Самодуальные решения в теории Янга-Миллса

16 апреля 2025 г.

1 Математическое отступление про главные расслоения и связности

1.1 Определение локально-тривиального расслоения

Дадим вначале пару определений, которые прояснят геометрический смысл теории Янга-Миллса.
Локально тривиальным расслоением называется следующий набор данных:

- Гладкие многообразия E,B,F, именуемые тотальным пространством, слоем и базой.
- Сюръекция $\pi : E \to B$, удовлетворяющая свойству
$$\pi^{-1}(p) = F_p \cong F, \ \ \forall p \in B. \tag{1}$$
Прообраз при проекции F_p называется слоем в точке p.
- Группа Ли G, действующая на слое F
- Покрытие пространства B открытыми множествами $\{U_i, \phi_i\}$, где $\phi_i : U_i \times G \to \pi^{-1}(U_i)$, - диффеоморфизм тривиализации, причем такой, что $\phi_{i,p}(f) = \phi_i(p,f) : F \to F_p$ - диффеоморфизм. Кроме того, на пересечении $U_i \cap U_j$
$$\phi_{j,p}^{-1} \circ \phi_{i,p} = t_{ij} : F \to F, \ t_{ij} \in G \tag{2}$$
Иными словами, отображения тривиализации ϕ_i и ϕ_j связаны соотношением
$$\phi_i(p, f) = \phi_j(p, t_{ij} f). \tag{3}$$

Локально тривиальное расслоение называется главным, если в качестве слоя выступает сама группа G. Будем обозначать главное расслоение над M со структурной группой G как $P(M,G)$. Для главных расслоений помимо обыкновенного действия G на слое (себе же) слева, можно определить действие G справа на всем P следующим образом. Пусть $\{U_i, \phi_i\}$ - локальная тривиализация. Пусть $u \in \pi^{-1}(p), \ u = \phi_i(p, g_i)$ Определим
$$uh = \phi_i(p, g_i h), \ \ \forall h \in G. \tag{4}$$
Это определение не зависит от тривиализации, поскольку левое и правое действия коммутируют:
$$\phi_i(p, g_i h) = \phi_j(p, t_{ij} g_i h) = \phi_j(p, g_j h). \tag{5}$$
Заметим, что правое действие по определению оставляет точку в слое. Приведем пример главного расслоения, часто встречающегося в физике. Магнитный монополь - это $U(1)$-расслоение над двумерной сферой S^2. Базу в этом случае можно покрыть двумя картами, исключив северный и южный полюс. Отображения тривиализации зададим так
$$\begin{cases} \phi_N^{-1}(u) = (p, e^{i\alpha_N}) \\ \phi_S^{-1}(u) = (p, e^{i\alpha_S}) \end{cases} \tag{6}$$
Выбирая функции перехода на экваторе в форме $t_{NS}(\phi) = e^{in\phi}$, получаем параметризацию "нетривиальности"нашего расслоения целым числом n. Числом n определяется магнитный поток монополя.

1.2 Связность в главном расслоении и калибровочное поле A

Чтобы понять геометрический смысл калибровочного поля A, нужно познакомиться с понятием связности в главном расслоении. Пусть $P(M,G)$ - главное расслоение. Связность - это разбиение касательного пространства к P в прямую сумму:
$$T_u P = V_u P \oplus H_u P, \tag{7}$$
где $V_u P$ называется вертикальным подпространством и состоит из касательных векторов, являющихся касательными к слою $G_{\pi(u)}$. Определим для каждого $A \in \mathfrak{g}$ фундаментальное векторное поле $A^{\#}$ как векторное поле правого действия G на P:
$$A^{\#} f(u) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(u \exp(tA)) \tag{8}$$

Как было замечено ранее, $\pi(u\exp(tA)) = \pi(u)$, поэтому $A^{\#}(p) \in V_uP$. Горизонтальное подпространство H_uP определяется как прямое дополнение к V_uP, удовлетворяющее условию

$$H_{ug}P = R_{g*}H_uP. \tag{9}$$

На практике удобно дать другое определение связности. 1-форма $\omega \in \mathfrak{g} \otimes T^*P$, удовлетворяющая свойствам:

- $\omega(A^{\#}) = A$, $\forall A \in \mathfrak{g}$
- $R_g^*\omega = Ad_{g^{-1}}\omega$.

