

Лекции по ДГМА

Павел Петров

Семестр 4

1 Теория поверхностей

Определение 1. Отображение f области G плоскости на область \tilde{G} трёхмерного пространства называется *гомеоморфным*, если f взаимно однозначно и непрерывно.

Определение 2. Множество Φ точек трёхмерного пространства называется *элементарной поверхностью*, если это множество является образом открытого круга G при гомеоморфном отображении f в пространство.

! $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < R^2\}$ - *открытый круг*.

Определение 3. Множество G точек плоскости называется *элементарной областью*, если это множество является образом открытого круга G при гомеоморфном отображении f на плоскость.

Определение 4. *Окрестностью точки M множества Φ* называется общая часть множества Φ и пространственной окрестности M .

Определение 5. Множество называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком состоящей из точек этого множества.

Определение 6. Множество точек пространства Φ называется *простой поверхностью*, это множество связно и любая точка этого множества имеет окрестность, являющейся элементарной поверхностью.

! *Элементарная поверхность является простой поверхностью. Обратное неверно. Пример: сфера.*

Определение 7. Отображение f простой поверхности G называется *локально-гомеоморфным*, если у каждой точки G есть окрестность, которая гомеоморфно отображается на свой образ.

Определение 8. Множество точек пространства Φ называется *общей поверхностью*, если оно является образом простой поверхности при локально-гомеоморфном отображении.

Замечания к определению 8:

1. *Окрестность точки общей поверхности - образ окрестности точки на простой поверхности.*
2. *Простая поверхность - это поверхность без самопересечений и без самоналожений. Общая поверхность может иметь их.*

Определение 9. Поверхность Φ называется *регулярной* (k раз дифференцируемой), если при некотором $k \geq 1$ у каждой точки Φ есть окрестность, допускающая k раз дифференцируемую параметризацию.

То есть окрестность представляет собой гомеоморфное отображение некоторой элементарной области G (определение элементарной области легко получить, переформулировав определение 2) в плоскость переменных (u, v) при помощи соотношений (1),

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v) \quad (1)$$

являющимися k раз дифференцируемыми функциями в области G . Если $k = 1$, то поверхность называется *гладкой*.

! Будем говорить, что с помощью соотношений (1) в окрестности точки на поверхности вводится

регулярная параметризация с помощью параметров u, v .

! Если вся поверхность Φ представляет отображение области G при помощи соотношений (1), то говорят, что на Φ введена *единая параметризация*.

Определение 10. Точка регулярной поверхности называется *обыкновенной*, если существует такая регулярная параметризация некоторой её окрестности, что в этой точке

$$\text{rank} \begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} = 2 \quad (2)$$

Если это не так, то точка называется *особой*.

Определение 11. $f(u, v) \in C^k(G)$, если $f(u, v)$ k раз дифференцируема и все её частные производные порядка k непрерывны в G .

Определение 12. Область G на плоскости будем называть *простой*, если эта область представляет собой простую плоскую поверхность (то есть G это связная область, каждая точка которой имеет окрестность, являющейся элементарной поверхностью).

Теорема 13. Пусть G - простая область плоскости (u, v) , $x(u, v), y(u, v), z(u, v) \in C^k(G)$, где $k \geq 1$, и во всех точках области G выполняется условие (2), тогда соотношения (1) определяют в пространстве множество Φ , которое представляет собой регулярную, k раз дифференцируемую общую поверхность без особых точек.

Доказательство.

Убедимся, что с помощью соотношений (1) осуществляется локально-гомеоморфное отображение области G на множество Φ .

Возьмём произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Phi$, соответствующую параметрам (u_0, v_0) плоскости (u, v) , и зафиксируем её. По условию в каждой точке области G выполняется условие (2), а значит и в точке (u_0, v_0) . Для определённости положим, что определитель (3) отличен от нуля в (u_0, v_0) .

$$\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix} \quad (3)$$

Получили выполнение условий теоремы о неявных функциях, заданных системой уравнений (4):

$$\begin{cases} x(u, v) - x = 0 \\ y(u, v) - y = 0 \end{cases} \quad (4)$$

1.

$$\begin{cases} x(u_0, v_0) - x_0 \equiv 0 \\ y(u_0, v_0) - y_0 \equiv 0 \end{cases} \quad (5)$$

2. $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ непрерывны и дифференцируемы.

3. Частные производные непрерывны этих функций.

4. Определитель (3), являющийся якобианом $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$, отличен от нуля в (u_0, v_0) .

Тогда найдётся окрестность точки (x_0, y_0) на плоскости (x, y) , что в её пределах $\exists! k$ раз дифференцируемое решение системы (4):

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases} \quad (6)$$

Таким образом мы получили, что некоторая окрестность точки (x_0, y_0) представляет собой гомеоморфное отображение некоторой окрестности точки (u_0, v_0) с помощью соотношений $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ (обратное отображение производится с помощью соотношений $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$).

Подставим соотношения (6) в $z = z(u, v)$: $z = z(u, v) = z(u(x, y), v(x, y)) = z(x, y)$. Отсюда получаем, что некоторая окрестность точки M_0 на множестве Φ является графиком k раз дифференцируемой функции. А это означает, что с помощью функции $z = z(x, y)$ производится гомеоморфное отображение окрестности точки (x_0, y_0) на указанную окрестность точки M_0 множества Φ . Легко понять, что окрестность точки (u_0, v_0) гомеоморфно отображается на окрестность точки M_0 множества Φ .

Таким образом получили, что у каждой точки простой области G имеется окрестность, которая гомеоморфно отображается на свой образ (окрестность Φ), значит соотношения (1) - локально-гомеоморфное отображение G на Φ , следовательно Φ - общая поверхность. Теорема доказана.

Замечание к теореме 13: В процессе доказательства мы установили, что у каждой точки M_0 поверхности Φ без особых точек имеется окрестность, однозначно проецирующаяся на одну из координатных плоскостей и являющаяся поэтому графиком k раз дифференцируемой функции. (в доказательстве была функция $z = z(x, y)$, но, поменяв какой-нибудь столбец определителя (3) на столбец состоящий из частных производных функции $z = z(x, y)$, можно получить зависимости $y = y(x, z)$ или $x = x(y, z)$)

Рассмотрим регулярную поверхность Φ . Пусть $\mathbf{r}(M)$ - вектор, идущий из начала координат в точку M поверхности. Очевидно, что $\mathbf{r}(M)$ - векторная функция переменной точки M поверхности и $\mathbf{r}(M)$ - радиус-вектор поверхности Φ .

Определение 14. Криволинейная система координат.

Рассмотрим окрестность M , являющейся гомеоморфным отображением некоторой элементарной области G при помощи соотношений (1). Очевидно, что (1) - координаты переменной точки M поверхности и координаты $\mathbf{r}(M)$.

$\mathbf{r}(M) = \mathbf{r}(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = \mathbf{r}(u, v)$ - функция двух переменных.

Зафиксируем \underline{v} , тогда конец радиус вектора $\mathbf{r}(u, \underline{v})$ описывает в окрестности кривую, называемую *линией u* .

Зафиксируем \underline{u} , тогда конец радиус вектора $\mathbf{r}(\underline{u}, v)$ описывает в окрестности кривую, называемую *линией v* .

Линии u, v называются *координатными линиями* на Φ в рассматриваемой окрестности. Таким образом, в некоторой окрестности каждой точки поверхности Φ может быть введена система координатных линий u, v , которая называется *криволинейной системой координат* на поверхности.

Обратим внимание на определение обыкновенной и особой точки и выясним геометрический смысл \mathbf{r}'_u и \mathbf{r}'_v . Очевидно, что если выполняется условие (2), то векторы, упомянутые ранее, будут линейно независимыми, в противном случае линейно зависимыми.

Таким образом получили, что если точка M поверхности является обыкновенной, то в окрестности этой точки может быть введена такая параметризация, что \mathbf{r}'_u и \mathbf{r}'_v линейно независимы.

Определение 15. Плоскость называется *касательной* плоскостью графика функции $z = z(x, y)$ в точке M_0 , если точка M_0 принадлежит плоскости и вектор секущей к этому графику в точке M_0 стремится к перпендикуляру нормали этой плоскости при $M \rightarrow M_0$.

Было доказано, что если $z = z(x, y)$ дифференцируема в (x_0, y_0) , то в точке $M_0 = (x_0, y_0, z(x_0, y_0))$ поверхности существует касательная плоскость.

Осталось убедиться в том, что в любой обыкновенной точке гладкой поверхности существует касательная плоскость. Для этого достаточно установить, что некоторая окрестность обыкновенной точки поверхности представляет собой график дифференцируемой функции. Это свойство уже было доказано для любой обыкновенной точки гладкой поверхности (*смотри замечание к теореме 13*). Следовательно в любой обыкновенной точке гладкой поверхности существует касательная плоскость.

Замечание: так как векторы \mathbf{r}'_u и \mathbf{r}'_v являются касательными к линиям u, v , проходящим через M_0 , то эти векторы располагаются в касательной плоскости точки M_0 .

Определение 16. *Нормалью к поверхности Φ в точке M_0 называется прямая, проходящая через M_0 и перпендикулярная касательной плоскости точки M_0 .*

Определение 17. *Вектором нормали к поверхности Φ в точке M_0 будем называть ненулевой вектор, коллинеарный нормали в M_0 .*

Пусть M_0 - обыкновенная точка гладкой поверхности Φ и некоторая окрестность этой точки определена с помощью функции $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ такой, что \mathbf{r}'_u и \mathbf{r}'_v в M_0 не коллинеарны. Тогда очевидно, что $\mathbf{N} = [\mathbf{r}'_u, \mathbf{r}'_v]$ является вектором нормали к поверхности. $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$ - единичный вектор нормали к поверхности.

Поверхность гладкая, следовательно векторные функции $\mathbf{N}(u, v)$ и $\mathbf{n}(u, v)$ будут непрерывными. Значит в некоторой окрестности каждой точки гладкой поверхности существует *непрерывное векторное поле нормалей*.

Определение 18. *Двусторонняя поверхность* - поверхность, на которой в целом существует непрерывное поле нормалей.

Определение 19. *Односторонняя поверхность* - поверхность, на которой в целом не существует непрерывного поля нормалей.

Пример односторонней поверхности - лист Мёбиуса.

2 Вспомогательные леммы

3 Площадь поверхности

4 Поверхностные интегралы