

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА № 1.

Розв'язування задачі лінійного програмування із двома змінними графічно та за симплекс-методом

Мета роботи: Ознайомитись на практиці із основними поняттями теорії лінійного програмування, навчитись знаходити оптимальні плани задач лінійного програмування графічно, за допомогою симплекс методу.

1.1. Задача лінійного програмування

Сьогодні задачі планування та управління в галузях господарства розв'язують за методами математичного програмування. Найрозвиненішими у цій галузі є методи лінійного програмування. Лінійне програмування – це галузь математичного програмування, яка вивчає підходи до побудови математичних моделей оптимізаційних задач, що характеризуються лінійною функцією мети та лінійними залежностями між змінними, та методи їх розв'язування.

Під **задачею** лінійного програмування (ЗЛП) в загальному розуміють задачу знаходження мінімуму (максимуму) лінійної функції від n змінних на множині розв'язків системи лінійних нерівностей або лінійних рівнянь.

Математичну модель загальної задачі лінійного програмування (ЛП) можна подати в такому вигляді: *знайти такі числові значення змінних $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$, в яких лінійна функція набуває екстремуму (максимуму або мінімуму)*

$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = \sum_{j=1}^n c_jx_j \rightarrow \max (\min) \quad (1.1)$$

і які задовольняють систему лінійних обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq (\geq) b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leq (\geq) b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leq (\geq) b_m, \end{cases} \quad (1.2)$$

Функцію (1) називають **цільовою функцією** або **функцією мети**, вона моделює поставлену в задачі мету.

Для спрощення можна формулювати задачу лише для максимуму цільової функції. Якщо ж в конкретній задачі треба визначити мінімум функції $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$, то це те саме, що шукати максимум функції $f(x)_1 = -f(x) = -c_1x_1 - c_2x_2 - \dots - c_nx_n$.

Розв'язати задачу ЛП означає знайти її оптимальний план та обчислити максимальне (мінімальне) значення цільової функції або показати, що оптимального плану не існує.

Під час розв'язання задачі ЛП можливі *три випадки*:

1. Існує оптимальний план (єдиний або нескінченна множина оптимальних планів).
2. Оптимальний план не існує, хоча плани даної задачі існують, але на непустій множині планів цільова функція не обмежена (зверху – в задачі максимізації, знизу – в задачі мінімізації).

3. Оптимального плану не існує, тому що в задачі не існує жодного плану.

Окрім цього, існує три форми задачі лінійного програмування:

1. **Загальна задача**, коли система обмежень (1.2) містить хоча б одну нерівність.
2. **Основна задача** – це випадок задачі ЛП, коли всі обмеження системи (1.2) є рівняннями.
3. **Канонічна задача** – це частковий випадок основної задачі у тому розумінні, що система рівнянь (1.2) є канонічною, а цільова функція (1.1) виражена тільки через вільні невідомі.

Система лінійних рівнянь називають **канонічною системою**, якщо вона задовольняє такі дві умови:

1. У кожному рівнянні є одна невідома змінна з коефіцієнтом, що дорівнює 1, яка відсутня у решті рівнянь. Таку невідому називають **базисною**.
2. Вільні члени усіх рівнянь системи (1.2) невід'ємні.

Невідомі змінні, що не є базисними, називають **вільними**.

Якщо в канонічній системі прирівняти до нуля всі вільні змінні, то базисні змінні дорівнюватимуть невід'ємним вільним членам рівнянь. Отриманий таким чином план називається **базисним планом** канонічної задачі.

Для того, щоб загальну задачу привести до основної, потрібно:

- 1) непозитивні змінні замінити на ненегативні з оберненим знаком:

$$x_j \leq 0, \quad x_j^c = -x_j, \quad x_j^c \geq 0,$$

змінні, необмежені в знаку (з областю зміни від $-\infty$ до $+\infty$) замінити на різницю пари ненегативних додаткових змінних:

$$x_j > 0, \quad x_j = x_j^+ - x_j^-, \quad x_j^+, x_j^- \geq 0;$$

- 2) нерівності замінити на рівняння: достатньо ввести невід'ємні *додаткові* невідомі, додавши їх до лівих частинах нерівностей “типу \leq ” або віднявши з лівих частин нерівностей “типу \geq ” і приписавши до заданої цільової функції з нульовими коефіцієнтами.

1.2. Симплекс-метод розв'язування задачі ЛП

Відомим методом розв'язування задачі ЛП є симплекс-метод, що був опублікований Д.Б. Данцигом у 1949 р. Його ідея полягає в *спрямованому* переборі допустимих планів у такий спосіб, що на кожному кроці здійснюється перехід від одного опорного плану до іншого, який за значенням цільової функції був би хоча б не гіршим за попередній. Значення функції під час переходу змінюється в потрібному напрямку: збільшується (для задачі на максимум) чи зменшується (для задачі на мінімум).

Симплекс-метод – це ітераційна обчислювальна процедура, яка дає змогу, починаючи від певного опорного плану, за скінченну кількість кроків отримати оптимальний план задачі лінійного програмування.

Алгоритм розв'язання задачі за симплекс-методом:

1. Зводимо задачу лінійного програмування до канонічного вигляду. При необхідності переходу від нерівності до рівняння вводимо додаткові змінні.

Після введення додаткових змінних систему рівнянь та лінійну функцію записуємо у вигляді **розширеної системи**:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$
$$f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max.$$

Слід мати на увазі, що всі компоненти вектора правої частини мають бути невід'ємними.