В этом случае горизонтальное пространство определяется просто как ядро ω и удовлетворяет свойству (9). По 1-форме связности можно определить и $\mathfrak{g}-$значные 1-формы в физическом пространстве, которые и называются калибровочными полями. Пусть $\{U_i\}$ - покрытие физического пространства, а σ_i- локальное сечение (калибровка), заданное на каждом U_i (не любое расслоение допускает глобальное сечение). Определим калибровочное поле следующим образом:

$$A_i = \sigma_i^* w \in \mathfrak{g} \otimes \Omega^1(U_i) \tag{10}$$

Важный результат заключается в том, что по покрытию $\{U_i, \sigma_i\}$ и соответствующим калибровочным полям A_i получится однозначно восстановить 1-форму связности ω, если при $U_i \cap U_j \neq 0$ калибровочное поле "преобразуется"по закону

$$A_j = t_{ij}^{-1}A_i t_{ij} + t_{ij}^{-1}dt_{ij}. \tag{11}$$

В обратную стопронуЮ если $\sigma_1(p)$ и $\sigma_2(p)$ - два сечения, определенные на U и связанные соотношением $\sigma_2(p) = \sigma_1(p)g(p)$, то

$$A_2 = g^{-1}A_1 g + g^{-1}dg \tag{12}$$

В качестве примера рассмотрим $U(1)$-расслоение над M. Функция склейки $t_{ij} : U_i \cap U_j \to U(1)$ имеют вид

$$t_{ij} = e^{i\Lambda(p)}, \tag{13}$$

Соответствующие абелевы калибровочные поля преобразуются по закону

$$A_{j\mu} = A_{i\mu} + i\partial_\mu \Lambda(p) \tag{14}$$

это всем известный закон преобразования калибровочных полей из электродинамики.

1.3 Ковариантная производная и форма кривизны

Ковариантная производная относительно связности ω определяется следующим образом. Пусть $\phi \in \Omega^k(P) \otimes \mathfrak{g}$.

$$D\phi(X_1, ..., X_{k+1}) = d\phi(X_1^H, ..., X_{k+1}^H), \tag{15}$$

где X^H - это "горизонтальная компонента"векторного поля X. Этому определению не хватает мотивировки, однако, определив кривизну связности $\Omega \in \Omega^2(P) \otimes \mathfrak{g}$ можно убедиться, что она удовлетворяет уравнению Картана

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega. \tag{16}$$

Локальная форма кривизны (или тензор напряженности поля Янга-Миллса) определяется точно так же, как и форма связности

$$F = \sigma^*\Omega = dA + A \wedge A \tag{17}$$

НАДО КАК-ТО ДОБАВИТЬ ПРО АССОЦИИРОВАННЫЕ РАССЛОЕНИЯ.

2 Напоминание про уравнения самодуальности

Мы будем рассматривать 4-мерную теорию Янга-Миллса в евклидовом пространстве-времени с калибровочной группой $SU(n)$:

$$S_{YM} = -\int Tr\Big(F \wedge \star F\Big), \tag{18}$$

где $F = dA + A \wedge A$, A 1-форма со значениями в алгебре Ли $su(n)$. Уравнение движения для такой теории имеет вид:

$$\nabla(\star F) = 0, \tag{19}$$

где $\nabla = d + A\wedge$ - ковариантная производная. Однако можно ограничиться нахождением решений, дающих конечное действие, такие решения называются инстантонами и имеют физические приложения (какие

? Туннелирование, $P \sim e^{-S_{inst}}$ и тд, РАЗВИТЬ). Чтобы интеграл (1) был конечным, естественно потребовать, чтобы F обнулялось на бесконечности. Это достигается, если A на бесконечности имеет вид "чистой калибровки"

$$A_\mu \sim g(x)^{-1}\partial_\mu g(x),\ g(x) \in SU(2) \tag{20}$$

Такое поведение A допускает продолежние на четырехмерную сферу. Вообще говоря, $g(x)$ определено лишь на "пространственной бесконечности то есть лишь на одном из полушарий S^4. Положив калибровочное поле нулем на другом полушарии, получим, подобно примеру с монополем Дирака, степень "нетривиальности"нашего расслоения задается степенью отображения переклейки на экваторе S^4:

