METODY NUMERYCZNE

Projekt 3 – Aproksymacja profilu wysokościowego

Paweł Gościak 188778

1. Wstęp

Celem projektu jest aproksymacja profilu wysokościowego danych tras za pomocą dwóch metod interpolacji:

- *metodę wykorzystującą wielomian interpolacyjny Lagrange'a*
- *metodę wykorzystującą funkcje sklejane trzeciego stopnia*

Zadanie zostało wykonane w pythonie w środowisku *PyCharm 2023.1* przy użyciu biblioteki *matplotlib*, aby stworzyć wykresy.

2. Wybór profili wysokościowych

Profile wysokościowe, na których przeprowadzane są testy dla obu metod to:

- Mount Everest – najwyższy szczyt świata, teren górzysty
- Spacerniak Gdański – raczej nizinny, płaski teren
- Wielki Kanion Kolorado – teren zróżnicowany, posiada wiele wzniesień

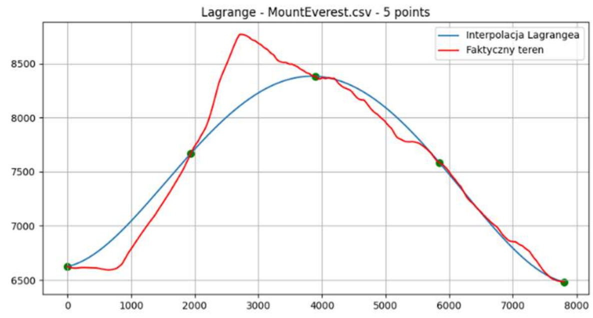
Dane pochodzą z portalu Enauczanie.pl

3. Metoda interpolacji Lagrange'a

Interpolacja Lagrange'a jest popularna z powodu swojej prostoty implementacyjnej i niskich (w porównaniu do splajnów) wymagań odnośnie pamięci. Ta technika polega na estymowaniu wielomianu stopnia n w n+1 punktach, które nazywamy węzłami. Można by zatem przypuszczać, że im więcej punktów dostarczymy, tym precyzyjniejsze będzie nasze przybliżenie, ponieważ stopień naszego wielomianu wzrośnie. Niestety, ta metoda jest bardzo podatna na tak zwany efekt Rungego, który powoduje oscylacje na krańcach przedziału.

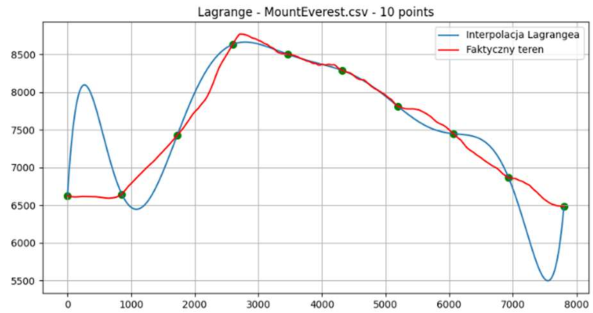
Poniżej znajduje się prezentacja wykorzystania interpolacji Lagrange'a dla trzech różnych profili wysokościowych.

1) Równomierne rozłożenie punktów dla **Mount Everest**



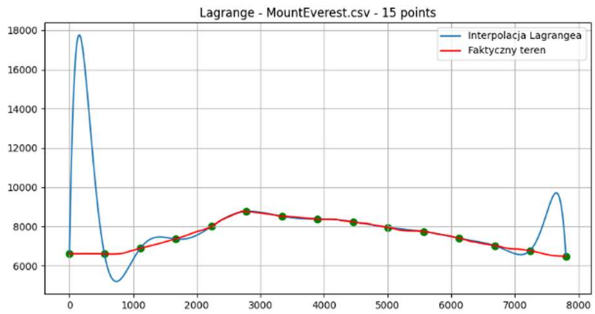
Interpolacja Lagrange'a dla 5 punktów

Dla pięciu punktów efekt nie jest zbyt zadowalający



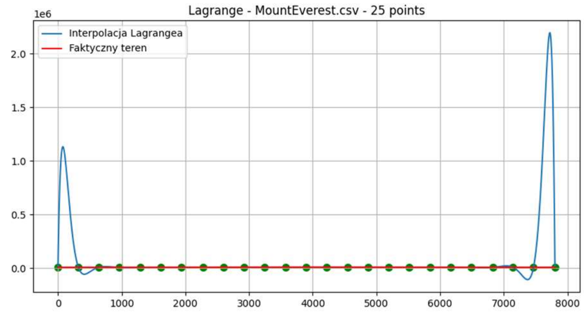
Interpolacja Lagrange'a dla 10 punktów

Dwukrotne zwiększenie liczby węzłów pozytywnie wpłynęło na dokładność przybliżenia funkcji. Niestety na krańcach przedziału widzimy niedokładność.