2. Знаходимо *допустимий базисний розв'язок*. Отриману розширену систему заносимо в першу симплекс-таблицю (СТ-1). Останній рядок таблиці називають **оціночним**. У ньому, окрім значення цільової функції (в першій таблиці рівного 0), вказуємо *критерії оптимальності*: для небазисних змінних коефіцієнти цільової функції з протилежним знаком $-c_j$, для базисних 0. У першому зліва стовпці таблиці записуємо основні змінні (базис) x_b , а в заголовок таблиці вносимо всі змінні; у другому стовпці – вільні члени розширеної системи b_1, b_2, \dots, b_m . Останній стовпець необхідний для оціночних відношень, які використовують під час розрахунку найменшого можливого значення змінної. У робочу частину таблиці (починаючи з третього стовпця) заносимо коефіцієнти a_{ij} при всіх змінних із розширеної системи.

3. Знайдений опорний план *перевіряємо на виконання критерію оптимальності* – для задачі максимізації на наявність в останньому рядку від'ємних коефіцієнтів. Якщо таких коефіцієнтів немає, то розв'язок оптимальний, досягнуто $\max f = c_0$ (в лівому нижньому куті таблиці), основні змінні приймають значення, записані в другому стовпці, а змінні, що не входять в базис, рівні 0, тобто отримуємо *оптимальний базисний розв'язок*.

4. Якщо критерій оптимальності не виконується, то найбільшому за модулем від'ємному коефіцієнту $\Delta_s < 0$ в останньому рядку відповідає **провідний стовпець s** .

Обчислюємо оціночні відношення для кожного рядка за такими правилами:

- 1) ∞ , якщо $a_{is} \leq 0$;
- 2) 0, якщо $b_i = 0$ і $a_{is} > 0$;
- 3) b_i / a_{is} , якщо $b_i > 0$ і $a_{is} > 0$.

Визначаємо $\min_i \{ |b_i / a_{is}| \}$. Якщо скінченного мінімуму немає, то задача не містить скінченного оптимуму ($f_{\max} = \infty$). Якщо мінімум існує, то вибираємо рядок q , на якому він досягається (будь-який, якщо їх декілька), та називаємо його **провідним рядком**. На перетині провідних стовпця та рядка знаходиться **головний елемент a_{qs}** .

5. *Переходимо до нового опорного плану.* Базисний розв’язок можна знайти за правилом прямокутника.

Правило прямокутника

Заповнюємо нову симплекс таблицю за правилом:

- у лівому стовпці записуємо новий базис: замість основної змінної x_q — змінну x_s ;
- на місці головного елемента ставимо 1, у провідному стовпчику всі елементи, окрім головного, прирівнюємо до нуля;
- новий рядок з номером q отримуємо із старого рядка діленням на головний елемент a_{qs} ;
- решта елементів a'_{ij} обчислюються за *правилом прямокутника* (рис. 1.1):

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is} a_{qj}}{a_{qs}}, \quad b'_i = b_i - \frac{a_{is} b_q}{a_{qs}}. \quad (1.3)$$

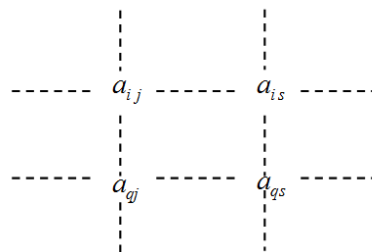


Рис. 1.1. Схема вибору елементів для методу прямокутника

Далі переходимо до п. 3 алгоритму.

Блок-схема алгоритму симплекс-методу наведена на рис. 1.2.