$$g : S^3 \to SU(2). \tag{21}$$

У него есть гомотопический инвариант, который называется степенью:

$$k = \deg g = g_*(1), \tag{22}$$

Нетривиальное утверждение из дифференциальной геометрии состоит в том, что k является топологическим инвариантом многообразия (2-й класс Черна) c_2 и представляется в виде

$$8\pi^2 k = -\int Tr\Big(F \wedge F\Big) \tag{23}$$

В случае 4-мерного пространства и евклидовой метрики, оператор $\star$ удовлетворяет равенству $\star^2 = 1$, а значит имеет лишь два собственных значения - ± 1. 2-форма F распадается в прямую сумму "самодуальной"и "антисамодуальной"частей:

$$F = F^+ + F^-,\ \star F^\pm = \pm F^\pm \tag{24}$$

Подставим это разложение в (1):

$$S_{YM} = -\int Tr\Big((F^+ + F^-) \wedge (F^+ - F^-)\Big) = S^+ + S^- - \int Tr\Big(F^- \wedge F^+\Big) + \int Tr\Big(F^+ \wedge F^-\Big) = S^+ + S^- \tag{25}$$

Последние два слагаемых в сумме равны нулю, потому что 2-формы коммутируют. Аналогично показывается, что

$$S^+ - S^- = 8\pi^2 k \tag{26}$$

Тривиальным анализом получаем, что

$$S \geq 8\pi^2 |k| \tag{27}$$

и равенство достигается в случае, когда форма F удовлетворяет уравнению:

$$F = (sgn\ k) \star F \tag{28}$$

Уравнение (28) и есть уравнение самодуальности. В отличие от уравнения (19) оно уже первого порядка

3 Простейший инстантон

Для описания (анти)самодуальных решений в случае группы $SU(2)$ удобно использовать кватернионы. Алгебра кватернионов определяется образующими (1,i,j,k) с соотношениями

$$\begin{cases} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij = -ji = k, \\ jk = -kj = i, \\ ki = -ik = j \end{cases} \tag{29}$$

Кватернионы можно отождествить с алгеброй антиэрмитовых матриц $2x2$, а "чисто мнимые"кватернионы - с алгеброй $su(2)$. Будем параметризовывать пространственно-временную координату x^μ кватернионом:

$$x = x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k. \tag{30}$$

Можно ввести сопряженный кватернион:

$$\bar{x} = x_1 - x_2 i - x_3 j - x_4 k. \tag{31}$$

Можно построить калибровочное поле следующим образом:

$$A(x) = Im\Big(f(x)dx\Big),\ F = Im\Big(df \wedge dx + f dx \wedge f dx\Big) \tag{32}$$

Заметим, что форма

$$dx \wedge \bar{dx} = -2\Big(dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4\Big)i + \Big(dx_1 \wedge dx_3 + dx_2 \wedge dx_4\Big)j + \Big(dx_1 \wedge dx_4 + dx_2 \wedge dx_3\Big)k \qquad (33)$$

самодуальна, действительно, пользуясь свойством звездочки $\omega \wedge \star\omega = (\omega, \omega)Vol_g$, можно увидеть, что все слагаемые (33) самодуальны. Координаты этой формы - это хорошо известные символы Т'Хоофта:

$$\omega_{\mu\nu} = i\tau^a \eta_{a\mu\nu} = \sigma_\mu \sigma_\nu^\dagger - \sigma_\nu \sigma_\mu^\dagger \qquad (34)$$

Аналогично, форма $\bar{dx} \wedge dx$ антисамодуальна. Простейшее самодуальное решение имеет вид

$$F = \frac{dx \wedge \bar{dx}}{1+|x|^2} = dA + A \wedge A,\ A = Im\Big(\frac{\bar{x}dx}{1+|x|^2}\Big). \qquad (35)$$

На "бесконечной"S^3 $A = g^{-1}dg,\ g(x) = x,\ k = 1$. Это решение называется $BPST-$инстантон.

