Ли $\mathbf{Lie}(G)$.

В четвертом разделе вводятся понятия связной ($G^{(0)}$) и псевдосвязной ($G^{[0]}$) компонент аффинной групповой суперсхемы G , а также их эквивалентность для случая алгебраических аффинных групповых суперсхем над полем характеристики 0. Основным результатом этого раздела — теорема о том, что максимальному абелеву суперидеалу I связной аффинной групповой суперсхемы соответствует нормальная суперподсхема H , такая что $\mathbf{Lie}(H) = I$.

В пятом разделе понятие разрешимой аффинной групповой схемы ([5], гл. 10) переносится на суперслучай, доказывается обоснованность этой аналогии. Главным ре-

зультатом является теорема о том, что коммутант связной алгебраической аффинной групповой суперсхемы связан, что будет затем использовано при доказательстве основной теоремы этой работы.

В заключительной части доказывается аналог теоремы Каца о разрешимости аффинных групповых суперсхем.

Иногда в работе встречается понятие аффинной (групповой) схемы, не приведенной в тексте работы. Все понятия для аффинных схем аналогичны соответствующим понятиям для аффинных суперсхем, если супералгебры заменить на алгебры.

Содержание

1. Предварительные сведения	5
1.1. Супералгебры и супермодули	5
1.2. K -функторы	6
2. Аффинные групповые суперсхемы	7
2.1. Аффинные суперсхемы	7
2.2. Лемма Ионеды	8
2.3. Групповые K -функторы и аффинные групповые суперсхемы	9
2.4. Дуальность категорий аффинных групповых суперсхем и супералгебр Хопфа	10
2.5. Суперкоалгебры и суперкомодули	12
3. Супералгебры распределений и их связь с супералгебрами Ли	14
3.1. Супералгебры распределений	14
3.2. Действие сопряжения и функтор $\mathbf{Lie}(G)$	15
4. Связные аффинные групповые суперсхемы	16
4.1. Топология Зарисского и связность аффинных групповых суперсхем	16
4.2. Псевдосвязная компонента	17
4.3. Соответствие нормальных суперподсхем G максимальным абелевым суперидеалам $\mathbf{Lie}(G)$	17
5. Разрешимость аффинных групповых суперсхем	19
6. Аналог теоремы Каца	21

1. Предварительные сведения

1.1. Супералгебры и супермодули

Следуя [3] и [8], приведем некоторые стандартные определения и теоремы.

Везде далее K — алгебраически замкнутое поле характеристики p (возможно, $p = 0$). Если $p = 0$, то предполагается, что $p \neq 2$. Супераналог произвольной алгебраической системы определяется введением \mathbb{Z}_2 -градуировки, относительно которой все структурные функции однородны. Так, супералгебра — \mathbb{Z}_2 -градуированное пространство, такое что четность произведения двух \mathbb{Z}_2 -однородных элементов равна сумме их четностей по модулю 2. Если не оговорено противное, то морфизм двух суперсистем одинаковой сигнатуры сохраняет \mathbb{Z}_2 -градуировку. Подробнее с градуированными пространствами можно познакомиться в [7].

Приведем более формальные определения:

Определение 1. Будем называть (векторным) суперпространством пространство $V = V_0 \oplus V_1$ над полем K . Если $\dim V_0 = m, \dim V_1 = n$, то $\dim V = m + n, \text{sdim } V = (m, n)$. Элементы из V_0 называются четными, из V_1 — нечетными.

Определение 2. Супералгеброй над полем K называется суперпространство $A = A_0 \oplus A_1$, наделенное структурой унитарной ассоциативной K -алгебры, такое что $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$, где $i, j = 0, 1$.

Под суперидеалом A подразумевается однородный идеал алгебры.

Пусть V, W — суперпространства. Их тензорное произведение наделяется структурой суперпространства по правилу $|v \otimes w| = |v| + |w| \pmod{2}$, где прямыми скобками обозначена четность соответствующего элемента. Итерируя эту процедуру, можно определить тензорное произведение любого числа суперпространств.

Для произвольных суперпространств V, W пространство $\text{Hom}_K(V, W)$ наделяется стандартной структурой суперпространства по правилу $\varphi \in \text{Hom}_K(V, W)_i$, $i = 0, 1$, если $\varphi(V_s) \subseteq W_k$, где $i + s \equiv k \pmod{2}$. В частности, если определить на K структуру суперпространства с $K_0 = K, K_1 = 0$, тогда $V^* = \text{Hom}_K(V, K) = V_0^* \oplus V_1^*$.

Определение 3. Пусть A — супералгебра. (Левым) A -супермодулем называется суперпространство V , которое является A -модулем в обычном смысле, такое что $A_i V_j \subseteq V_{i+j}$ для $i, j \in \mathbb{Z}_2$. Правый супермодули определяются аналогично.

Под гомоморфизмом $f : V \rightarrow W$ левых A -супермодулей подразумевается линейное отображение (не обязательно однородное), такое что

$$f(av) = (-1)^{|f||a|} a f(v), \quad a \in A, v \in V,$$

а для правых A -супермодулей

$$f(va) = f(v)a, \quad a \in A, v \in V.$$

Пусть A, B — супералгебры, а V, W — (левые) супермодули над A и B соответственно. Тогда тензорное произведение $A \otimes B$ имеет структуру супералгебры относительно умножения $a \otimes b \cdot c \otimes d = (-1)^{|b||c|} ac \otimes bd$, $a, c \in A$, $b, d \in B$. Более того, суперпространство $V \otimes W$ будет $A \otimes B$ -супермодулем относительно действия $a \otimes b \cdot v \otimes w = (-1)^{|b||v|} ac \otimes bd$, $a, c \in A$, $b \in B$, $v \in V$, $w \in W$.

Супералгебра A называется *коммутативной*, если для любых однородных $a, c \in A$ выполняется $ac = (-1)^{|a||c|} ca$. Несложно убедиться, что если супералгебры A и B коммутативны, то супералгебра $A \otimes B$ также коммутативна.

1.2. K -функторы

Определения, данные в [1] для обычного случая, можно почти дословно перенести на суперслучай. Некоторые из них можно найти в [6].

Введем некоторые предварительные обозначения. K — произвольное поле, \mathbf{SAlg}_K — категория супералгебр над полем K , \mathbf{Sets} — категория множеств, \mathbf{Gr} — категория групп.