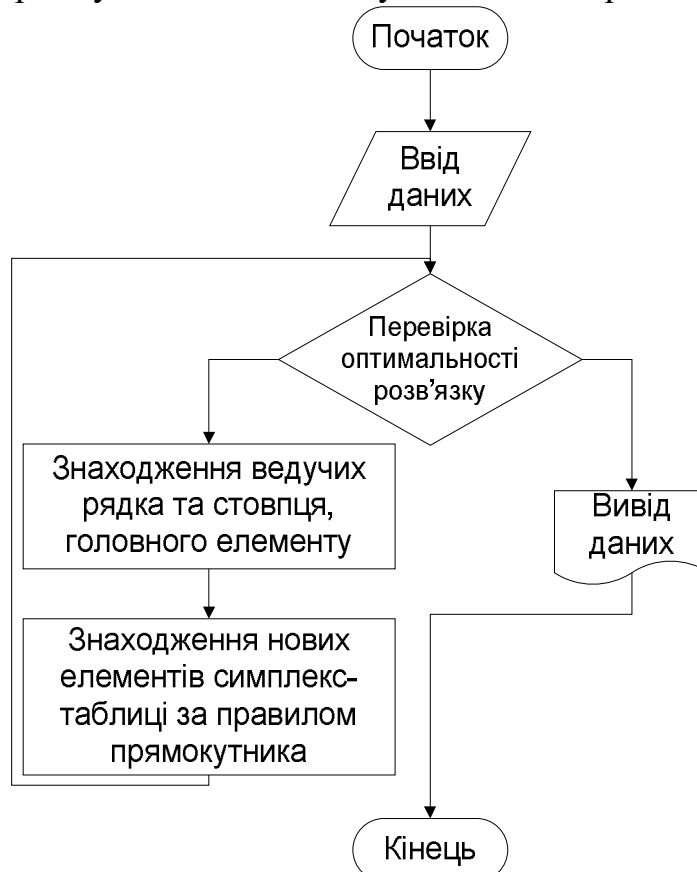


Рис. 1.2. Блок-схема симплекс-методу

Контрольні запитання до лабораторної роботи № 1

1. Сформулюйте задачу лінійного програмування.
2. Що таке цільова функція?
3. Як задачу мінімізації звести до задачі максимізації цільової функції?
4. Який план називається опорним?
5. Що таке допустимий план?
6. Які є три форми задачі ЛП?
7. Яка система називається канонічною?
8. Яка різниця між вільними та базисними змінними?
9. Опишіть алгоритм симплекс-методу.
10. На якій ідеї ґрунтується симплекс-метод?
11. У чому суть правила прямокутників?
12. Який елемент симплекс таблиці називається головним?
13. Як обчислити оціночні відношення для симплекс-таблиці?
14. Що таке провідний рядок (стовпець) симплекс-таблиці?
15. Яка умова закінчення симплекс-методу?
16. Чим відрізняється оптимальний розв'язок задачі ЛП від допустимого?
17. Чи може функція мети задачі ЛП містити нелінійні вирази зі змінних?
18. Чи може задача ЛП мати більше, ніж один, оптимальний розв'язок?
19. Чи може в допустимий розв'язок задачі ЛП входити від'ємна компонента?
20. Опишіть графічний спосіб розв'язування задачі ЛП.

Завдання до лабораторної роботи № 1

1. Отримати індивідуальний варіант завдання.
2. Записати математичну модель задачі ЛП та зазначити економічний зміст цільової функції і системи обмежень. Написати програму розв'язування та з її допомогою знайти розв'язок (максимальне (мінімальне) значення функції та значення змінних, при якому воно досягається) задачі ЛП згідно з варіантом з Додатка № 1 до лабораторної роботи № 1.
3. Розв'язати задачу ЛП з Додатка № 2 графічним методом (знайти максимальне та мінімальне значення функції та значення змінних, при якому вони досягаються).
4. Оформити звіт про виконану роботу.
5. Продемонструвати викладачеві результати, відповісти на запитання стосовно виконання роботи.

Вимоги до програми

Програма має передбачати такі можливості:

1. Автоматичне знаходження оптимального плану для відповідного завдання:
 - зведення до канонічної форми;
 - виведення усіх СТ.
2. Введення вхідних даних вручну:
 - задати кількість рядків та стовпців;
 - задати цільову функцію;
 - задати коефіцієнти обмеження на змінні "типу \leq ".
3. Передбачити можливість некоректного введення даних.
4. Передбачити можливість покрокового відображення побудови симплекс таблиць.
5. Підписання таблиць.
6. Виведення відповідного повідомлення у випадку не існування оптимального плану.

Додаток № 1 до лабораторної роботи № 1

1. Підприємство має у своєму розпорядженні ресурси (сировину, робочу силу та устаткування), що необхідні для виробництва кожного з чотирьох видів товарів. Інформація про затрати ресурсів на виготовлення одиниці окремого виду товару, прибуток від його реалізації, а також запаси ресурсів наведені в таблиці:

Вид ресурсу	Витрати ресурсів на одиницю товару виду				Обсяг ресурсів
	1	2	3	4	
Сировина, кг	3	5	47	2	65
Робоча сила, год	20	13	18	31	400
Устаткування, станко-год	9	15	7	16	130
Прибуток за одиницю товару, грн.	30	20	50	45	—

Визначити оптимальний план з виготовлення товарів, який максимізує прибуток.

2. Меблева фабрика випускає столи, стільці, книжкові полиці й книжкові шафи. При виготовленні цих товарів використовуються два різних типи дошок, причому фабрика має наявності 1500 м дошок типу 1 і 1000 м дошок типу 2. Крім того, задані трудові ресурси в кількості 800 люд.-год. Нормативи витрат кожного з видів ресурсів на виготовлення одного виробу й прибуток від реалізації одного виробу наведені у таблиці:

Ресурси	Норми затрат ресурсу на одиницю виробу			
	Стіл	Стілець	Книжкова полиця	Книжкова шафа
Дошки типу 1, м	5	1	9	12
Дошки типу 2, м	2	3	4	1
Трудові ресурси, люд.-год	3	2	5	10
Прибуток, грн/шт.	12	5	15	10

Визначити оптимальну програму випуску виробів, яка максимізує прибуток.

3. Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі (А, В, С) використовує три види основної сировини (цукровий пісок, патоку і фруктове пюре). Норми витрати сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі певного виду, загальна кількість сировини кожного виду, яка може

бути використана фабрикою і прибуток від реалізації 1 т карамелі кожного виду наведені в таблиці:

Вид сировини	Норми витрати, т, на 1 т карамелі			Загальна кількість сировини, т
	А	В	С	
Цукор-пісок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктове пюре	–	0,1	0,1	120
Прибуток, грн	108	112	126	–

Визначити оптимальну програму виробництва продукції кондитерської фабрики, яка забезпечить максимальний прибуток від її реалізації. Максимально можливий випуск карамелі виду А не перевищує 120 т.

4. На підприємстві використовують три технологічних процеси для виробництва деякого продукту із застосуванням при цьому чотирьох видів сировини. Витрата сировини при роботі за різними технологічними процесами, ресурси сировини й ціна продукту, отриманого в результаті застосування процесу, наведені в таблиці:

Вид сировини	Номер технологічного процесу			Ресурси, кг
	1	2	3	
1	5	4	6	50
2	8	3	7	50
3	3	9	4	20
4	6	5	2	60
Ціна, грн	10	15	8	–

Визначити інтенсивність використання кожного процесу з умови забезпечення максимуму товарної продукції.