Interpolacja Lagrange'a dla 15 punktów

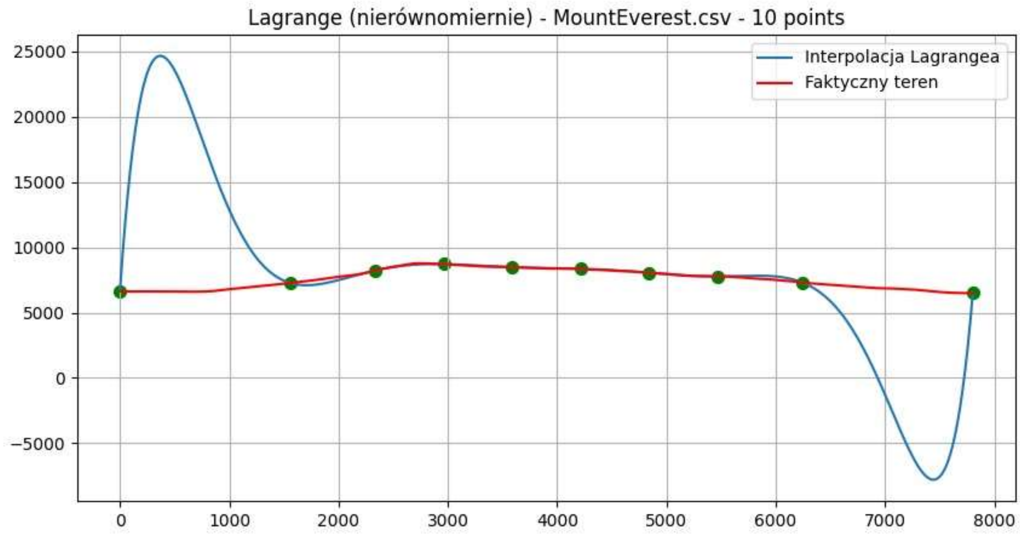
Dla piętnastu punktów, pomimo prawidłowego odwzorowania profilu wysokościowego w środku na krańcach wartości są ogromne. Jest to tzw. Efekt Rungego.



Interpolacja Lagrange'a dla 25 punktów

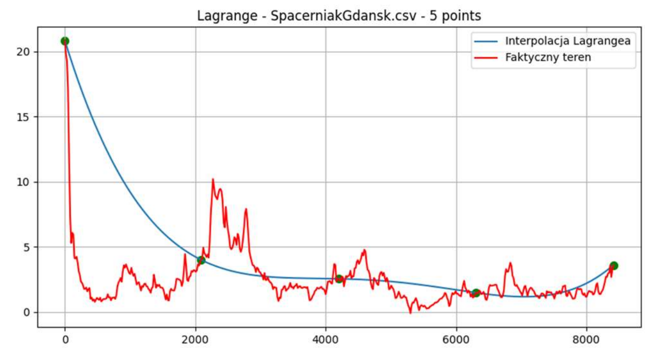
Dla dwudziestu pięciu punktów efekt Rungego jest na tyle duży, że wykres staje się nieczytelny.

2) Nierównomierne rozłożenie punktów dla **Mount Everest**



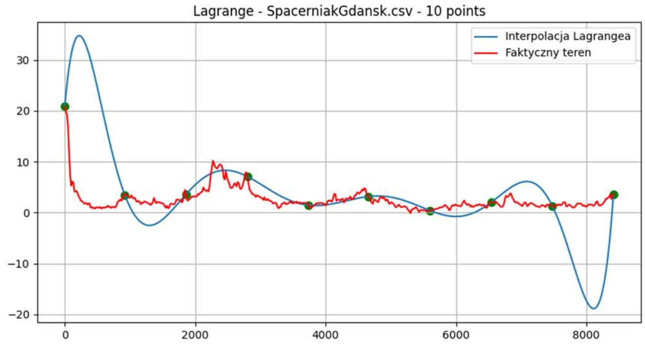
Na tym wykresie punkty są rozłożone nierównomiernie. Więcej jest bliżej środka niż krawędzi. Jak widać efekt jest jeszcze gorszy. Gdyby więcej punktów było przy krawędziach, aproksymacja byłaby bardziej dokładna przy tych krawędziach. Dla punktów w środku dokładność jest większa.

3) Równomierne rozłożenie punktów dla **Spacerniaka w Gdańsku**



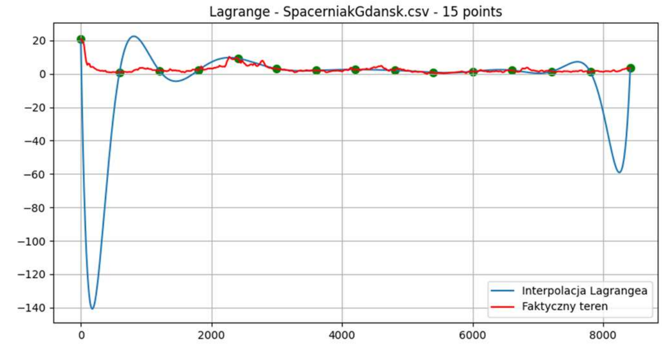
Interpolacja Lagrange'a dla 5 punktów

W tym przypadku profil wysokościowy jest bardziej płaski. Zawiera jednak pewne skoki, które nie sprzyjają dokładnej interpolacji. Dla pięciu punktów efekt nie jest zadowalający.