Определение 4. K -функтором назовем функтор из категории \mathbf{SAlg}_K в \mathbf{Sets} .

Для K -функторов X, X' обозначим через $\text{Mor}(X, X')$ множество морфизмов из X в X' .

Определение 5. Пусть X — K -функтор. K -функтор Y называется *подфунктором* функтора X , если $\forall A, A' \in \mathbf{SAlg}_K \ \forall \varphi \in \text{Hom}_{\mathbf{SAlg}_K}(A, A')$ выполнены условия: $Y(A) \subset X(A)$ и $Y(\varphi) = X(\varphi)|_{Y(A)}$.

Для любого семейства подфункторов $\{Y_i\}_{i \in I} \subset X$ определим функтор-пересечение $\bigcap_{i \in I} Y_i$ следующим образом:

$$\left(\bigcap_{i \in I} Y_i\right)(A) = \bigcap_{i \in I} Y_i(A).$$

Для $f \in \text{Mor}(X, X') \ \forall Y' \subseteq X'$ определим функтор-прообраз

$$(f^{-1}(Y'))(A) = f(A)^{-1}(Y'(A)) \quad \text{для } A \in \mathbf{SAlg}_K.$$

Нетрудно убедиться, что $\bigcap_{i \in I} Y_i$ и $f^{-1}(Y')$.

Определение 6. *Прямым произведением K -функторов X_1 и X_2 называется функтор $(X_1 \times X_2)(A) = X_1(A) \times X_2(A)$ для $A \in \mathbf{SAlg}_K$.*

Проекции $p_i : X_1 \times X_2 \rightarrow X_i$ являются морфизмами функторов, и $(X_1 \times X_2, p_1, p_2)$ обладает обычными свойствами прямого произведения.

2. Аффинные групповые суперсхемы

2.1. Аффинные суперсхемы

Определение 7. K -функтор $SSp R$, определенный как

$$(SSp R)(A) = \text{Hom}_{\mathbf{SAlg}_K}(R, A) \quad \text{для } A \in \mathbf{SAlg}_K,$$

называется аффинной суперсхемой. Супералгебра $R \in \mathbf{SAlg}_K$ называется координатной супералгеброй суперсхемы $SSp R$. Если $X = SSp R$, то R обозначается $K[X]$.

Пусть X_1, X_2 — аффинные суперсхемы. Тогда

$$K[X_1 \times X_2] = K[X_1] \otimes K[X_2]. \quad (1)$$

Определение 8. Аффинная суперсхема $\mathbf{A}^{m|n} = SSp K[t_1, \dots, t_m | z_1, \dots, z_n]$ называется аффинным $(m|n)$ -суперпространством.

Очевидно, что $\mathbf{A}^{m|n}(B) = B_0^m \oplus B_1^n$ для $B \in \mathbf{SAlg}_K$. В частности, $\mathbf{A}^{1|1}(B) = B$ для любой супералгебры B .

Определение 9. Аффинная суперсхема X называется алгебраической, если $K[X] \simeq K[t_1, \dots, t_m | z_1, \dots, z_n] / I$ для некоторых $m, n \in \mathbb{N}$ и конечнопорожденного суперидеала I .

Определение 10. Аффинная суперсхема X называется редуцированной, если $K[X]$ не содержит нильпотентных элементов, отличных от 0.

Определение 11. Пусть X — аффинная суперсхема, I — суперидеал $K[X]$. Подфунктор функтора X , определенный как

$$\begin{aligned} V(I)(A) &= \{\varphi \in \text{Hom}_{\mathbf{SAlg}_K}(R, A) \mid \varphi(I) = 0\} \\ &\simeq \{x \in (SSp R)(A) \mid f(x) = 0 \forall f \in I\} \end{aligned}$$

называется замкнутым подфунктором, соответствующим суперидеалу I .

Отображение $I \mapsto V(I)$ из множества суперидеалов $K[X]$ в множество подфункторов X инъективно. Более точно,

Утверждение 1. Для двух суперидеалов I, I' супералгебры $K[X]$

$$I \subset I' \Leftrightarrow V(I) \supset V(I'). \quad (2)$$

Доказательство. Прямое утверждение тривиально, поэтому докажем верность обратного. Пусть $V(I') \subset V(I)$. Рассмотрим каноническое отображение $u : K[X] \rightarrow K[X]/I'$. $u \in \text{Hom}_{\mathbf{SAlg}_K}(K[X], K[X]/I') = SSp(K[X]/I')$. Т.к. $u(I') = 0$, то $u \in V(I')(K[X]/I')$. Из условия $V(I') \subset V(I)$ следует, что $u \in V(I')(K[X]/I') \Rightarrow u(I) = 0 \Rightarrow I \subset I'$. \square

Замкнутый подфунктор является аффинной суперсхемой, т.к. $V(I) \simeq SSp(K[X]/I)$.
Замкнутые подфункторы определяют топологию на аффинной суперсхеме $SSp R$:

$$V(R) = \emptyset, \quad V(0) = SSp R,$$

$$\bigcap_{j \in J} V(I_j) = V\left(\sum_{j \in J} I_j\right), \quad \bigcup_{j \in J} V(I_j) = V\left(\prod_{j \in J} I_j\right)$$

для любого семейства суперидеалов $\{I_j\}_{j \in J} \subset R$.

Пусть X_1, X_2 — аффинные суперсхемы, $I_1 \subset K[X_1]$, $I_2 \subset K[X_2]$ — суперидеалы. Несложно проверить, что

$$V(I_1) \times V(I_2) \simeq V(I_1 \otimes K[X_2] + K[X_1] \otimes I_2). \quad (3)$$

2.2. Лемма Ионеды

Лемма Ионеды — фундаментальное утверждение теории категорий — позволяет вложить любую категорию \mathcal{C} в категорию функторов, определенных в \mathcal{C} . В общем виде Лемму Ионеды можно найти в [10], в этой работе подробнее остановимся на случае для категории \mathbf{SAlg}_K .