5. Підприємство може випускати продукцію за трьома технологіями виробництва. При цьому протягом однієї години за першою технологією воно випускає 20 од. продукції, за другою – 25 од., за третьою – 30 од. продукції. Кількість виробничих факторів, що витрачаються за годину при різних способах виробництва, та наявність ресурсів цих факторів представлені в таблиці:

Фактори	Спосіб виробництва			Ресурси факторів
	1	2	3	
Сировина, кг	2	1	3	60
Верстатний парк, верстато-год	3	4	2	80
Робоча сила, люд.-год	7	3	4	70
Енергія, кВт-год	2	1	3	50
Транспорт, км	1	0	1	40
Інші витрати, грн	4	2	1	50

Спланувати роботу підприємства за умови одержання максимуму продукції.

6. Підприємство може працювати за п'ятьма технологічними процесами, причому кількість одиниць продукції, що випускається, за різними технологічними процесами за одиницю часу (наприклад, зміну) відповідно дорівнює 300, 260, 320, 400 і 450 шт. Витрати виробничих факторів у гривнях при роботі за різними технологічними процесами протягом одиниці часу й наявні ресурси цих факторів наведені в таблиці

Фактори	Технологічні процеси					Ресурси, грн
	1	2	3	4	5	
Сировина	12	15	10	12	11	1 300
Електроенергія	0,2	0,1	0,2	0,25	0,3	30
Зарплата	3	4	5	4	2	400
Накладні витрати	6	5	4	6	4	800

Знайти програму максимального випуску продукції за одиницю часу.

7. Підприємство випускає продукцію трьох видів (P_1 , P_2 , P_3). Рівень випуску її лімітується обмеженістю ресурсів, які є у розпорядженні підприємства - сировини, робочої сили, технологічного обладнання двох типів. Вихідні дані подано в таблиці:

Види ресурсів	Обсяг ресурсів	Норми витрат на одиницю продукції кожного виду		
		P_1	P_2	P_3
Сировина (кг)	24	5	7	4
Робоча сила (осіб)	80	10	5	20
Обладнання I типу(од.)	10	5	2	1
Обладнання II типу (од.)	6	2	1	1
Вартість одиниці продукції (у гривнях)	18	12	8	46

Визначити рівень випуску продукції за видами, при якому досягаються максимум її загальної вартості.

8. Для виготовлення трьох видів виробів (А, В, С) використовується токарне, фрезерне, зварювальне й шліфувальне устаткування. Витрати часу на обробку одного виробу для кожного з типів устаткування, а також загальний фонд робочого часу кожного з типів устаткування і прибуток від реалізації одного виробу кожного виду наведені в таблиці:

Тип устаткування	Витрати часу, верстато-год на обробку одного виробу виду			Загальний фонд робочого часу, год
	А	В	С	
Фрезерне	2	4	5	120
Токарне	1	8	6	280
Зварювальне	7	4	5	240
Шліфувальне	4	6	7	360
Прибуток, грн	10	14	12	—

Визначити оптимальну програму виробництва, при якій прибуток був би максимальним.

9. Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі (А, В, С) використовує три види основної сировини (цукровий пісок, патоку і фруктове пюре). Норми витрати сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі певного виду, загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана фабрикою і прибуток від реалізації 1 т карамелі кожного виду наведені в таблиці:

Вид сировини	Норми витрати, т, на 1 т карамелі			Загальна кількість сировини, т
	А	В	С	
Цукор-пісок	0,8	0,5	0,6	800
Патока	0,4	0,4	0,3	600
Фруктове пюре	—	0,1	0,1	120
Прибуток, грн	108	112	126	—

Визначити оптимальну програму виробництва продукції кондитерської фабрики, яка забезпечить максимальний прибуток від її реалізації.

10. Для виробництва продукції трьох видів (А, В, С) використовується три різних види сировини. Кожний з видів сировини може бути використаний в обсязі, відповідно, не більшому ніж 140, 250 і 240 кг. Норми витрат кожного виду сировини на одиницю продукції певного виду й ціна одиниці продукції кожного виду наведені в таблиці:

Вид сировини	Норми витрат сировини на одиницю продукції, кг		
	Виріб 1	Виріб 2	Виріб 3
1	4	2	1
2	3	1	3
3	1	2	5
Ціна од. продукції, грн	10	14	12

Потрібно визначити план випуску продукції, що забезпечує максимальний її випуск у вартісному вираженні, якщо випуск виробу А не перевищує 20 шт., а виробу В не перевищує 60 шт.

11. Підприємство випускає продукцію трьох видів: P_1 , P_2 і P_3 . Використовують три види ресурсів: обладнання, сировину та електроенергію. Норми витрати, ліміти ресурсів і прибуток від одиниці продукції наведені у таблиці:

Ресурси	P_1	P_2	P_3	Об'єм ресурсів
Обладнання	2	3	4	30
Сировина	2	1	5	48
Електроенергія	2	1	3	20
Прибуток	30	20	40	

Досвід роботи показав, що попит на продукцію P_1 ніколи не перевищує попиту на продукцію P_2 більш ніж на 1 од. Крім того, відомо, що попит на продукцію P_3 ніколи не перевищує 2 од. на добу. Знайти оптимальний план випуску продукції.