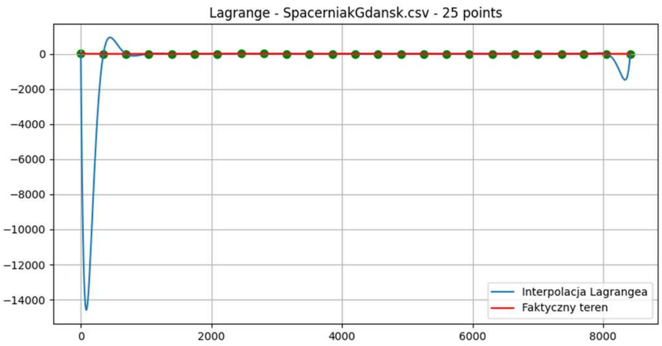
Interpolacja Lagrange'a dla 10 punktów

Zwiększając liczbę punktów dwukrotnie uzyskujemy zdecydowanie lepszy efekt, jednak niekoniecznie dla punktów bliżej krawędzi.



Interpolacja Lagrange'a dla 15 punktów

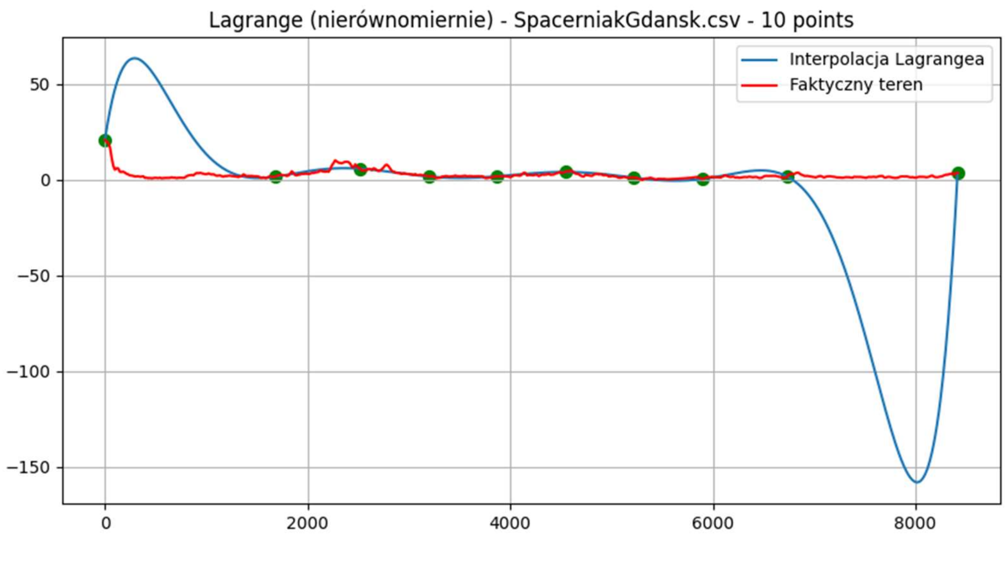
Dla piętnastu punktów przybliżenie jest nieakceptowalne. W punktach bliżej krawędzi odchylenie jest zdecydowanie za duże.



Interpolacja Lagrange'a dla 25 punktów

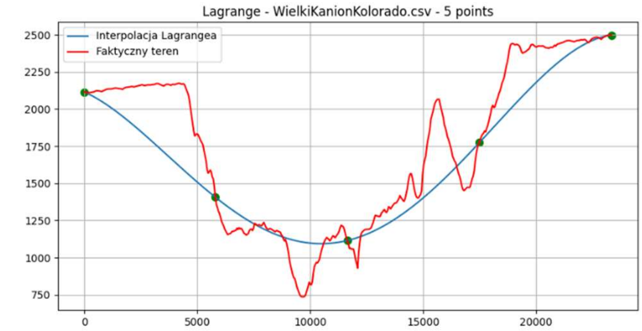
Wynik dla dwudziestu pięciu punktów pozostawię bez komentarza.

4) Nierównomierne rozłożenie punktów dla **Spacerniaka w Gdańsku**



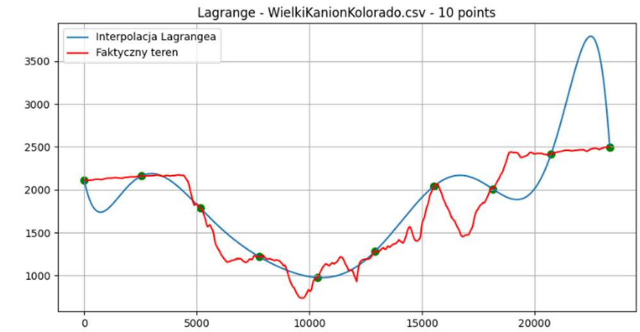
Na tym wykresie punkty są rozłożone nierównomiernie. Więcej jest bliżej środka niż krawędzi. Tak jak dla Mt. Everest efekt jest kiepski dla punktów przy krawędzi, jednak dla punktów w środku jest zadowalający. Gdyby więcej punktów było przy krawędziach, aproksymacja byłaby tam bardziej dokładna.