Лемма 1 (Ионеда). $\forall R \in \mathbf{SAlg}_K \ \forall K$ -функтора X существует канонический изоморфизм

$$\mathrm{Mor}(SSp R, X) \simeq X(R),$$

который задается отображением $f \mapsto f(R)(id_R)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathrm{Mor}(SSp R, X)$. Сначала убедимся, что $f(R)(id_R) \in X(R)$. Это следует из того, что $f(R) : (SSp R)(R) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{SAlg}_K}(R, R) \rightarrow X(R)$. Далее убедимся, что приведенное отображение действительно является изоморфизмом.

По определению морфизма функторов $\forall A \in \mathbf{SAlg}_K \ \forall u \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{SAlg}_K}(B, A)$ коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} (SSp R)(B) & \xrightarrow{f(B)} & X(B) \\ (SSp R)(u) \downarrow & & \downarrow X(u) \\ (SSp R)(A) & \xrightarrow{f(A)} & X(A) \end{array} \quad (4)$$

Возьмем R в качестве B и получим, что $f(A) \circ X(u) = (SSp R)(u) \circ f(R)$. Обозначим $x_f = f(R)(id_R)$. Принимая во внимание, что $(SSp R)(u)(id_R) = u \circ id_R$, получаем

$$f(A)(u) = X(u)(x_f).$$

Отсюда видно, что f однозначно определяется x_f . Осталось построить обратное отображение. Пусть $x \in X(R)$ и $A \in \mathbf{SAlg}_K$. Зададим $f_x(A) : SSp R \rightarrow X(A)$ отображе-

нием $u \mapsto X(u)(x)$. Несложно убедиться, что $f_x \in \text{Mor}(SSp R, X)$ и что $x \mapsto f_x$ обратно отображению $f \mapsto f_x$. \square

Следствие 1. Если взять $X = SSp R'$, то получим

$$\text{Mor}(SSp R, SSp R') \simeq \text{Hom}_{\mathbf{SAlg}_K}(R', R) \quad (5)$$

для любых супералгебр R, R' .

Обозначим эту биекцию $f \mapsto f^*$ и будем называть f^* *коморфизмом*, соответствующим f . Таким образом, мы получили дуальность категорий аффинных суперсхем и супералгебр.

2.3. Групповые K -функторы и аффинные групповые суперсхемы

Определение 12. Групповым K -функтором будем называть функтор из \mathbf{SAlg}_K в \mathbf{Gr} .

Если взять композицию группового функтора с забывающим функтором из \mathbf{Gr} в \mathbf{Sets} , то групповой K -функтор можно рассматривать как K -функтор. Поэтому все результаты для K -функторов можно перенести на групповые K -функторы.

Пусть G, H — групповые K -функторы. Обозначим через $\text{Mor}(G, H)$ множество морфизмов из G в H , если рассматривать G и H как K -функторы; через $\text{Hom}(G, H)$ множество морфизмов групповых функторов.

Определение 13. Аффинная групповая суперсхема — групповой K -функтор, который является аффинной суперсхемой, если его рассматривать как функтор.

Определение 14. Пусть G — групповой K -функтор. H называется групповым подфунктором G , если H — подфунктор G и $\forall A \in \mathbf{SAlg}_K$ $H(A)$ — подгруппа в $G(A)$.

Нетрудно убедиться, что пересечение групповых подфункторов — групповой подфунктор, прообраз группового подфунктора относительно гомоморфизма — групповой подфунктор.

Определение 15. Групповой подфунктор H функтора G называется нормальным (соответственно, центральным), если $\forall A \in \mathbf{SAlg}_K$ $H(A)$ — нормальная (соответственно, центральная) подгруппа в $G(A)$.

Определение 16. Пусть G — аффинная групповая суперсхема. H — замкнутая аффинная групповая суперподсхема, если H — групповой подфунктор G , который замкнут, если рассматривать H как подфунктор аффинной суперсхемы G .

2.4. Дуальность категорий аффинных групповых суперсхем и супералгебр Хопфа

Пусть G — групповой K -функтор, $A, B \in \mathbf{SAlg}_K$, $u \in \text{Hom}_{\mathbf{SAlg}_K}(A, B)$, Групповая структура на $G(A)$ определяет морфизмы K -функторов (для каждого функтора коммутативная диаграмма из определения морфизма функторов):

умножение $m_G : G \times G \rightarrow G$ ($m_G(A)$ — умножение в группе $G(A)$),

$$\begin{array}{ccc} G(A) \times G(A) & \xrightarrow{m_G(A)} & G(A) \\ G(u) \times G(u) \downarrow & & \downarrow G(u) \\ G(B) \times G(B) & \xrightarrow{f(A)} & G(B) \end{array} \quad (6)$$

единица $1_G : SS p K \rightarrow G$ ($1_G(A) : f \mapsto 1_{G(A)}$ для $f \in (SS p K)(A)$),

$$\begin{array}{ccc} (SS p K)(A) & \xrightarrow{1_G(A)} & G(A) \\ (SS p K)(u) \downarrow & & \downarrow (SS p K)(u) \\ (SS p K)(B) & \xrightarrow{1_G(A)} & G(B) \end{array} \quad (7)$$

обратная функция $i_G : G \rightarrow G$ ($i_G(A) : g \mapsto g^{-1}$ для $g \in G(A)$)

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \xrightarrow{i_G(A)} & G(A) \\ G(u) \downarrow & & \downarrow G(u) \\ G(B) & \xrightarrow{i_G(A)} & G(B) \end{array} \quad (8)$$

Пусть G — аффинная групповая суперсхема. Согласно следствию 1 каждому из этих морфизмов единственным образом соответствует свой коморфизм.

$$\begin{aligned} \text{коумножение} \quad \Delta_G &= m_G^* : K[G] \rightarrow K[G] \otimes K[G], \\ \text{коединица} \quad \varepsilon_G &= 1_G^* : K[G] \rightarrow K, \\ \text{антипод} \quad s_G &= i_G^* : K[G] \rightarrow K[G], \end{aligned}$$

Из аксиом групповой структуры следуют аксиомы коумножения, коединицы и антипода. Ниже эти аксиомы записаны в виде коммутативных диаграмм. Ассоциативность

умножения $g_1(g_2g_3) = (g_1g_2)g_3$ переходит в коассоциативность коумножения:

$$\begin{array}{ccc}
 K[G] & \xrightarrow{\Delta} & K[G] \otimes K[G] \\
 \Delta \downarrow & & \downarrow id \otimes \Delta \\
 K[G] \otimes K[G] & \xrightarrow{\Delta \otimes 1} & K[G] \otimes K[G] \otimes K[G]
 \end{array} \quad (9)$$

