Суперсимметричные сигма-модели

18 марта 2025 г.

1 $N = 2$ Суперсимметричные сигма-модели

1.1 Комплекс де-Рама, спиновая связность

Пусть M - $D-$мерное риманово многообразие, оснащенное связностью Леви-Чивиты. В каждой точке M можно задать ортонормированый базис e_A. Условие ортнормированности

$$g(e_A, e_B) = \delta_{AB}. \tag{1}$$

Иными словами, e_A является сечением $O(D)$-расслоения, образованного множеством ортонормированных базисов в каждой точке на M. Определим на этом расслоении связность:

$$\omega_{AB,M} = e_{AN}\Big(\partial_M e_B^N + \Gamma^N_{MP} e_B\Big). \tag{2}$$

На M можно ввести операцию "Звездочка Ходжа":

$$\begin{aligned} &\star : \Omega^p(M) \to \Omega^{d-p}(M), \\ &\star\,\omega = \frac{1}{(d-p)!}\sqrt{g}\epsilon^{i_1\dots i_p}_{i_{p+1}\dots i_d}\omega_{i_1\dots i_p} dx^{i_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{i_d}. \end{aligned} \tag{3}$$

На множестве дифференциальных форм на M можно ввести скалярное произведение:

$$(\alpha,\beta) = \int_M \alpha \wedge \star\beta = p! \int_M \sqrt{g}\; dx\; \alpha_{i_1\dots i_p}\overline{\beta^{i_1\dots i_p}}, \tag{4}$$

которое превращает это множество в гильбертово пространство, которое называется комплексом де-Рама. Заметим что определение (4) имеет смысл только для форм одной степени. Для форм разной степени положим его равным нулю. На комплексе де-Рама действует оператор де-Рама d, сопряженный к нему оператор $d^\dagger$ и оператор Лапласа-Бельтрами $\Delta = -(dd^\dagger + d^\dagger d)$.
$p-$ми когомологиями де-Рама на M называется фактор-пространство:

$$H^p_{DR} = Ker\; d^p / Im\; d^{p-1}, \tag{5}$$

где $d^p : \Omega^p(M) \to \Omega^{p-1}(M)$ - оператор де-Рама. Числами Бетти M называются $b^p = dim\; H^p_{DR}$. Заметим, что форма ω гармонична тогда и только тогда, когда $d\omega = 0$ и $d^\dagger\omega = 0$, откуда сразу же следует, что размерность пространства гармонических форм степени p равна b^p. В последнем можно убедиться, проведя простую выкладку:

$$(\omega, \Delta\omega) = (\omega, (d^\dagger d + dd^\dagger)\omega) = (d\omega, d\omega) + (d^\dagger\omega, d^\dagger\omega) \geq 0. \tag{6}$$

Наша цель - установить некоторые геометрические свойства M, изучая суперсимметричные квантово-механические системы на M. Рассматривая суперсимметричную сигма-модель с $N = 2$ суперзарядами, мы установим однозначное соответствие между действием операторов де-Рама d и сопряженного к нему $d^\dagger$ на формы в комплексе де-Рама и действиями суперзарядов на гильбертовом пространстве волновых функций квантово-механической системы.

1.1.1 Построение лагранжиана

Мы стартуем с общего лагранжиана для сигма-модели

$$L = \frac{1}{2} g_{MN}\dot{x}^M\dot{x}^N. \tag{7}$$

Сделаем этот лагранжиан суперсимметричным, добавив D "вещественных"суперполей:

$$X^M = x^M + \theta\psi^M + \bar{\psi}^M\bar{\theta} + \theta\bar{\theta}F^M, \tag{8}$$

и заменив производные по t на "ковариантные":

$$\begin{cases} D = \frac{\partial}{\partial\theta} - i\bar\theta\frac{\partial}{\partial t} \\ \bar D = -\frac{\partial}{\partial\bar\theta} + i\theta\frac{\partial}{\partial t} \end{cases} \tag{9}$$

Вот итоговое действие для сигма-модели:

$$S = \frac{1}{2}\int\ dt\ d\bar\theta\ d\theta g_{MN}\bar D X^M D X^N \tag{10}$$

Напишем каждую составную действия в компонетнах:

$$\bar D X^M = \bar\psi^M + \theta F^M + i\theta\dot x^M - i\theta\bar\theta\dot{\bar\psi}^M, \tag{11}$$

$$D X^N = \psi^N + \bar\theta F^N - i\bar\theta\dot x^N + i\theta\bar\theta\dot\psi^N \tag{12}$$

$$g_{MN}(X) = g_{MN}(x) + \theta\partial_P g_{MN}(x)\psi^P - \bar\theta\partial_P g_{MN}\bar\psi^P + \theta\bar\theta\Big(\partial_P g_{MN}(x)F^P + \frac{1}{2}\partial_{QP}g_{MN}(\psi^Q\bar\psi^P - \bar\psi^Q\psi^P)\Big). \tag{13}$$

Выделяем члены старшие по супервременам члены произведения:

$$\begin{aligned} L = \frac{1}{2}\Big(g_{MN}(x)\dot x^M\dot x^N + i\bar\psi^M(g_{MN}\dot\psi^N + \partial_P g_{MN}\dot x^N\psi^P) - i(g_{MN}\dot{\bar\psi}^M + \partial_P g_{MN}\dot x^M\bar\psi^P)\psi^N\Big) + \\ + \frac{1}{2}g_{MN}F^M F^N + \frac{1}{2}\partial_P g_{MN}\Big(\psi^P\bar\psi^M F^N - \bar\psi^P\psi^N F^M + \bar\psi^M\psi^N F^P\Big) + \frac{1}{2}(\partial_{QP}g_{MN})\bar\psi^P\bar\psi^M\psi^Q\psi^N \end{aligned} \tag{14}$$

Полученное можно преобразовать еще, используя свертку с антисимметричными комбинациями ψ.

$$L = \frac{1}{2}g_{MN}(x)\Big(\dot x^M\dot x^N + F^M F^N + i(\bar\psi^M\nabla\psi^N - \nabla\bar\psi^M\psi^N\Big) + \Gamma_{M,PQ}F^M\psi^P\bar\psi^Q + \frac{1}{2}(\partial_{PQ}g_{MN})\bar\psi^P\bar\psi^M\psi^Q\psi^N, \tag{15}$$

где

$$\nabla\psi^N = \dot\psi^N + \Gamma^M_{PS}\dot x^P\psi^S, \tag{16}$$

Заметим так же, что по полю F^M нет динамики (следствие того, что оно старшее в разложении суперполя X). Поэтому можно дополнительно написать связь:

$$\frac{\partial L}{\partial F^M} = 0, \tag{17}$$

откуда сразу же видно, что

$$F^M = -\Gamma^M_{PQ}\psi^P\bar\psi^Q. \tag{18}$$

Подсвтавив это условие в лагранжиан, получим формулу:

$$L = \frac{1}{2}\Big(\dot x^M\dot x^N + i(\bar\psi^M\nabla\psi^N - \nabla\bar\psi^M\psi^N\Big) - \frac{1}{4}R_{PQMN}\bar\psi^P\bar\psi^M\psi^Q\psi^N, \tag{19}$$

, содержащую тензор Римана:

$$R_{PMQN} = g_{PL}R^L_{QMN} = g_{PL}\Big(\partial_M\Gamma^L_{QN} - \partial_N\Gamma^L_{QM}\Big) + \Gamma_{PMR}\Gamma^R_{QN} - \Gamma_{PQR}\Gamma^R_{MN} \tag{20}$$

Для квантования системы нам придется перейти к гамильтоновой картине, для этого вычислим сначала канонический импуль:

$$\Pi_M = \frac{\partial L}{\partial\dot x^M} = \dot x^M + \frac{i}{2}\Big(\partial_P g_{MN} - \partial_N g_{MP}\Big)\psi^N\bar\psi^P \tag{21}$$

Преобразования суперсимметрии

$$\begin{cases} \theta\mapsto\theta+\epsilon, \\ \bar\theta\mapsto\bar\theta+\bar\epsilon, \\ t\mapsto t + i(\epsilon\bar\theta - \theta\bar\epsilon). \end{cases} \tag{22}$$

Индуцируют вариации полей (с учетом (13):

$$\begin{cases} \delta x^M = \epsilon\psi^M - \bar\theta\bar\psi^M, \\ \delta\psi^M = \bar\epsilon\Big(F^M - i\dot x^M\Big), \\ \delta\bar\psi^M = \epsilon\Big(i\dot x^M - \Gamma^M_{PQ}\psi^P\bar\psi^Q\Big). \end{cases} \tag{23}$$

Из тоеремы Нётер для преобразований суперсиммтерии получаются классические суперзаряыды.

$$\begin{cases} Q = \frac{1}{\sqrt2}\psi^M\Big(\Pi_M - \frac{i}{2}\partial_M g_{NP}\psi^N\bar\psi^P\Big) \\ \bar Q = \frac{1}{\sqrt2}\bar\psi^M\Big(\Pi_M + \frac{i}{2}\partial_M g_{NP}\psi^N\bar\psi^P\Big) \end{cases} \tag{24}$$

Мы сделаем вывод в обратном пордяке: проверим, что скобки Пуассона Q и $\bar Q$ с динамическими переменными действиетельно соответствуют (18) на одном примере:

$$\{\bar Q, \psi_M\} = \frac{\partial\bar Q}{\partial\bar\psi^M} = \Pi_M + \frac{i}{2}\partial_M g_{NP}\psi^N\bar\psi - \bar\psi^A\frac{\partial\Pi_A}{\partial\bar\psi^M} + \frac{i}{2}\bar\psi^A\partial_A g_{MN}\psi^N = \dot x_M + i\Gamma_{MPQ}\psi^P\bar\psi^Q \tag{25}$$

1.1.2 Квантование

Теперь нужно как-то проквантовать эту систему. Напомним, для гамильтоновых систем с грассмановыми переменными скобка Пуассона определяется так:

$$\{f,g\} = \left(\frac{\partial f}{\partial P_j}\frac{\partial g}{\partial Q_j} - \frac{\partial f}{\partial Q_j}\frac{\partial g}{\partial P_j} - i\Big(\frac{\partial f}{\partial \psi_\alpha}\frac{\partial g}{\partial \bar{\psi}_\alpha} + \frac{\partial f}{\partial \bar{\psi}_\alpha}\frac{\partial g}{\partial \psi_\alpha}\Big)\right). \tag{26}$$

В таких координатах квантовать данную систему каноническим образом неудобно, поскольку переменные ψ^M и $\bar{\psi}^M$ не являются канонически сопряженными, их скобка Пуассона равна

$$\{\psi^N, \bar{\psi}^M\} = -ig^{MN}, \tag{27}$$

из-за чего не получится сопоставить наблюдаемым операторы обычным образом. Улучшить ситуацию можно, введя новые переменные

$$\psi^M = \psi_C e^M_C \,(\text{добавить, что такое } e^m_c). \tag{28}$$

Сопряженные импульсы P_M получаются вариацией лагранжиана по $\dot{x}^M$ при фиксированных тетрадных компонентах ψ_C. Отличие в том, что $\dot{\psi}^M = \frac{d}{dt}(\psi_C e^M_C)$ начинает зависеть от $\dot{x}^M$.

$$P_M = \Pi_M + \frac{\partial \dot{\psi}^N}{\partial \dot{x}^M}\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}^M} + \frac{\partial \dot{\psi}^N}{\partial \dot{x}^M}\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{\psi}}^M} = \Pi_M + \frac{i}{2}\Big((\partial_M e^B_N)e_{AN} - (\partial_M e^N_A)e_{BN}\Big)\psi_A\bar{\psi}_B. \tag{29}$$

В новом базисе ненулевые скобки Пуассона имеют вид:

$$\{P_M, x^M\} = \delta^M_N, \;\; \{\psi_A, \bar{\psi}_B\} = i\delta_{AB}. \tag{30}$$

Суперзаряды в новых координатах равны:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_C e^M_C \Big(P_M - i\omega_{AB,M}\psi_A\bar{\psi}_B\Big), \\ \bar{Q} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{\psi}_C e^M_C \Big(P_M - i\omega_{AB,M}\psi_A\bar{\psi}_B\Big). \end{aligned} \tag{31}$$

Наконец, проделаем процедуру квантования, заменяя классические переменные на операторы:

$$\begin{cases} \hat{P}_M = -i\partial_M \\ \hat{\bar{\psi}}_A = \frac{\partial}{\partial \psi_A} \end{cases} \tag{32}$$

В качестве упорядочивания используем нормальное. При нем:

$$\begin{aligned} &e^M_C P_M \mapsto e^M_C \hat{P}_M \\ &\psi_C\psi_A\bar{\psi}_B \mapsto \psi_C\psi_A\frac{\partial}{\partial \psi_B} \end{aligned} \tag{33}$$

Получатся суперзаряды:

$$\begin{cases} \hat{Q} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\psi^M \Big(\frac{\partial}{\partial x^M} + \omega_{AB,M}\psi_A\frac{\partial}{\partial \psi_B}\Big) \\ \hat{\bar{Q}} = -\frac{i}{\sqrt{2}}e^M_C \frac{\partial}{\partial \psi_C}\Big(\frac{\partial}{\partial x^M} + \omega_{AB,M}\psi_A\frac{\partial}{\partial \psi_B}\Big) \end{cases} \tag{34}$$

действующие на гильбертовом пространстве волновых функций вида:

$$\Psi(x^M, \psi_A) = A_{M_1\ldots M_p}(x)\psi^{M_1}\ldots\psi^{M_p}, \tag{35}$$

с антисимметричными $A_{M_1\ldots M_P}$. Скалярное произведение на этом гильбертовом пространстве задается мерой:

$$d\mu = \prod_{I=1}^{D} dx^I \sqrt{g}\prod_{A=1} d\psi_A d\bar{\psi}_A e^{-\psi_A\bar{\psi}_A} \tag{36}$$

Убедимся, что произведение состояний с разными фермионными зарядами равно нулю. Пусть

$$\begin{aligned} &\Psi_1 = A_{M_1\ldots M_p}(x)\psi^{M_1}\ldots\psi^{M_p}, \\ &\Psi_2 = B_{N_1\ldots N_q}(x)\psi^{N_1}\ldots\psi^{N_q}, \\ &\langle\Psi_1|\Psi_2\rangle = \int_M \sqrt{g}A_{M_1\ldots M_p}(x)\overline{B_{N_1\ldots N_q}(x)}\int d\psi_A\, d\bar{\psi}_A e^{-\psi_A\bar{\psi}_A}\psi_{M_1}\ldots\psi_{M_p}\bar{\psi}_{N_1}\ldots\bar{\psi}_{N_q}. \end{aligned} \tag{37}$$

Сделав преобразование $\psi_A \mapsto e^{i\alpha}\psi_A$, получим

$$\langle \Psi_1|\Psi_2\rangle = e^{i\alpha(p-q)}\langle \Psi_1|\Psi_2\rangle , \tag{38}$$

откуда следует, что $\langle \Psi_1|\Psi_2\rangle \neq 0$ только при $p = q$. Для состояний с одинаковым фермионным числом скалярное произведение вычисляется с помощью теоремы Вика (ДОРАЗОБРАТЬСЯ) и равно

$$\langle \Psi_1|\Psi_2\rangle = p! \int_M \sqrt{g} F_{A_1\dots A_p}(x)\overline{G^{A_1\dots A_p}} \tag{39}$$

Найдем, как действует суперзаряд $\hat{Q}$ на состояния. Пусть

$$\Psi_p = A_{M_1\dots M_p}(x)\psi^{M_1}\dots\psi^{M_p},\ \psi^M = e^M_A\psi_A. \tag{40}$$

$$\hat{Q}\Psi = -\frac{i}{\sqrt{2}}\Big((\partial_M A_{M_1\dots M_p})\psi^M\psi^{M_1}\dots\psi^{M_p} + pA_{M_1\dots M_p}e_{AN}\Big((\partial_M e^{M_1}_A) + \omega_{AB,M}e^{M_1}_B\Big)\psi^M\psi^N\psi^{M_2}\dots\psi^{M_p} \tag{41}$$

Пользуясь формулой (2) для спиновой связности, часть последнего слагаемого можно привести к виду:

$$\Gamma^{M_1}_{MN}\psi^M\psi^N. \tag{42}$$

В итоге:

$$\hat{Q}\Psi = -\frac{i}{\sqrt{2}}(\partial_M A_{M_1\dots M_p})\psi^M\psi^{M_1}\dots\psi^{M_p} \tag{43}$$

Это выражение совпадает с выражением для действия оператора де-Рама на формы степени p $\omega = \omega_{i_1\dots i_p}dx^{i_1}\wedge \dots \wedge dx^{i_p}$ из комплекса де-Рама на M:

$$d\omega = \partial_m\omega_{i_1\dots i_p}dx^m \wedge dx^{i_1}\wedge\dots\wedge dx^{i_p} \tag{44}$$

В свою очередь комплекс де-Рама является гильбертовым пространством, со скалярным произведением, определенным для форм одной степени (для форм разных степеней доопределим его нулем):

$$(\omega, \beta) = \int_M \omega\wedge\star\beta = \int \alpha_{i_1\dots i_p}\beta^{i_1..i_p}\sqrt{g}\prod_{I=1}^{M}dx^I \tag{45}$$

Т.к оператор $d^\dagger$ сопряжен к d относительно меры (14), т.е для любых форм ω, β справедливо

$$(\omega, d\beta) = (d^\dagger\omega, \beta), \tag{46}$$

суперзаряд $\hat{Q}^\dagger$, сопряженный $\hat{Q}$ изоморфен $d^\dagger$.

1.1.3 Результаты

Полученная связь, а так же знания о суперсимметричных квантовых системах позволяют достаточно просто получить ряд результатов:
1) Произвольная дифференциальная форма ω представляется в виде:

$$\omega = d\beta + d^\dagger\alpha + h, \tag{47}$$

где h - гармоническая форма, то есть $(dd^\dagger + d^\dagger d)h = 0$. Заметим, что в суперсимметричном подходе антикоммутатору $\{d,d^\dagger\}$ соответствует гамильтониан, поэтому гармонической форме соответствуетт вакуумное состояние с нулевой энергией, а точной и ко-точной формам β и α соответствуют состояния фермионного и бозонного секторов. Более того, число вакуумов с фермионным числом p соотве
2) Эйлерова характеристика M равна индексу Виттена для системы, которую мы построили. Действительно, замкнутые, но не точные формы степени p соответствуют вакуумным состояниям и фермионной четностью p, поэтому размерность H^p_{DR} равна числу таких состояний. Четность p отвечает фермионному заряду, то есть принадлежности фермионному или бозонному сектору. Отсюда следует, что формула Эйлеровой характеристики $\chi(M) = \sum_p(-1)^p\, b_p(M)$ совпадает с формулой для индекса Виттена $I_W = n_B - n_F$.
3) Формула Гаусса-Бонне для произвольной размерности

1.2 Комплекс Дольбо

Пусть теперь M - это $D = 2d-$мерное эрмитово многообразие, на котором задана эрмитова метрика

$$g = h_{m\bar{n}} dz^m \otimes d\bar{z}^{\bar{n}} + h_{\bar{m}n} dz^{\bar{m}} \otimes dz^n, \tag{48}$$

$h_{m\bar{n}} = \overline{h_{\bar{m}n}}$ - эрмитова матрица. Помимо метрики M опять оснащено связностью Леви-Чивиты и спиновой связностью с таким же условием, как и в случае вещественного M. Дифференциальные формы теперь индексируются двумя числами (p,q):

$$\omega_{p,q} = \omega_{i_1,..i_p,j_1,...j_q} dz^{i_1} \wedge ... \wedge dz^{i_p} \wedge dz^{j_q} \wedge ... \wedge dz^{j_q}. \tag{49}$$

Звездочка Ходжа определяется похожим образом:

$$\star\omega_{p,q} = \det h \frac{1}{(d-p)!(d-q)!} \varepsilon^{m_1...m_p}_{m_p+1...m_d} \varepsilon^{n_1...n_q}_{\bar{n}_{q+1}...\bar{n}_d} \overline{\alpha_{m_1...m_p n_1...n_q}} dz^{m_{p+1}} \wedge ... \wedge dz^{m_d} \wedge d\bar{z}^{\bar{n}_{q+1}} \wedge ... \wedge d\bar{z}^{\bar{n_d}}. \tag{50}$$

Скалярное произведение форм определяется аналогично:

$$(\alpha_{p,q}, \beta_{p,q}) = \int_M \alpha_{p,q} \wedge \star\beta_{p,q} = p!q! \int_M deth\ dzd\bar{z}\ \alpha_{r_1...r_p\bar{s}_1...\bar{s_q}} \overline{\beta^{r_1...r_p\bar{s}_1...\bar{s}_q}} \tag{51}$$

На множестве форм типа (p,0) действуют операторы ