Лекции по ДГМА

Павел Петров

Семестр 4

1 Теория поверхностей

Определение 1. Отображение f области G плоскости на область $\widetilde{G}$ трёхмерного пространства называется *гомеоморфным*, если f взаимно однозначно и непрерывно.

Определение 2. Множество Φ точек трёхмерного пространства называется *элементарной поверхностью*, если это множество является образом открытого круга G при гомеоморфном отображении f в пространство.

! $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < R^2\}$ *- открытый круг.*

Определение 3. Множество G точек плоскости называется *элементарной областью*, если это множество является образом открытого круга G при гомеоморфном отображении f на плоскость.

Определение 4. *Окрестностью точки M множества* Φ называется общая часть множества Φ и пространственной окрестности M.

Определение 5. Множество называется *связным*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком состоящей из точек этого множества.

Определение 6. Множество точек пространства Φ называется *простой поверхностью*, это множество связно и любая точка этого множества имеет окрестность, являющейся элементарной поверхностью.

! *Элементарная повехность является простой повехностью. Обратное неверно. Пример: сфера.*

Определение 7. Отображение f простой поверхности G называется *локально-гомеоморфным*, если у каждой точки G есть окрестность, которая гомеоморфно отображается на свой образ.

Определение 8. Множество точек пространства Φ называется *общей поверхностью*, если оно является образом простой поверхности при локально-гомеоморфном отображении.

Замечания к определению 8:
1. Окрестность точки общей поверхности - образ окрестности точки на простой поверхности.

2. Простая поверхность - это поверхность без самопересечений и без самоналяганий Общая поверхность может иметь их.

Определение 9. Поверхность Φ называется *регулярной (k раз дифференцируемой)*, если при некотором $k \geq 1$ у каждой точки Φ есть окрестность, допускающая k раз дифференцируемую параметризацию.

То есть окрестность представляет собой гомеоморфное отображение некоторой элементарной области G в плоскость переменных (u, v) при помощи соотношений (1),

$$x = x(u, v) \quad y = y(u, v) \quad z = z(u, v) \tag{1}$$

являющимися k раз дифференцируемыми функциями в области G. Если $k = 1$, то поверхность называется *гладкой*.

! Будем говорить, что с помощью соотношений (1) в окрестности точки на поверхности вводится *регулярная параметризация* с помощью параметров u, v.

! Если вся поверхность Φ представляет отображение области G при помощи соотношений (1), то говорят, что на Φ введена *единая параметризация.*

Определение 10. Точка регулярной поверхности называется *обыкновенной*, если существует такая регулярная параметризация некоторой её окрестности, что в этой точке

$$rank \begin{pmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{pmatrix} = 2 \tag{2}$$

Если это не так, то точка называется *особой.*

Определение 11. $f(u, v) \in C^k(G)$, если $f(u, v)$ k раз дифференцируема и все её частные производные порядка k непрерывны в G.