12. Підприємство випускає чотири види виробів і використовує три типи основного устаткування: токарне, фрезерне й шліфувальне. Затрати часу на виготовлення одиниці продукції на кожному з типів устаткування, загальний фонд робочого часу кожного з типів устаткування, а також прибуток від реалізації одного виробу даного виду наведені в таблиці:

Тип устаткування	Витрати часу, верстато-год, на одиницю продукції виду				Загальний фонд робочого часу, верстато-год
	1	2	3	4	
Токарне	2	1	1	3	300
Фрезерне	1	—	2	1	70
Шліфувальне	1	2	1	—	340
Прибуток, грн	8	3	2	1	—

Визначити програму виробництва, при якій загальний прибуток від реалізації продукції буде максимальним.

13. На ткацькій фабриці для виготовлення трьох артикулів тканини використовуються ткацькі верстати двох типів, пряжа і барвники. Продуктивність верстатів, норми витрати пряжі і барвників, ціна 1 м тканини кожного артикула, а також загальний фонд робочого часу верстатів, кількість пряжі й барвників, які є в розпорядженні фабрики наведені у таблиці:

Ресурси	Норми витрат на 1 м тканини артикула			Загальна кількість ресурсів
	1	2	3	
Продуктивність верстатів, верстато-год/м:				
1-го типу	0,02	–	0,04	200
2-го типу	0,04	0,03	0,01	500
Пряжа, кг/м	1,0	1,5	2,0	15 000
Барвники, кг/м	0,03	0,02	0,025	450
Ціна, грн/м	5	8	8	–

Визначити програму виробництва тканин, яка забезпечить їхню максимальну загальну вартість.

14. Підприємство для виготовлення чотирьох видів продукції використовує токарне, фрезерне, свердлильне, розточувальне і шліфувальне устаткування, а також комплектуючі вироби, збирання яких потребує виконання певних складально-налагоджувальних робіт. Норми витрат усіх видів ресурсів на виготовлення кожного виду виробу, а також наявний фонд кожного з ресурсів, прибуток від реалізації одиниці продукції певного виду наведені в таблиці:

Ресурси	Норми затрат на виготовлення одного виробу				Обсяг ресурсів
	1	2	3	4	
Продуктивність верстатів, людино-год:					
токарного	50	–	62	–	6 427
фрезерного	4	3	2	2	480
свердлильного	9	11	15	5	2 236
розточувального	16	9	16	13	2 624
шліфувального	–	16	3	5	780
Комплектуючі вироби, шт.	3	4	3	3	520
Складально-налагоджувальні роботи, людино-год	4,5	4,5	4,5	4,5	720
Прибуток, грн/шт.	315	278	573	370	–

Знайти оптимальну програму випуску продукції, яка дасть максимальний прибуток від реалізації продукції.

15. Меблева фабрика випускає столи, стільці, книжкові полиці й книжкові шафи. При виготовленні цих товарів використовуються два різних типи дошок, причому фабрика має наявності 1500 м дошок типу 1 і 1000 м дошок типу 2. Крім того, задані трудові ресурси в кількості 800 люд.-год. Нормативи витрат кожного з видів ресурсів на виготовлення одного виробу й прибуток від реалізації одного виробу наведені у таблиці:

Ресурси	Норми затрат ресурсу на одиницю виробу			
	Стіл	Стілець	Книжкова полиця	Книжкова шафа
Дошки типу 1, м	5	1	9	12
Дошки типу 2, м	2	3	4	1
Трудові ресурси, люд.-год	3	2	5	10
Прибуток, грн/шт.	12	5	15	10

Визначити оптимальну програму випуску виробів, яка максимізує прибуток, при наступних додаткових умовах: столів – не більше 40, стільців – не більше 130.

16. Для виробництва трьох видів продукції підприємство використовує два типи технологічного устаткування і два види сировини. Норми витрат сировини й часу на виготовлення одного виробу кожного виду, загальний фонд робочого часу технологічного устаткування, обсяг наявної сировини, а також ціна одного виробу певного виду наведені в таблиці:

Ресурси	Норми витрат на один виріб виду			Загальна кількість ресурсів
	1	2	3	
Продуктивність верстатів, нормо-год:				
1-го типу	2	–	4	200
2-го типу	4	3	1	500
Сировина, кг:				
1-го типу	10	15	20	1 495
2-го типу	30	20	25	4 500
Ціна, грн/шт.	10	15	20	–

Скласти оптимальний план виробництва продукції, щоб загальна вартість усієї виготовленої продукції була максимальною.

17. Підприємство має у своєму розпорядженні ресурси (сировину, робочу силу та устаткування), що необхідні для виробництва кожного з чотирьох видів товарів. Інформація про затрати ресурсів на виготовлення одиниці

окремого виду товару, прибуток від його реалізації, а також запаси ресурсів наведені в таблиці:

Вид ресурсу	Витрати ресурсів на одиницю товару виду				Обсяг ресурсів
	1	2	3	4	
Сировина, кг	3	5	47	2	65
Робоча сила, год	20	13	18	31	400
Устаткування, станко-год	9	15	7	16	130
Прибуток за одиницю товару, грн.	30	20	50	45	—

Визначити оптимальний план з виготовлення товарів, який максимізує прибуток, при таких додаткових умовах: першого товару випустити не більше 5 одиниць, другого – не більше 6 одиниць, обмежень на кількість інших товарів немає.