Аксиома единицы $eg = ge = g$ переходит в аксиому коединицы:

$$\begin{array}{ccccc}
 K \otimes K[G] & \xlongequal{\quad} & K[G] & \xlongequal{\quad} & K[G] \otimes K \\
 \downarrow id \otimes id & & \downarrow \Delta \otimes id & & \downarrow id \otimes id \\
 K \otimes K[G] & \xleftarrow{\varepsilon \otimes 1} & K[G] \otimes K[G] & \xrightarrow{1 \otimes \varepsilon} & K[G] \otimes K
 \end{array} \quad (10)$$

Аксиома обратного элемента $gg^{-1} = g^{-1}g = e$ переходит в аксиому антипода:

$$\begin{array}{ccccc}
 K[G] \otimes K[G] & \xrightarrow{s \otimes id} & K[G] \otimes K[G] & & \\
 \uparrow \Delta & & \searrow m & & \\
 K[G] & \xrightarrow{\varepsilon} & K & \xrightarrow{1} & K[G] \\
 \downarrow \Delta & & \nearrow m & & \\
 K[G] \otimes K[G] & \xrightarrow{id \otimes s} & K[G] \otimes K[G] & &
 \end{array} \quad (11)$$

Следуя Свидлеру, будем писать $\Delta(c) = \sum c_1 \otimes c_2$ (подробнее о конструктурах и соответствующих обозначениях будет рассказано ниже). Тогда вышеуказанные аксиомы записываются в виде:

$$(\Delta \otimes id) \circ \Delta = \Delta \circ (id \otimes \Delta) \quad \sum c_{11} \otimes c_{12} \otimes c_2 = \sum c_1 \otimes c_{21} \otimes c_{22} =: \sum c_1 \otimes c_2 \otimes c_3,$$

$$(\varepsilon \otimes id) \circ \Delta = id = (id \otimes \varepsilon) \circ \Delta \quad c = \sum \Delta(c_1)c_2 = \sum c_1\Delta(c_2),$$

$$m \circ (id \otimes s) \circ \Delta = \eta \circ \varepsilon = m \circ (s \otimes id) \circ \Delta \quad \varepsilon(c) = \sum c_1 s(c_2) = \sum s(c_1)c_2,$$

где η — единица $K[G]$, m — умножение в $K[G] \otimes K[G]$.

Определение 17. Супералгебра вместе с коумножением, коединицей и антиподом, удовлетворяющими аксиомам 9, 10, 11 называется супералгеброй Хопфа.

Таким образом, имеем дуальность категорий аффинных групповых суперсхем и супералгебр Хопфа.

Определение 18. Пусть C — супералгебра Хопфа. Суперидеал I называется суперидеалом Хопфа, если $\Delta(I) \subseteq C \otimes I + I \otimes C$, $I \subseteq \mathcal{M} = \ker \varepsilon$, $s(I) \subseteq I$.

Аналогично топологии, определенной на аффинной суперсхеме в пункте 2.1, на аффинной групповой суперсхеме топология определяется замкнутыми подфункторами $V(I)$, соответствующими суперидеалам Хопфа.

2.5. Суперкоалгебры и суперкомодули

Для простоты изложения материала супералгебры Хопфа были определены как объекты, дуальные аффинным групповым суперсхемам. Можно было сначала определить супералгебры Хопфа как, изначально приняв аксиомы 9, 10, 11. В этом разделе все-таки будут приведены некоторые стандартные понятия. Подробное изложение для случая обычных, неградуированных систем, можно найти в [4].

Суперпространство, наделенное коумножением и коединицей с соответствующими аксиомами называется *суперкоалгеброй* (соответственно, *коалгеброй*, если рассматривать неградуированные алгебры).

Определение 19. Суперкоалгебра называется кокоммутативной, если

$$\Delta_C(c) = \sum c_1 \otimes c_2 = (-1)^{|c_1||c_2|} c_2 \otimes c_1.$$

Супералгебра, которая в то же время является и суперкоалгеброй, называется *супербиверальной алгеброй*. Таким образом, супералгебра Хопфа — супербиверальная алгебра с антиподом.

Определение 20. V называется правым суперкомодулем над суперкоалгеброй C , если задано линейное отображение $\tau : V \rightarrow V \otimes C$, называемое *кодействием суперкоалгебры на V* , которое сохраняет градуировку и для которого коммутативны следующие диаграммы коммутативны:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\tau} & V \otimes C \\ \tau \downarrow & & \downarrow \tau \otimes id \\ V \otimes C & \xrightarrow{id \otimes \Delta} & V \otimes C \otimes C \end{array} \quad \begin{array}{ccc} V \otimes C & \xrightarrow{id \otimes \varepsilon} & V \otimes K \\ \tau \uparrow & \nearrow \simeq & \uparrow \\ V & & \end{array} \quad (12)$$

Любая суперкоалгебра может быть наделена структурой суперкомодуля над собой, тогда кодействием является коумножение. Пусть V, W — (правые) суперкомодули над суперкоалгебрами C и B соответственно. Тензорное произведение $C \otimes B$ наделается структурой суперкоалгебры по правилу $\Delta_{C \otimes B}(c) = (c \otimes b) = \sum (-1)^{|b_1||c_2|} (c_1 \otimes b_1) \otimes (c_2 \otimes b_2)$, где $\Delta_C(c) = \sum c_1 \otimes c_2$, $\Delta_B(b) = \sum b_1 \otimes b_2$. Более того, суперпространство $V \otimes W$ будет $C \otimes B$ -суперкомодулем относительно кодействия $\tau_{v \otimes w}(v \otimes w) = \sum (-1)^{|w_1||c_2|} (v_1 \otimes w_1) \otimes (c_2 \otimes b_2)$, где $\tau_V(v) = \sum v_1 \otimes c_2$, $\tau_W(w) = \sum w_1 \otimes b_2$.

Если $\varphi : C \rightarrow C'$ — гомоморфизм суперкоалгебр, то произвольный C -суперкомодуль будет и C' -суперкомодулем относительно кодействия $(id \otimes \varphi)_{\tau_V}$. Если C — супербиалгебра, то отображение $m : C \otimes C \rightarrow C$, индуцированное умножением, является гомоморфизмом суперкоалгебр. В частности, если V, W — левые C -суперкомодули, то мы получаем диагональное кодействие $(id \otimes m)_{\tau_{V \otimes W}}$ супербиалгебры C на $V \otimes W$. Более того $V \otimes W$ и $W \otimes V$ изоморфны как C -суперкомодули относительно изоморфизма перестановки $t : v \otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|} w \otimes v$, $v \in V$, $w \in W$.

3. Супералгебры распределений и их связь с супералгебрами Ли

Супералгебры распределений позволяют установить связь аффинных групповых суперсхем с супералгебрами Ли, а введение функтора $\mathbf{Lie}(G)$ позволяет использовать функторный язык для изучения супералгебр Ли. Доказательства утверждений, приведенных в этом разделе, опущены. Их можно найти в [1, 5, 6].

3.1. Супералгебры распределений

Пусть X — аффинная суперсхема. Повторим определения, приведенные в [6] и [1]. Элемент из $\text{Dist}_n(X, \mathcal{M}) = (K[X]/\mathcal{M}^{n+1})^*$ будем называть *распределением* на X с носителем в \mathcal{M} порядка $\leq n$, где \mathcal{M} — максимальный идеал супералгебры $K[X]$. Имеем

$$\bigcup_{n \geq 0} \text{Dist}_n(X, \mathcal{M}) = \text{Dist}(X, \mathcal{M}) \subseteq K[X]^*.$$

Если $g : X \rightarrow Y$ — морфизм аффинных суперсхем, то он порождает морфизм суперпространств $dg_{\mathcal{M}} : \text{Dist}(X, \mathcal{M}) \rightarrow \text{Dist}(Y, (g^*)^{-1}(\mathcal{M}))$ такой, что

$$dg_{\mathcal{M}}(\text{Dist}_n(X, \mathcal{M})) \subseteq \text{Dist}_n(Y, (g^*)^{-1}(\mathcal{M})) \quad \forall n \geq 0.$$

Если $X = V(I)$ — замкнутая подсуперсхема в Y , то $\text{Dist}(X, \mathcal{M})$ отождествляется с $\{\varphi \in \text{Dist}(Y, \mathcal{M}) \mid \varphi(I) = 0\}$, где $I \subseteq \mathcal{M}$.

Если X — алгебраическая аффинная групповая суперсхема и $\mathcal{M} = \ker \varepsilon_X$, то $\text{Dist}(X, \mathcal{M})$ обозначается как $\text{Dist}(X)$. В этом случае $\text{Dist}(X)$ имеет структуру супералгебры Хопфа с умножением $\varphi\psi(f) = \sum (-1)^{|\varphi||\psi|} \varphi(f_1)\psi(f_2)$ для $\varphi, \psi \in \text{Dist}(X)$, $f \in K[X]$, и коумножением $\Delta_X(f) = \sum f_1 \otimes f_2$, с единицей ε_X , коединицей $\varepsilon_{\text{Dist}(X)} : \varphi \mapsto \varphi(1)$ и антиподом $s_{\text{Dist}(X)}(\varphi)(f) = \varphi(s_X(f))$ для $\varphi \in \text{Dist}(X)$ и $f \in K[X]$.

$\text{Dist}(X)$ — фильтрованная алгебра, т.е. $\forall m, n \geq 0 \text{Dist}_m(X)\text{Dist}_n(X) \subseteq \text{Dist}_{m+n}(X)$. Рассмотрим суперпространство $\text{Lie}(X) = \{\varphi \in \text{Dist}_1(X) \mid \varphi(1) = 0\}$. Его можно наделять структурой супералгебры Ли, положив $[\varphi, \psi] = \varphi\psi - (-1)^{|\varphi||\psi|}\psi\varphi$.

Замечание 1. Супералгебра Ли не является алгеброй Ли в обычном смысле — аксиомы выполняются в учетом четности элементов, а именно $\forall \varphi, \psi, \rho \in \text{Lie}(X)$

$$[\varphi, \psi] = (-1)^{|\varphi||\psi|}[\psi, \varphi],$$

$$(-1)^{|\rho||\varphi|}[[\varphi, \psi], \rho] + (-1)^{|\psi||\rho|}[[\rho, \varphi], \psi] + (-1)^{|\varphi||\psi|}[\psi, [\rho, \varphi]] = 0.$$

Как супералгебра Хопфа $\text{Dist}(X)$ кокоммутативна, т.е. $\sum \varphi_1 \otimes \varphi_2 = \sum (-1)^{|\varphi_1||\varphi_2|} \varphi_2 \otimes \varphi_1$.

3.2. Действие сопряжения и функтор $\mathbf{Lie}(G)$

Определение 21. Пусть $A \in \mathbf{SAlg}_K$. Супералгеброй дуальных чисел называется $A[\varepsilon_0, \varepsilon_1] = \{a + \varepsilon_0 b + \varepsilon_1 c \mid a, b, c \in A\}$, $|\varepsilon_i| = i$, $\varepsilon_i \varepsilon_j = 0$, $i, j \in \{0, 1\}$.

Имеем проективный $p_A : A[\varepsilon_0, \varepsilon_1] \rightarrow A$ и инъективный $i_A : A \rightarrow A[\varepsilon_0, \varepsilon_1]$ морфизмы супералгебр, определенные как $a + \varepsilon_0 b + \varepsilon_1 c \mapsto a$ и $a \mapsto a$ соответственно.

Определение 22. Функтором супералгебры Ли будем называть функтор $\mathbf{Lie}(G)$, определенный как

$$\mathbf{Lie}(G) = \left(G(A[\varepsilon_0, \varepsilon_1]) \xrightarrow{G(p_A)} G(A) \right), \quad A \in \mathbf{SAlg}_K.$$

Пусть V — суперпространство. Определим функтор V_a из категории \mathbf{SAlg}_K в категорию векторных суперпространств: $V_a(A) = V \otimes A$.

Лемма 2. Существует изоморфизм абелевых групповых функторов $\mathbf{Lie}(G)_a \simeq \mathbf{Lie}(G)$, который задается отображением

$$(v \otimes a)(f) = \varepsilon_G(f) + (-1)^{|a||f|} \varepsilon_{v \otimes a} v(f) a, \quad v \in \mathbf{Lie}(G) = (\mathcal{M}/\mathcal{M}^2)^*, a \in A, f \in K[G].$$

Для более подробной информации см. [5].

Если мы отождествляем $\mathbf{Lie}(G) \otimes A$ с $\mathrm{Hom}_K(\mathcal{M}/\mathcal{M}^2, A)$ при помощи отображения $(v \otimes a)(f) = (-1)^{|a||f|} v(f) a$, то вышеуказанный изоморфизм может быть представлен отображением

$$u \mapsto \varepsilon_G + \varepsilon_0 u_0 + \varepsilon_1 u_1, \quad u \in \mathrm{Hom}_K(\mathcal{M}/\mathcal{M}^2, A).$$

Определение 23. Рассмотрим действие аффинной групповой суперсхемы G на функтор $\mathbf{Lie}(G)$:

$$(g, x) \mapsto G(i_a)(g) x G(i_A)(g)^{-1}, \quad g \in G(A), x \in \mathbf{Lie}(G)(A), A \in \mathbf{SAlg}_K.$$

Это действие называется сопряжением и обозначается \mathbf{Ad} .

Лемма 3. Сопряжение линейно. В частности, оно порождает морфизм аффинных групповых схем $G \rightarrow \mathrm{GL}(\mathbf{Lie}(G))$.

4. Связные аффинные групповые суперсхемы

В этом разделе будут введены понятия связности (??) и псевдосвязности (??) аффинной групповой суперсхемы, а также указана их эквивалентность для алгебраической аффинной групповой суперсхемы над полем характеристики 0. Доказательства сопутствующих фактов в основном опущены, поскольку опираются на понятия, которые мы не будем вводить в этой работе.

4.1. Топология Зарисского и связность аффинных групповых суперсхем

Сначала рассмотрим понятие связной компоненты для обычного случая, который подробно описан в [5], главы 5-6, а затем перенесем полученные понятия на суперслучай.

Пусть A — коммутативная алгебра. Множество $\{p \mid p \text{ — простой идеал алгебры } A\} = \text{Spec } A$ называется *спектром* алгебры A . Подмножество спектра называется *замкнутым*, если оно имеет вид $Z(I) = \{p \in \text{Spec } A \mid I \subseteq p\}$ для некоторого идеала I . Соотношения $\bigcap Z(I_n) = Z(\bigcap I_n)$, $Z(I) \cup Z(J) = Z(IJ)$ определяют *топологию Зарисского* на $\text{Spec } A$.

Аффинную групповую схему X будем называть *связной*, если $\text{Spec } K[G]$ связан как топологическое пространство. По теореме из пункта 6.6 из [5] X связна $\Leftrightarrow \text{Spec } A$ неприводим, т.е. в $K[G]$ нет нетривиальных идемпотентов.

Теперь перейдем к суперслучаю. Пусть A — коммутативная супералгебра. Рассмотрим *суперспектр* $SSpec A = \{p \mid p \text{ — простой суперидеал } A\}$.

Покажем, что в силу коммутативности A простой идеал A является суперидеалом. Пусть $x = x_0 + x_1 \in p$. В силу коммутативности $x_1^2 = (-1)^{|x_1||x_1|}x_1^2 \Rightarrow x_1^2 = 0 \in p \Rightarrow x_1 \in p \Rightarrow x_0 \in p$. Получаем, что все нечетные элементы лежат в p , поэтому $p = p_0 \oplus A_1$, где p_0 — простой идеал A_0 .

Таким образом, $SSpec A = \text{Spec } A_0$. Поскольку $A_0 = A_0/A_1^2 = A/AA_1$, то $SSpec A = SSpec(A/AA_1)$. Аналогично определяем топологию Зарисского: замкнутое подмножество $Z(I) = \{p \in SSpec A \mid I \subseteq p\}$ определяется суперидеалом I . В силу вышеизложенного топология Зарисского на $SSpec A$ равна топологии Зарисского на $\text{Spec } A$.

Можно доказать, что AA_1 — суперидеал Хопфа. $G_{ev} = V(AA_1) = SSP(A/AA_1)$ — наибольшая четная суперподсхема G .

Для нас будет важно, что

Утверждение 2. *Аффинная групповая суперсхема G связна тогда и только тогда, когда G_{ev} связна.*

4.2. Псевдосвязная компонента

Определение 24. Алгебраическая аффинная групповая суперсхема $G = SSp A$ называется псевдосвязной, если $\bigcap_{n \geq 0} \mathcal{M}^n = 0$, где $\mathcal{M} = \ker s_G$.

Лемма 4. Пусть G — алгебраическая аффинная групповая суперсхема. Суперидеал $I = \bigcap_{n \geq 0} \mathcal{M}^n$ является суперидеалом Хопфа, а аффинная групповая суперподсхема $G^{[0]} = V(I)$ нормальна и связна.

$G^{[0]}$ называется псевдосвязной компонентой G . Очевидно, что G псевдосвязна тогда и только тогда, когда $G = G^{[0]}$.

Лемма 5 (Теорема Крулля о пересечении). Пусть A — конечнопорожденная коммутативная супералгебра и V — конечнопорожденный A -суперкомодуль. Для любого суперидеала $I \subseteq A$ $\bigcap_{n \geq 0} I^n V = v \in V \mid \exists x \in I_0 : (1 - x)v = 0$.

Утверждение 3. Пусть $\pi : G \rightarrow H$ — эпиморфизм алгебраических аффинных групповых суперсхем. Если $\text{char } K = 0$, то порожденная эпиморфизмом короткая последовательность супералгебр Ли

$$0 \rightarrow \text{Lie}(\ker \pi) \rightarrow \text{Lie}(G) \xrightarrow{d\pi} \text{Lie}(H) \rightarrow 0$$

является точной.

Лемма 6. Пусть G — алгебраическая аффинная групповая суперсхема, H_1, H_2 — суперподсхемы G , H_1 псевдосвязна. Тогда $H_1 \subseteq H_2 \Leftrightarrow \text{Dist}(H_1) \subseteq \text{Dist}(H_2)$, а если $\text{char } K = 0$, то $H_1 \subseteq H_2 \Leftrightarrow \text{Lie}(H_1) \subseteq \text{Lie}(H_2)$.

Лемма 7. Если G псевдосвязна или связна, то из $\text{Lie}(G) = 0$ следует $G = E$. В частности, если $\text{char } K = 0$ и G алгебраическая, то $G^{(0)} = G^{[0]}$.

Это важное утверждение позволяет при рассмотрении алгебраических аффинных групповых суперсхем в случае поля нулевой характеристики использовать определения связности и псевдосвязности как эквивалентные.

4.3. Соответствие нормальных суперподсхем G максимальным абелевым суперидеалам $\text{Lie}(G)$

Определение 25. Подфунктор $Z(G)$ группового K -функтора G называется центральным, если H — подфунктор в G и $\forall A \in \mathbf{SAlg}_K H(A)$ — центральная подгруппа в $G(A)$.

Утверждение 4. Пусть G — аффинная групповая суперсхема. $Z(G)$ — замкнутая аффинная групповая суперподсхема в G .

Лемма 8. Если G связна, $\text{char } K = 0$, то $\text{Lie}(Z(G)) = Z(\text{Lie}(G))$.

Теорема 1. Пусть $\text{char } K = 0$, G — связная аффинная групповая суперсхема, I — максимальный абелев суперидеал в $\text{Lie}(G)$. Существует $H \triangleleft G : \text{Lie}(H) = I$.

Доказательство. Обозначим $L = \text{Lie}(G)$. Доказательство проведем индукцией по $\dim L$. Предположим, что если H — связная аффинная групповая суперсхема и $\dim \text{Lie}(H) < \dim L$, то утверждение выполнено для H .

Рассмотрим действие $\mathbf{Ad} : G \rightarrow \text{GL}(I)$, $\ker \mathbf{Ad} = R$. Пусть $J = \text{Lie}(R) = \{x \in L \mid [x, I] = 0\}$. Очевидно, $I \subseteq J$.

Если $\dim J \leq \dim L$, то по предположению индукции утверждение выполнено для R , т.е. $\exists H \triangleleft R : \text{Lie}(H) = I$. Поскольку $H \triangleleft R$ и $R \triangleleft G$ как ядро \mathbf{Ad} , то $H \triangleleft G$, следовательно, утверждение выполнено для G .

Рассмотрим случай $\dim J = \dim L$. Т.к. G алгебраическая, то $\dim L < \infty \Rightarrow J = L$. Отсюда следует, что $[L, I] = 0$, а в силу определения центра $I \subseteq Z(L)$. По условию I — максимальный суперидеал $\Rightarrow I$ не может быть собственным подмножеством $\Rightarrow I = Z(L)$. По лемме 8 получаем, что $I = \text{Lie}(Z(G))$, а $Z(G) \triangleleft G$. \square

5. Разрешимость аффинных групповых суперсхем

Перед тем, как дать определение разрешимой аффинной групповой суперсхемы, сначала необходимо определить коммутаторную суперподсхему. Нижеизложенное повторяет описание коммутанта для обычных схем ([5], глава 10), но более подробно.

Пусть G - аффинная групповая суперсхема над полем K . Определим морфизм функторов $\pi : G \times G \rightarrow G$, переводящее (g, h) в коммутатор $ghg^{-1}h^{-1}$. Ему соответствует коморфизм $\pi^* : K[G] \rightarrow K[G] \otimes K[G]$. Обозначим $I_1 = \ker \pi^*$. Как ядро гомоморфизма супералгебр Хопфа I_1 — суперидеал Хопфа. Аналогично для $n \in \mathbb{N}$ имеем морфизм $\pi_n : (g_1, h_1, \dots, g_n, h_n) \mapsto g_1 h_1 g_1^{-1} h_1^{-1} \cdots g_n h_n g_n^{-1} h_n^{-1}$ и коморфизм $\pi_n^* : K[G] \rightarrow K[G]^{\otimes 2n}$. $I_n = \ker \pi_n^*$.

Утверждение 5. $I_{n+1} \subseteq I_n$.

Обозначим $I = \bigcap_{n \geq 0} I_n$.

Утверждение 6. $I = \bigcap I_n$ — суперидеал Хопфа.

Доказательство. Для любого $n \in \mathbb{N}$ I_n — суперидеал Хопфа, то есть

$$I \subseteq \ker \varepsilon, \quad \Delta(I_n) \subseteq K[G] \otimes I_n + I_n \otimes K[G], \quad s(I_n) \subseteq I.$$

Очевидно, что $I \subseteq \ker \varepsilon$ и $s(I) \subseteq I$.

Рассмотрим I_{2n} . $\pi_{2n} = m \circ (\pi_n \times \pi_n)$, поэтому можно записать дуальную коммутативную диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} G^{2n} \times G^{2n} & \xrightarrow{\pi_n \times \pi_n} & G \times G \\ & \searrow \pi_{2n} & \downarrow m \\ & & G \end{array} \quad \begin{array}{ccc} K[G]^{\otimes 2n} \otimes K[G]^{\otimes 2n} & \xleftarrow{\pi_n^* \otimes \pi_n^*} & K[G] \times K[G] \\ & \nwarrow \pi_{2n}^* & \uparrow \Delta \\ & & K[G] \end{array}$$

Отсюда получаем, что $\pi_{2n}^* = (\pi_n^* \times \pi_n^*) \circ \Delta$. Если $\Delta(\varphi) = 0$, то $(\pi_n^* \times \pi_n^*)(\Delta(\varphi)) = 0$, поэтому

$$\Delta(I_{2n}) \subseteq \ker(\pi_n^* \times \pi_n^*) = I_n \otimes K[G] + K[G] \otimes I_n. \quad (13)$$

$I = \bigcap I_n = \bigcap I_{2n} \Rightarrow \Delta(I) = \Delta(\bigcap I_{2n}) \subseteq \bigcap (I_n \otimes K[G] + K[G] \otimes I_n) = \bigcap I_n \otimes K[G] + K[G] \otimes \bigcap I_n = I \otimes K[G] + K[G] \otimes I$, что и требовалось для суперидеала Хопфа. \square

Утверждение 7. Замкнутая суперподсхема $V(I)$, определяемая суперидеалом Хопфа I , является наименьшей замкнутой суперподсхемой, содержащая произведения любых коммутаторов.

Определение 26. Замкнутая подгруппа $V(I) = G'$, определяемая суперидеалом Хопфа I , называется коммутантом аффинной групповой суперсхемы G .

Утверждение 8. G' — нормальная суперподсхема аффинной групповой суперсхемы G .

Стандартным образом определим n -й коммутант $G^{(n)}$.

Определение 27. Будем называть аффинную групповую суперсхему G разрешимой, если $G^{(n)}$ тривиальна для некоторого n .

Теорема 2. Пусть G алгебраическая. Если G связна, то и G' связна.

6. Аналог теоремы Каца

Лемма 9. Обозначим $\text{Lie}(G) = L = L_0 \oplus L_1$. $\text{Lie}(G_{ev}) = L_0$.

Лемма 10. Аффинная групповая суперсхема G абелева $\Leftrightarrow \text{Lie}(G)$ абелева.

Теорема 3 (Кац). Супералгебра Ли $L = L_0 \oplus L_1$ разрешима тогда и только тогда, когда разрешима алгебра Ли L_0 .

Доказательство можно найти в статье [2]. Теперь все готово для доказательства основной теоремы этой работы.

Теорема 4. Пусть $\text{char } K = 0$, G - связная алгебраическая аффинная групповая суперсхема. G разрешима $\Leftrightarrow \text{Lie}(G)$ разрешима $\Leftrightarrow G_{ev}$ разрешима.

Доказательство. а) Предположим, что G разрешима, т.е. для некоторого $n \in \mathbb{N}$

$$G \triangleright G' \triangleright G'' \triangleright \dots \triangleright G^{(n)} = 1. \quad (14)$$

Рассмотрим абелев фактор G/G' . Отображение $\pi : G \rightarrow G/G'$ является эпиморфизмом алгебраических аффинных групповых суперсхем, следовательно по утверждению 3 имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Lie}(G') \rightarrow \text{Lie}(G) \rightarrow \text{Lie}(G/G') \rightarrow 0,$$

Откуда получаем, что $\text{Lie}(G') \subseteq \text{Lie}(G)$. Поскольку фактор G/G' абелев, то по лемме 10 $\text{Lie}(G/G')$ абелев, а значит и фактор $\text{Lie}(G)/\text{Lie}(G') = \text{Lie}(G/G')$ абелев. Рассматривая таким образом все факторы цепочки (14), получаем цепочку

$$\text{Lie}(G) \triangleright \text{Lie}(G') \triangleright \text{Lie}(G'') \triangleright \dots \triangleright \text{Lie}(G^{(n-1)}) \triangleright 0,$$

в которой все факторы абелевы, то есть $\text{Lie}(G)$ разрешима.

Обратно, предположим, что $\text{Lie}(G)$ разрешима, то есть существует цепочка

$$\text{Lie}(G) \triangleright I_1 \triangleright I_2 \triangleright \dots \triangleright I_n = 0. \quad (15)$$

Рассмотрим I_{n-1} . Т.к. $I_n = 0$, то I_{n-1} — максимальный суперидеал $\text{Lie}(G)$. При этом он абелев, как и все суперидеалы этой цепочки. Тогда по теореме 1 существует нормальная суперподсхема $H_{n-1} \triangleleft G : \text{Lie}(H_{n-1}) = I_{n-1}$. Суперидеал I_{n-1} абелев $\Rightarrow \text{Lie}(H_{n-1})$ абелев \Rightarrow абелевы H_{n-1} и G/H_{n-1} .

Теперь рассмотрим $\text{Lie}(G)/I_{n-1} = \text{Lie}(G/H_{n-1})$. I_{n-1} — максимальный абелев суперидеал $\text{Lie}(G/H_{n-1}) \Rightarrow \exists H_{n-2} \triangleleft G/H_{n-1} : \text{Lie}(H_{n-2}) = I_{n-2}$. Таким образом, мы получили $\text{Lie}(H_{n-1}) \triangleleft \text{Lie}(H_{n-2})$, а по лемме 6 получаем, что $H_{n-1} \triangleleft H_{n-2}$. Аналогичным

образом продолжая разбирать цепочку (15) вверх, получаем цепочку

$$G \triangleright H_1 \triangleright \dots \triangleright H_{n-2} \triangleright H_{n-1} \triangleright E,$$

в которой все факторы абелевы, то есть G разрешима.

Таким образом, мы доказали, что G разрешима $\Leftrightarrow \text{Lie}(G)$ разрешима.

б) По теореме 3 $\text{Lie}(G)$ разрешима тогда и только тогда, когда разрешима $\text{Lie}(G)_0$. По лемме 9 $\text{Lie}(G)_0 = \text{Lie}(G_{ev})$, а из первой части доказательства следует, что $\text{Lie}(G_{ev})$ разрешима тогда и только тогда, когда G_{ev} разрешима. Таким образом доказана вторая эквивалентность, а с ней и вся теорема. \square

Заключение

Список литературы

- [1] J.C. Jantzen. *Representations of Algebraic Groups*. Academic Press, Inc., Orlando, Florida, 1987.
- [2] V.G. Кас. Lie superalgebras. *Advanced in Mathematics*, 26:8–96, 1977.
- [3] A. Kleshchev. *Linear and projective representations of symmetric groups*. Cambridge University Press, 2005.
- [4] М.Е. Sweedler. *Hopf Algebras*. W.A. Benjamin, Inc., New York, 1969.
- [5] W.C. Waterhouse. *Introduction to Affine Group Schemes*. Springer Verlag, 1979.
- [6] A.N. Zubkov. Affine quotients of supergroups. *Transformation Groups*, 14(3):713–745, 2009.
- [7] И.В. Аржанцев. *Градуированные алгебры и 14-я проблема Гильберта*. МЦНМО, Москва, 2009.
- [8] А.Н. Зубков. О некоторых свойствах общих линейных супергрупп и супералгебр Шура. *Алгебра и логика*, 45(3):257–299, 2006.
- [9] А. Деляну И. Букур. *Введение в теорию категорий и функторов*. Мир, Москва, 1972.
- [10] С. Маклейн. *Категории для работающего математика*. ФИЗМАТЛИТ, 2004.
- [11] И.Р. Шафаревич. *Основы алгебраической геометрии*. Наука, Москва, 1988.