5) Równomierne rozłożenie punktów dla **Wielkiego Kanionu Kolorado**



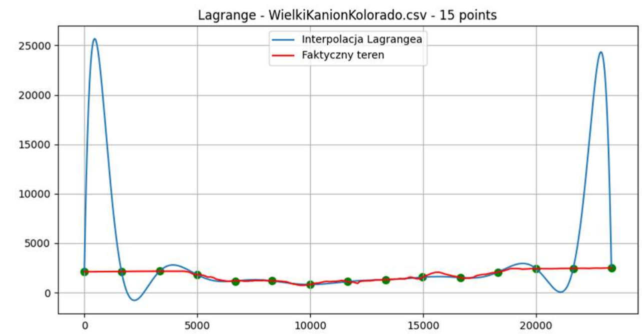
Interpolacja Lagrange'a dla 5 punktów

W tym przypadku teren jest wyjątkowo nierówny – ma wiele skoków wysokości. Dla pięciu punktów efekt nie jest zadowalający.



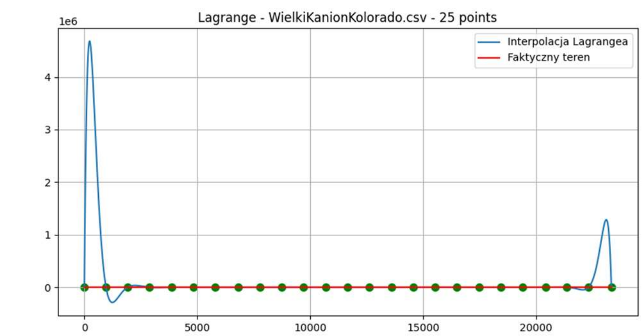
Interpolacja Lagrange'a dla 10 punktów

Po dwukrotnym zwiększeniu liczby punktów efekt jest dokładniejszy, jednak w porównaniu do dwóch powyższych testów przybliżenie jest gorsze. Wynika to z ukształtowania terenu.



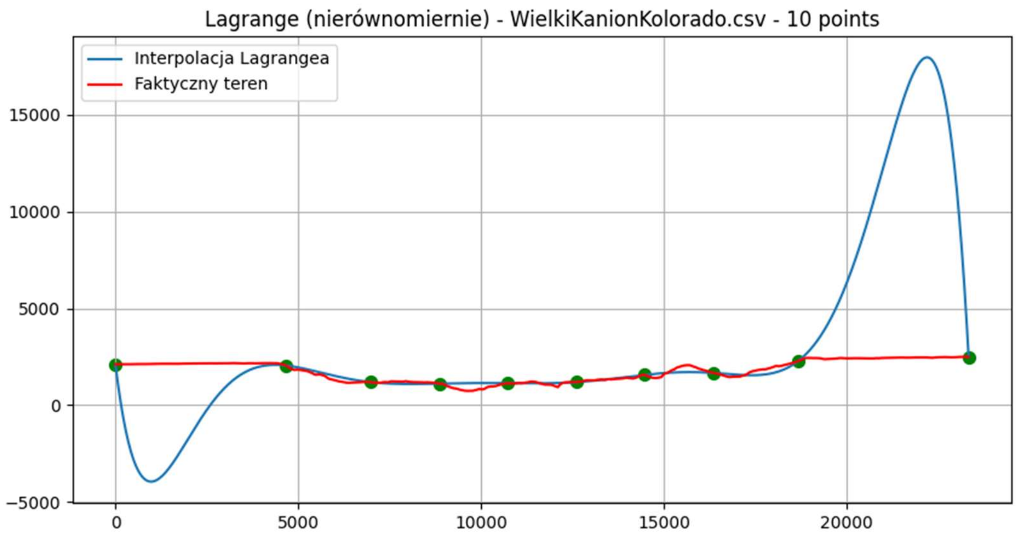
Interpolacja Lagrange'a dla 15 punktów

Dla piętnastu punktów oscylacje są zbyt duże. Aproksymacja jest nieakceptowalna. W punktach blisko krawędzi wartości są ogromne.



Interpolacja Lagrange'a dla 25 punktów

6) Nierównomierne rozłożenie punktów dla **Wielkiego Kanionu Kolorado**



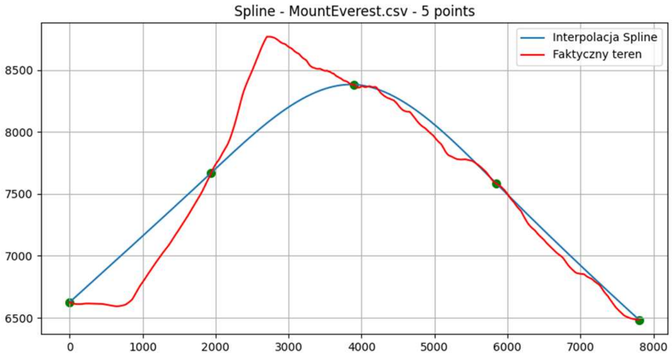
Na tym wykresie punkty są rozłożone nierównomiernie. Więcej jest bliżej środka niż krawędzi. Tak jak dla dwóch powyższych przykładów efekt jest znacznie gorszy w skrajnych punktach, a lepszy dla punktów w środku. Gdyby więcej punktów było przy krawędziach, aproksymacja byłaby bardziej dokładna.

4. Interpolacja funkcjami sklejanymi

W związku z oscylacjami pojawiającymi się na krańcach przedziałów w przypadku interpolacji Lagrange'a, stosujemy interpolację funkcjami sklejanymi. W tym scenariuszu, dla n węzłów, tworzymy n-1 podprzedziałów, a dla każdego z nich interpolujemy funkcję wielomianem trzeciego stopnia. Kluczowy element to stworzenie układu 4(n-1) równań, które później rozwiązujemy za pomocą faktoryzacji LU. Implementację algorytmu rozwiązywania równań za pomocą faktoryzacji LU wziąłem z poprzedniego projektu.

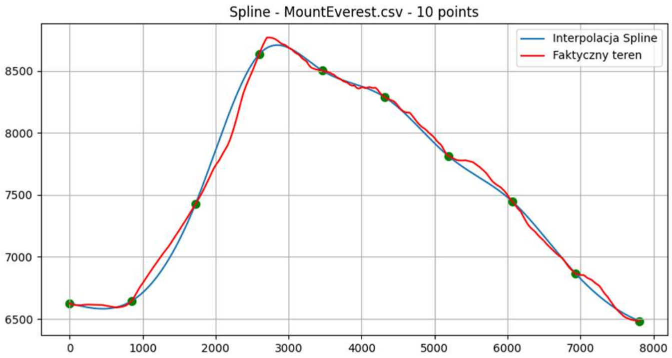
Poniżej znajduje się prezentacja zastosowania interpolacji sklejanymi funkcjami trzeciego stopnia na trzech różnych profilach wysokościowych.

1) Równomierne rozłożenie punktów dla **Mount Everest**



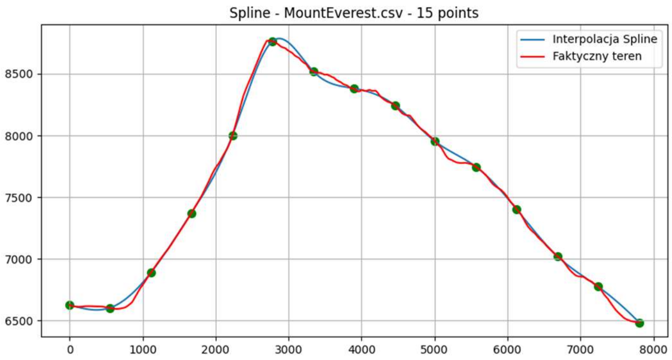
Interpolacja Splinem dla 5 punktów

Dla pięciu punktów wynik nie jest zadowalający, tak jak przy interpolacji Lagrange'a.



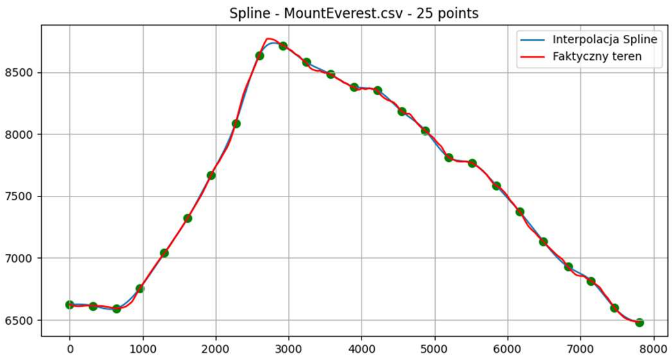
Interpolacja Splinem dla 10 punktów

Po zwiększeniu liczby węzłów aproksymacja jest staje się coraz dokładniejsza. Na krańcach w końcu nie pojawiają się oscylacje!



Interpolacja Splinem dla 15 punktów

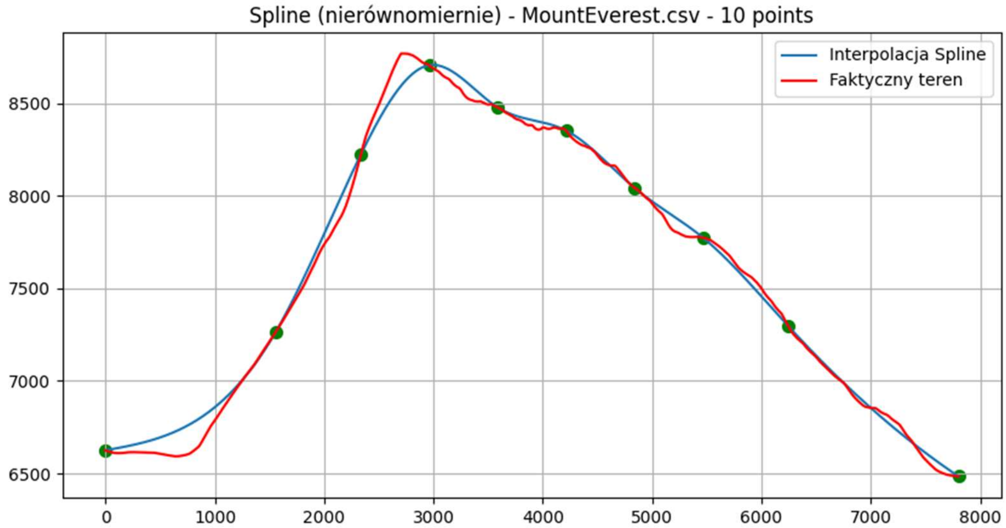
Rezultat dla piętnastu węzłów już wydaje się zadowalający! Spróbujmy zwiększyć liczbę węzłów jeszcze o dziesięć.



Interpolacja Splinem dla 25 punktów

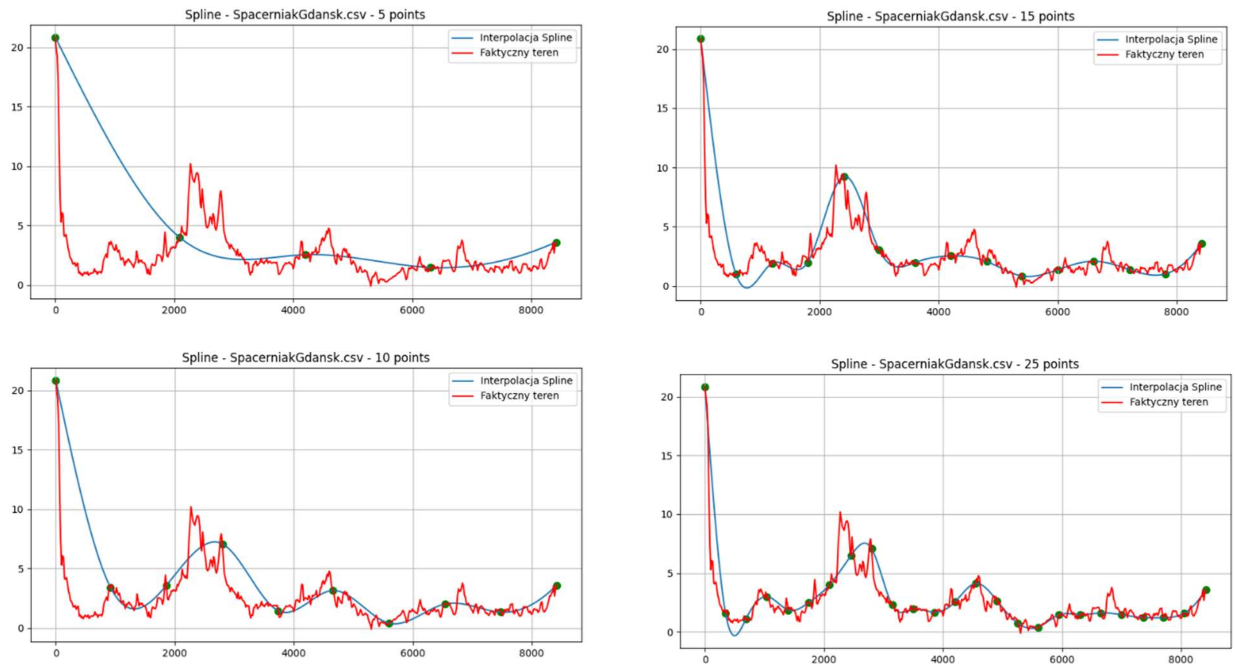
Przybliżenie dla dwudziestu pięciu węzłów jest dokładne, nie występuje efekt Rungego, tak jak przy metodzie Lagrange'a. Gdybyśmy zwiększyli liczbę punktów do pięćdziesięciu, niebieska linia byłaby niemal całkowicie schowana za czerwoną.

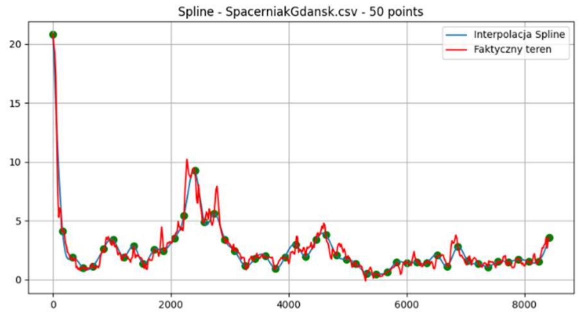
2) Nierównomierne rozłożenie punktów dla **Mount Everest**



Na tym wykresie punkty są rozłożone nierównomiernie. Więcej jest bliżej środka niż krawędzi. Efekt jest minimalnie gorszy niż dla równomiernie rozłożonych punktów, jednak nie jest to aż taka różnica jak przy metodzie z wykorzystaniem wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a.

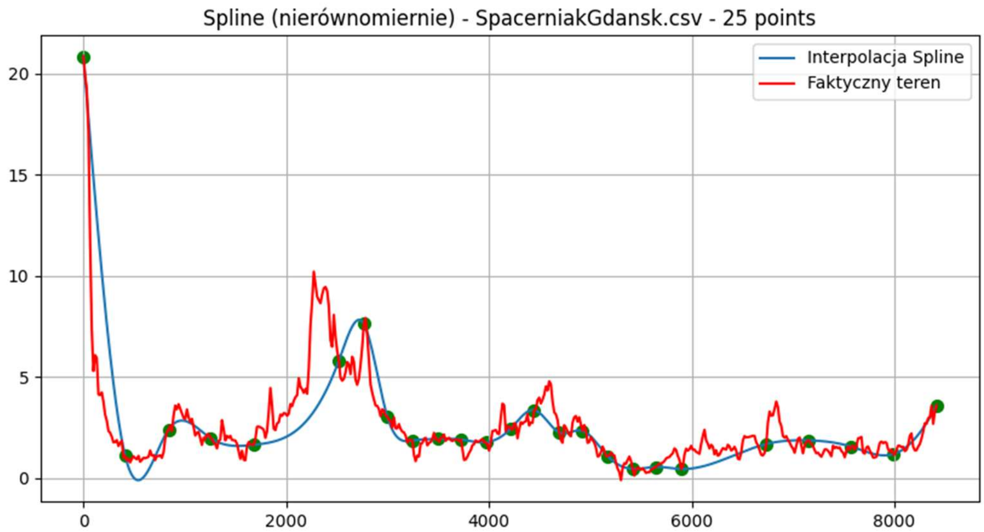
3) Równomierne rozłożenie punktów dla **Spacerniaka w Gdańsku**





Jak widać chaotyczne i zmienne ukształtowanie terenu wpływa na niedokładność metody spline. Nie występuje tu efekt Rungego, rezultat jest zadowalający, jednak widzimy, że przybliżenie nie jest perfekcyjne. W szczególności w punktach, gdzie występują gwałtowne skoki wysokości.

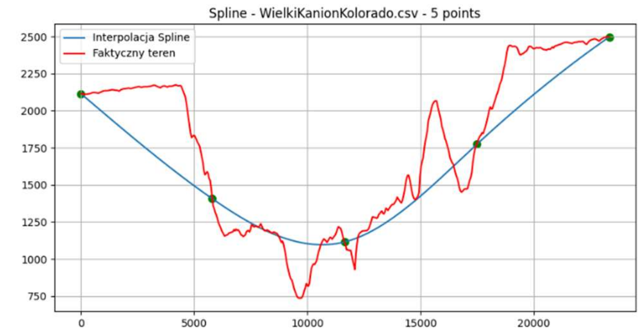
4) Nierównomierne rozłożenie punktów dla **Spacerniaka w Gdańsku**

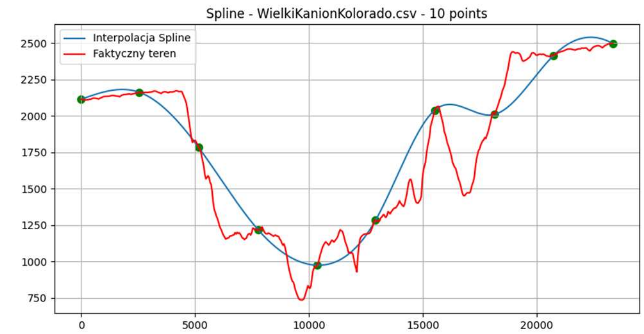


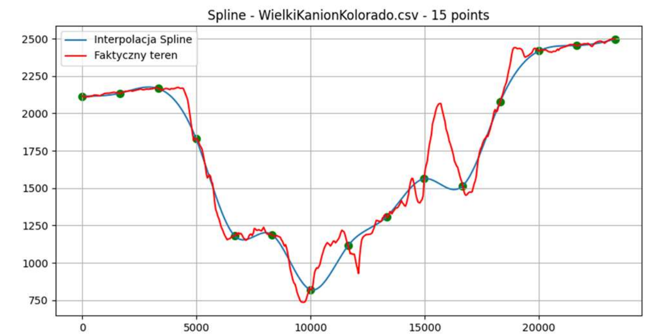
Na tym wykresie punkty są rozłożone nierównomiernie. Więcej jest bliżej środka niż krawędzi. Efekt jest trochę gorszy niż dla równomiernie rozłożonych punktów, jednak nie jest to aż taka różnica jak przy metodzie z wykorzystaniem wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a.

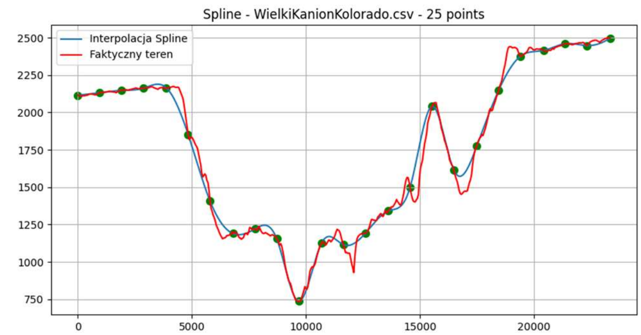
5) Równomierne rozłożenie punktów dla **Wielkiego Kanionu Kolorado**

Na poniższych wykresach możemy zaobserwować analogiczną sytuację do powyższego testu. Przybliżenie jest zadowalające przy ok. 25 punktach. Skoki wysokościowe są największą trudnością dla metody interpolacji funkcjami sklejanymi (spline).

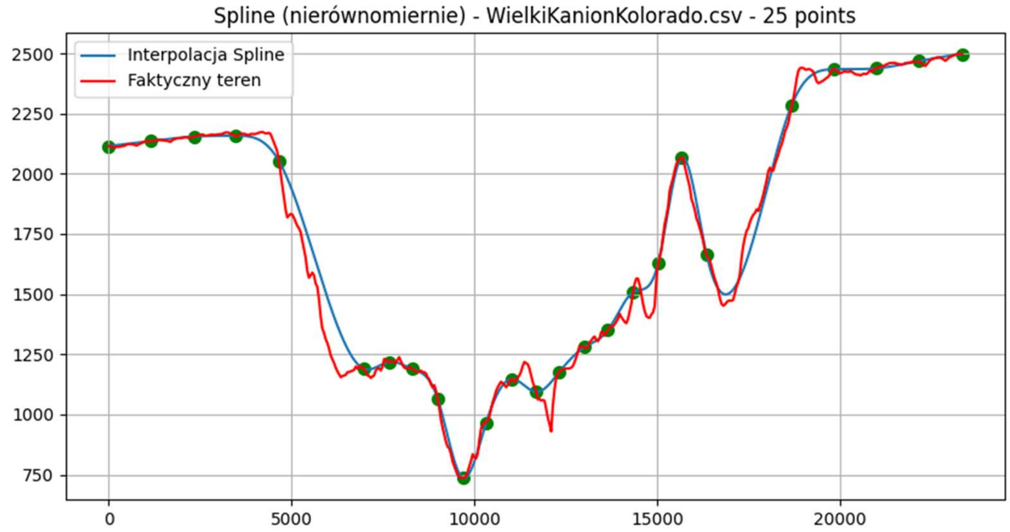

Spline - WielkiKanionKolorado.csv - 5 points
Interpolacja Spline
Faktyczny teren


Spline - WielkiKanionKolorado.csv - 10 points
Interpolacja Spline
Faktyczny teren


Spline - WielkiKanionKolorado.csv - 15 points
Interpolacja Spline
Faktyczny teren


Spline - WielkiKanionKolorado.csv - 25 points
Interpolacja Spline
Faktyczny teren

6) Nierównomierne rozłożenie punktów dla **Wielkiego Kanionu Kolorado**



Na tym wykresie punkty są rozłożone nierównomiernie. Więcej jest bliżej środka niż krawędzi. Nie można jednoznacznie powiedzieć, że przybliżenie jest gorsze. W miejscach, gdzie punktów jest więcej (w środku) przybliżenie jest lepsze, natomiast tam, gdzie ich brakuje – gorsze.

5. Podsumowanie

Podsumowując, na podstawie przedstawionych wykresów możemy dojść do kilku konkluzji:

Interpolacja Lagrange'a, choć prosta w implementacji, szybka i wymagająca mniej pamięci, rodzi problem zwanym efektem Rungego, który prowadzi do oscylacji na krańcach przedziału. Wprawdzie dokładność przybliżenia rośnie wraz ze wzrostem liczby punktów, ale równocześnie nasila się efekt Rungego.

Z tego powodu preferowanym rozwiązaniem jest zastosowanie interpolacji za pomocą funkcji sklejanych. Ta metoda wymaga więcej zasobów pamięciowych i czasu, ale dostarcza znacznie lepsze rezultaty. Nie jest podatna na efekt Rungego, a zwiększanie liczby podprzedziałów prowadzi do coraz dokładniejszego przybliżenia.

Dokładność interpolacji w obu metodach jest zależna od liczby punktów - im więcej, tym dokładniejsze wyniki. Niemniej jednak, w przypadku metody Lagrange'a, prowadzi to do znacznych oscylacji na krańcach.

Sprawdziliśmy również wpływ rozkładu punktów na precyzję interpolacji. W niektórych sytuacjach nierównomierne rozmieszczenie punktów poprawiło przybliżenie, w innych je pogorszyło. Nie możemy jednoznacznie stwierdzić, czy lepiej jest używać równomiernego czy nierównomiernego rozmieszczenia punktów, ponieważ zależy to od konkretnej sytuacji.

Ostatni badany aspekt dotyczył wpływu terenu. Na podstawie otrzymanych wyników, możemy zauważyć, że dla regularnie rosnących lub malejących tras, przybliżenia są bardziej precyzyjne. Natomiast, gdy pojawiają się gwałtowne skoki, przybliżenie dla tej samej ilości punktów jest mniej dokładne.

Na koniec, metoda interpolacji za pomocą funkcji sklejanych jest zdecydowanie lepszą i bardziej zalecaną metodą, mimo swoich większych wymagań. Metoda Lagrange'a, ze względu na generowany efekt Rungego, może prowadzić do poważnych błędów w interpolacji.