Лекции по ДГМА

Павел Петров

Семестр 4

1 Теория поверхностей

Определение 1. Отображение f области G плоскости на область $\widetilde{G}$ трёхмерного пространства называется *гомеоморфным*, если f взаимно однозначно и непрерывно.

Определение 2. Множество Φ точек трёхмерного пространства называется *элементарной поверхностью*, если это множество является образом открытого круга G при гомеоморфном отображении f в пространство.

! $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < R^2\}$ - *открытый круг.*

Определение 3. Множество G точек плоскости называется *элементарной областью*, если это множество является образом открытого круга G при гомеоморфном отображении f на плоскость.

Определение 4. *Окрестностью точки M множества* Φ называется общая часть множества Φ и пространственной окрестности M.

Определение 5. Множество называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком состоящей из точек этого множества.

Определение 6. Множество точек пространства Φ называется *простой поверхностью*, это множество связно и любая точка этого множества имеет окрестность, являющейся элементарной поверхностью.

! *Элементарная повехность является простой повехностью. Обратное неверно. Пример: сфера.*

Определение 7. Отображение f простой поверхности G называется *локально-гомеоморфным*, если у каждой точки G есть окрестность, которая гомеоморфно отображается на свой образ.

Определение 8. Множество точек пространства Φ называется *общей поверхностью*, если оно является образом простой поверхности при локально-гомеоморфном отображении.

Замечания к определению 8:
1. Окрестность точки общей поверхности - образ окрестности точки на простой поверхности.
2. Простая поверхность - это поверхность без самопересечений и без самоналяганий Общая поверхность может иметь их.

Определение 9. Поверхность Φ называется *регулярной (k раз дифференцируемой)*, если при некотором $k \geq 1$ у каждой точки Φ есть окрестность, допускающая k раз дифференцируемую параметризацию.

То есть окрестность представляет собой гомеоморфное отображение некоторой элементарной области G *(определение элементарной области легко получить, переформулировав определение 2)* в плоскость переменных (u, v) при помощи соотношений (1),

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v) \tag{1}$$

являющимися k раз дифференцируемыми функциями в области G. Если $k = 1$, то поверхность называется *гладкой.*

! Будем говорить, что с помощью соотношений (1) в окрестности точки на поверхности вводится

регулярная параметризация с помощью параметров u, v.
! Если вся поверхность Φ представляет отображение области G при помощи соотношений (1), то говорят, что на Φ введена *единая параметризация.*

Определение 10. Точка регулярной поверхности называется *обыкновенной*, если существует такая регулярная параметризация некоторой её окрестности, что в этой точке

$$rank \begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} = 2 \tag{2}$$

Если это не так, то точка называется *особой.*

Определение 11. $f(u,v) \in C^k(G)$, если $f(u,v)$ k раз дифференцируема и все её частные производные порядка k непрерывны в G.

Определение 12. Область G на плоскости будем называть *простой*, если эта область представляет собой простую плоскую поверхность *(то есть G это связная область, каждая точка которой имеет окрестность, являющейся элементарной поверхностью).*

Теорема 13. *Пусть G - простая область плоскости (u,v), $x(u,v)$, $y(u,v)$, $z(u,v) \in C^k(G)$, где $k \geq 1$, и во всех точках области G выполняется условие (2), тогда соотношения (1) определяют в пространстве множество Φ, которое представляет собой регулярную, k раз дифференцируемую общую поверхность без особых точек.*

Доказательство.
Убедимся, что с помощью соотношений (1) осуществляется локально-гомеоморфное отображение области G на множество Φ.
Возьмём произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$, соответствующую параметрам (u_0, v_0) плоскости (u, v), и зафиксируем её. По условию в каждой точке области G выполняется условие (2), а значит и в точке (u_0, v_0). Для определённости положим, что определитель (3) отличен от нуля в (u_0, v_0).

$$\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \tag{3}$$

Получили выполнение условий теоремы о неявных функциях, заданных системой уравнений (4):

$$\begin{cases} x(u,v) - x = 0 \\ y(u,v) - y = 0 \end{cases} \tag{4}$$

1.
$$\begin{cases} x(u_0,v_0) - x_0 \equiv 0 \\ y(u_0,v_0) - y_0 \equiv 0 \end{cases} \tag{5}$$

2. $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ непрерывны и дифференцируемы.
3. Частные производные непрерывны этих функций.
4. Определитель (3), являющийся якобианом $\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$, отличен от нуля в (u_0, v_0).

Тогда найдётся окрестность точки (x_0, y_0) на плоскости (x, y), что в её пределах $\exists ! k$ раз дифференцируемое решение системы (4):

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y) \end{cases} \tag{6}$$

Таким образом мы получили, что некоторая окресность точки (x_0, y_0) представляет собой гомеоморфное отображение некоторой окрестности точки (u_0, v_0) с помощью соотношений $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ *(обратное отображение производится с помощью соотношений* $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$*).*
Подставим соотношения (6) в $z = z(u, v)$: $z = z(u, v) = z(u(x, y), v(x, y)) = z(x, y)$. Отсюда получаем, что некоторая окрестность точки M_0 на множестве Φ является графиком k раз дифференцируемой функции. А это означает, что с помощью функции $z = z(x, y)$ производится гомеоморфное отображение окрестности точки (x_0, y_0) на указанную окрестность точки M_0 множества Φ. Легко понять, что окрестность точки (u_0, v_0) гомеоморфно отображается на окрестность точки M_0 множества Φ.
Таким образом получили, что у каждой точки простой области G имеется окрестность, которая гомеоморфно отображается на свой образ (окрестность Φ), значит соотношения (1) - локально-гомеоморфное отображение G на Φ, следовательно Φ - общая поверхность. *Теорема доказана.*

Замечание к теореме 13: В процессе доказательства мы установили, что у каждой точки M_0 *поверхности* Φ *без особых точек имеется окрестность, однозначно проецирующаяся на одну из координатных плоскостей и являющаяся поэтому графиком* k *раз дифференцируемой функции. (в доказательства была функция z = z(x,y), но, поменяв какой-нибудь столбец определителя* (3) *на столбец состоящий из частных производных функции z = z(x,y), можно получить зависимости y = y(x,z) или x = x(y,z))*