18. При виробництві чотирьох видів кабелю виконується п'ять технологічних операцій. Норми витрат на 1 км кабелю даного виду на кожній із груп операцій, прибуток від реалізації 1 км кожного виду кабелю, а також загальний фонд робочого часу, протягом якого можуть виконуватися ці операції, зазначені в таблиці:

Технологічна операція	Норми витрат часу на обробку 1 км кабелю виду, год				Загальний фонд робочого часу, г
	1	2	3	4	
Волочіння	1,2	1,8	1,6	2,4	7 200
Накладення ізоляцій	1,0	0,4	0,8	0,7	5 600
Скручування елементів у кабель	6,4	5,6	6,0	8,0	11 176
Свинцювання	3,0	—	1,8	2,4	3 600
Випробування і контроль	2,1	1,5	0,8	3,0	4 200
Прибуток, грн/км	1,2	0,8	1,0	1,3	—

Визначити такий план випуску кабелю, щоб загальний прибуток від реалізації продукції був максимальним.

19. Для виробництва продукції трьох видів (А, В, С) використовується три різних види сировини. Кожний з видів сировини може бути використаний в обсязі, відповідно, не більшому ніж 140, 250 і 240 кг. Норми витрат кожного виду сировини на одиницю продукції певного виду й ціна одиниці продукції кожного виду наведені в таблиці:

Вид сировини	Норми витрат сировини на одиницю продукції, кг		
	Виріб 1	Виріб 2	Виріб 3
1	4	2	1
2	3	1	3
3	1	2	5
Ціна од. продукції, грн	10	14	12

Потрібно визначити план випуску продукції, що забезпечує максимальний її випуск у вартісному вираженні.

20. На меблевій фабриці виготовляється п'ять видів продукції: столи, шафи, дивани, крісла й тахти. Норми витрат праці, а також деревини й тканини на виробництво одиниці продукції певного виду, прибуток від реалізації виробу та загальна кількість ресурсів певного виду, що є в розпорядженні фабрики наведені в таблиці:

Ресурси	Норма витрати ресурсу на одиницю продукції					Загальна кількість ресурсів
	Стіл	Шафа	Диван	Крісло	Тахта	
Трудовитрати, людино-год	4	8	12	9	10	3 456
Деревина, м ²	0,4	0,6	0,3	0,2	0,3	432
Тканина, м	—	—	6	4	5	2 400
Прибуток, грн/шт.	8	10	16	14	12	—

Визначити план виробництва продукції, який максимізує прибуток.

21. Підприємство випускає чотири види виробів і використовує три типи основного устаткування: токарне, фрезерне й шліфувальне. Затрати часу на виготовлення одиниці продукції на кожному з типів устаткування, загальний фонд робочого часу кожного з типів устаткування, а також прибуток від реалізації одного виробу даного виду наведені в таблиці:

Тип устаткування	Витрати часу, верстато-год, на одиницю продукції виду				Загальний фонд робочого часу, верстато-год
	1	2	3	4	
Токарне	2	1	1	3	300
Фрезерне	1	—	2	1	70
Шліфувальне	1	2	1	—	340
Прибуток, грн	8	3	2	1	—

Визначити програму виробництва, при якій загальний прибуток від реалізації продукції буде максимальним, якщо випуск продукції виду 3 не перевищує 10 шт., а виду 4 - 20 шт.

22. Для виготовлення солодошів трьох типів P_1, P_2, P_3 , прибуток від реалізації яких дорівнює 25, 15 та 10 ум. од. відповідно, використовують продукцію трьох типів: K_1, K_2 та K_3 , запаси яких на виробництві відповідно 50, 75 та 90 ум. од. Для виготовлення солодошів P_1 необхідно 2 ум. од. K_1 , 1 ум. од. K_2 і 3 ум. од. K_3 , для виготовлення солодошів P_2 необхідно 3 ум. од. K_1 , 2 ум. од. K_2 і 3 ум. од. K_3 , а для виготовлення солодошів P_3 необхідно 1 ум. од. K_1 , 4 ум. од. K_2 і 2 ум. од. K_3 . Скласти план випуску солодошів, який би забезпечив фірмі максимальний прибуток.

23. На фермі вирощують кіз, корів і овець. Для забезпечення нормальних умов їх догляду використовують три види кормів. Кількість корму кожного виду, який щодня повинні щодня одержувати тварини, наведено в таблиці. У ній також зазначено загальну кількість корму кожного виду, який може бути використаний фермою, і прибуток від реалізації однієї літри молока.

Вид корму	Коза	Корова	Вівця	Обсяг корму
I	2	4	3	180
II	4	5	1	240
III	6	9	7	426
Прибуток	16	10	12	

Визначити, скільки кіз, корів та овець слід вирощувати на фермі, щоб прибуток від реалізації молока був максимальним.

24. Завод додатково освоїв випуск продукції чотирьох асортиментів B_1, B_2, B_3, B_4 . Для її випуску потрібна сировина чотирьох видів A_1, A_2, A_3, A_4 , яку завод може щомісячно виділяти в обмеженій кількості. Кількість сировини кожного виду, необхідної для виготовлення кожного виду продукції, прибуток від реалізації кожного виду продукції, а також лімітоване щомісячне надходження потрібної сировини подано в таблиці:

Сировина	Щомісячне надходження сировини (ум. од.)	Витрати сировини на одиницю кожного виробу			
		B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1260	2	4	6	8
A_2	900	2	2	0	6
A_3	530	0	1	1	2
A_4	210	1	0	1	0
Прибуток від реалізації одиниці виробу		8	10	12	18

Визначити, яку кількість кожного з видів продукції B_1, B_2, B_3, B_4 має випускати завод, щоб прибуток від її реалізації був максимальним.

25. Є три види сировини А, В і С, які використовують для виготовлення двох видів продуктів – 1 та 2. У розпорядженні – 500 одиниць сировини А, 750 одиниць сировини В і 200 одиниць сировини С. Продукт 1 складається з однієї одиниці сировини А і двох одиниць сировини В. Продукт 2 складається із двох одиниць сировини А, однієї одиниці сировини В і однієї одиниці сировини С. Одиниця продукту 1 дає змогу отримати 4 одиниці нової продукції в суміжному виробництві, а одиниця продукту 2 – 5 одиниць. Скільки одиниць кожного продукту треба випустити, щоб максимально забезпечити суміжне виробництво нової продукції?

26. Підприємство випускає продукцію трьох видів: P_1, P_2 і P_3 . Використовують три види ресурсів: обладнання, сировину та електроенергію. Норми витрати, ліміти ресурсів і прибуток від одиниці продукції наведені у таблиці:

Ресурси	P_1	P_2	P_3	Об'єм ресурсів
Обладнання	2	3	4	30
Сировина	2	1	5	48
Електроенергія	2	1	3	20
Прибуток	30	20	40	

Знайти оптимальний план випуску продукції.

27. Для виробництва трьох видів виробів (А, В, С) використовуються три різноманітних види ресурсів. Норми витрат кожного з видів ресурсів на одиницю продукції кожного виду, запаси ресурсів і прибуток від випуску одиниці продукції наведені в таблиці:

Вид ресурсів	Норми витрат на 1 виріб типу			Запаси ресурсів
	А	В	С	
Праця, людино-год	4	2	1	180
Сировина, кг	3	1	3	210
Устаткування, год	1	2	5	244
Прибуток, гр. од.	10	14	12	—

Визначити план випуску продукції, при якому сумарний прибуток максимальний.

28. Процес виготовлення промислових виробів двох видів P_1 і P_2 складається з послідовного оброблення кожного з них на трьох верстатах. Тривалість використання цих верстатів для виготовлення даних виробів обмежено 10

год на добу. Тривалість оброблення одного виробу (у хвиликах) і прибуток від продажу одного виробу кожного виду вказані в таблиці:

<i>Верстат</i>	P_1	P_2	<i>Обмеження часу</i>
I	10	5	10
II	6	20	10
III	8	15	10
<i>Прибуток</i>	200	300	

Знайти оптимальні обсяги виготовлення виробів кожного виду, що максимізують прибуток.

29. Для виготовлення різних виробів А і В використовують три види сировини. Для виготовлення одиниці виробу А треба затратити сировини першого виду 16 кг, сировини другого виду – 8 кг, сировини третього виду – 5 кг. Для виготовлення одиниці виробу В треба затратити сировини першого виду 4 кг, сировини другого виду – 7 кг, сировини третього виду – 9 кг. Виробництво забезпечено сировиною першого виду в кількості 784 кг, сировиною другого виду – в кількості 552 кг, сировиною третього виду – в кількості 567 кг. Витрати людино-годин на виготовлення одиниці готового виробу А дорівнюють 4 люд.-год, а виробу В – 6 люд.-год. Скласти план виготовлення виробів А і В при умові максимального використання працівників для забезпечення зайнятості персоналу.

30. На звірофермі можуть вирощувати лисиць і песців. Для забезпечення нормальних умов їх вирощування використовують три види кормів. Кількість корму кожного виду, який мають щодня одержувати лисиці та песці, наведено в таблиці. У ній також зазначено загальну кількість корму кожного виду, який може бути використаний звірофермою, і прибуток від реалізації однієї шкурки лисиці і песця.

<i>Вид корму</i>	<i>Лисиця</i>	<i>Песець</i>	<i>Обсяг корму</i>
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
<i>Прибуток</i>	16	12	

Визначити, скільки лисиць і песців слід вирощувати на звірофермі, щоб прибуток від реалізації їх шкурок був максимальним.

Додаток № 2 до лабораторної роботи № 1

1	$f(x_1, x_2) = 7x_1 + 6x_2 \rightarrow \max$ $2x_1 + 5x_2 \geq 10$ $5x_1 + 2x_2 \geq 10$ $x_1 \leq 6$ $x_2 \leq 5$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	16	$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max;$ $-3x_1 + 2x_2 \leq 1,$ $x_1 + 2x_2 \leq 14,$ $2x_1 + x_2 \leq 13,$ $3x_1 - x_2 \leq 12,$ $x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}.$
2	$F = 5x_1 - 3x_2 \rightarrow \min;$ $3x_1 + 2x_2 \geq 6,$ $2x_1 - 3x_2 \geq -6,$ $x_1 - x_2 \leq 4,$ $4x_1 + 7x_2 \leq 28;$ $x_1, x_2 \geq 0.$	17	$F = 6x_1 - 5x_2 \rightarrow \max;$ $2x_1 + 5x_2 \leq 10,$ $5x_1 + 2x_2 \leq 10,$ $x_j \geq 0, j = \overline{1, 2}.$
3	$F = 7x_1 - 2x_2 \rightarrow \max;$ $5x_1 - 2x_2 \leq 3,$ $x_1 + x_2 \geq 1,$ $-3x_1 + x_2 \leq 3,$ $2x_1 + x_2 \leq 4;$ $x_1, x_2 \geq 0.$	18	$F = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$ $x_1 + x_2 \leq 4,$ $3x_1 + x_2 \geq 4,$ $x_1 + 5x_2 \geq 4,$ $0 \leq x_1 \leq 3,$ $0 \leq x_2 \leq 3.$
4	$F = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$ $3x_1 - 2x_2 \geq -6,$ $x_1 + x_2 \geq 3,$ $x_1 \leq 3,$ $x_2 \leq 5;$ $x_1, x_2 \geq 0.$	19	$F = 6x_1 + 4x_2 \rightarrow \min;$ $2x_1 + x_2 \geq 3,$ $x_1 - x_2 \leq 1,$ $-x_1 + 2x_2 \geq 1,$ $x_1, x_2 \geq 0.$
5	$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$ $5x_1 - 2x_2 \leq 4,$ $x_1 - 2x_2 \geq -4,$ $x_1 + x_2 \geq 4;$ $x_1, x_2 \geq 0.$	20	$F = 4x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$ $5x_1 + 2x_2 \geq 20,$ $x_1 + 3x_2 \leq 15,$ $x_1, x_2 \geq 0.$
6	$F = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$ $x_1 - 4x_2 \leq 4,$ $3x_1 + 2x_2 \leq 6,$ $-x_1 + x_2 \leq 7,$ $x_1 + 2x_2 \geq 2;$ $x_1, x_2 \geq 0.$	21	$F = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$ $2x_1 + 3x_2 \leq 3,$ $x_1 + 3x_2 \leq 4,$ $-x_1 + x_2 \leq 5,$ $5x_1 + 4x_2 \leq 6,$ $x_1, x_2 \geq 0.$
7	$F = x_1 + x_2 \rightarrow \min;$ $3x_1 + x_2 \geq 8,$ $x_1 + 2x_2 \geq 6,$ $x_1 - x_2 \leq 3;$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	22	$F = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min;$ $x_1 + 5x_2 \geq 16,$ $3x_1 + 2x_2 \geq 12,$ $2x_1 + 4x_2 \geq 16,$ $x_1 \geq 1,$ $x_1, x_2 \geq 0.$

8	$F = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$ $3x_1 - 2x_2 \geq -6,$ $x_1 + x_2 \geq 3,$ $x_1 \leq 3,$ $x_2 \leq 5;$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	23	$F = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max;$ $x_1 + x_2 \leq 4,$ $3x_1 + x_2 \geq 4,$ $x_1 + 5x_2 \geq 4,$ $0 \leq x_1 \leq 3,$ $0 \leq x_2 \leq 3.$
9	$F = 2x_1 - 4x_2 \rightarrow \max;$ $8x_1 - 5x_2 \leq 16,$ $x_1 + 3x_2 \geq 2,$ $2x_1 + 7x_2 \leq 9;$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	24	$F = -2x_1 - x_2 \rightarrow \min;$ $x_1 + 2x_2 \leq 14,$ $5x_1 + 2x_2 \geq 10,$ $4x_1 - 3x_2 \leq 12,$ $7x_1 + 4x_2 \leq 28,$ $x_1, x_2 \geq 0.$
10	$f(x_1, x_2) = 3x_1 + 3x_2 \rightarrow \max$ $x_1 + x_2 \leq 8$ $3x_1 + 7x_2 \geq 21$ $x_1 + 2x_2 \geq 6$ $x_1 \geq 1$ $x_2 \geq 1$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$	25	$F = -7x_1 + 2x_2 \rightarrow \min;$ $x_1 + x_2 \geq 1,$ $5x_1 + x_2 \geq 3,$ $-3x_1 + x_2 \leq 3,$ $2x_1 + x_2 \leq 4,$ $x_1, x_2 \geq 0.$
11	$F = x_1 + x_2 \rightarrow \max;$ $x_1 + x_2 \geq 1,$ $-5x_1 + x_2 \leq 0,$ $-x_1 + 5x_2 \geq 0,$ $x_1 + x_2 \leq 6;$ $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$	26	$F = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max;$ $3x_1 + x_2 \geq 16,$ $x_1 + 2x_2 \leq 12,$ $x_1, x_2 \geq 0.$
12	$F = -3x_1 + x_2 \rightarrow \min;$ $x_1 + 2x_2 \geq 10;$ $3x_1 + x_2 \geq 15;$ $x_1 \leq 8;$ $x_1, x_2 \geq 0.$	27	$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$ $2x_1 + x_2 \leq 18,$ $x_1 + 2x_2 \geq 14,$ $x_1 - 2x_2 \leq 10,$ $x_1, x_2 \geq 0.$
13	$F = 2x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$ $3x_1 - 2x_2 \geq -6;$ $x_1 + x_2 \geq 3;$ $0 \leq x_1 \leq 9;$ $0 \leq x_2 \leq 6.$	28	$F = 7x_1 + x_2 \rightarrow \min;$ $x_1 + x_2 \geq 3,$ $5x_1 + x_2 \geq 5,$ $x_1 + 5x_2 \geq 5,$ $x_1, x_2 \geq 0.$
14	$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$ $x_1 + x_2 \leq 4;$ $3x_1 + x_2 \geq 4;$ $x_1 + 5x_2 \geq 4,$ $0 \leq x_1 \leq 3,$ $0 \leq x_2 \leq 3.$	29	$F = 2x_1 - x_2 \rightarrow \min;$ $5x_1 + 9x_2 \leq 45,$ $6x_1 + 3x_2 \leq 18,$ $-x_1 + 2x_2 \geq 2,$ $x_1, x_2 \geq 0.$
15	$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max;$ $5x_1 - 2x_2 \leq 4;$ $x_1 - 2x_2 \geq -4;$ $x_1 + x_2 \geq 4;$ $x_1, x_2 \geq 0.$	30	$F = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$ $2x_1 - x_2 \leq 6,$ $x_1 - x_2 \geq -2,$ $x_1 + x_2 \leq 10,$ $x_1, x_2 \geq 0.$