4 Конструкция самодуальных решений в случае $SU(2)$ для произвольного k

Хотя эта конструкция настолько проста, особенно в случае группы $SU(2)$, что ее можно реализовать с помощью обычных методов линейной алгебры, мы подойдем к ней с геометрической стороны. Мы будем рассматривать векторное расслоения E над физическим пространством (в нашем случае это S^4). Для простоты пусть оно вложено в тривиальное, то есть каждый слой $E_x \cong \mathbb{R}^k$ содержится в $\mathbb{R}^N$ большего размера. Нужно научиться ковариантно дифференцировать сечения этого расслоения $f(x)$. Для этого введем в каждом слое оператор P проекции на E_x и определим ковариантную производную

$$\nabla f = Pdf \qquad (36)$$

Фиксируя ортогональный базис в слое, то есть задавая отображение $u_x : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^N,\ u^\dagger u = I$, или, иначе говоря, сечение главного расслоения, мы получаем выражения для P:

$$P = uu^\dagger, \qquad (37)$$

а так же получаем локальные выражения для форм связности и кривизны, котоыре индуцируются ковариантной производной (36):

$$\nabla(f) = \nabla(ug) = uu^\dagger d(ug) = u\Big(dg + u^\dagger(du)g\Big), \qquad (38)$$

из чего находим

$$A = u^\dagger du. \qquad (39)$$

Это калибровочное поле A соответствует калибровочному полю, которое мы определяли формулой (10). Мы, однако, пока не будем вводить калибровку. Вместо этого рассмотрим оператор $Q = 1 - P$. Построим форму

$$B = QdQ, \qquad (40)$$

а так же ковариантную производную по ней:

$$\nabla_B = d + B \wedge . \qquad (41)$$

На сечениях нашего расслоения E, $\nabla_B = \nabla$:

$$\nabla_B f = df + QdQ \wedge f = df - Q^2 df = (1-Q^2)df = Pdf = \nabla f, \qquad (42)$$

в силу того, что $d(Qf) = 0$ Кроме того, в силу $Q^2 = Q$

$$QdQ + dQQ = dQ, \qquad (43)$$

из чего следует

$$B^2 = QdQ \wedge QdQ = Q\Big(dQ - QdQ\Big) \wedge dQ = QPdQ \wedge dQ = 0 \qquad (44)$$

$$F_B = dB = dQ \wedge dQ. \qquad (45)$$

Ограничивая эту форму на E, получаем кривизну, индуцированную ковариантной производной ∇:

$$F = PF_BP = PdQ \wedge dQP \qquad (46)$$

Расслоение E имеет ортогональным дополнением расслоение $E^{\perp}$, каждый слой которого - образ Q. Выберем калибровку $v(x) : R^{N-k} \to R^{N}$, такую, что $v = w\rho$ - ее полярное разложение, $\rho^2 = v^{\dagger}v$, $Q = ww^{\dagger} = v\rho^{-2}v^{\dagger}$. Подставляя это выражение в формулу (46), получаем

$$F = Pdv \wedge \rho^{-2}dv^{\dagger}P \tag{47}$$

Все предыдущие формулы остаются верными, если x - это кватернион. Подставим анзац для $v(x)$ следующего вида:

$$v(x) = Cx + D, \tag{48}$$

- матрица размера $(k+1) \times k$, имеющая максимальный ранг. В этом случае форма F равна

$$F = PCdx \wedge \rho^{-2}d\bar{x}C^{\dagger}P. \tag{49}$$

Отсюда сразу видно, что для самодуальности F необходимо потребовать вещественности (то есть коммутации с кватернионами) матрицы $\rho^2 = v^{\dagger}v = \Big(\bar{x}C^{\dagger} + D^{\dagger}\Big)\Big(Cx + D\Big)$. Мы получили самый общий анзац для самодуального решения для группы $SU(2)$ (примерно теми же способами происходящее обобщается на другие группы). Осталось объяснить, почему топологический инвариант k для такой связности будет равен именно k. Этот инвариант является аддитивным для прямой суммы расслоений, поэтому эквивалентно показать, что для $E^{\perp}$ он равен $-k$. Это достаточно очевидно, столбцы $v(x)$ задают разложение $E^{\perp}$ в прямую сумму одномерных расслоений над $S^4 = \mathbb{H}P^1$, для каждого из которых $k = -1$.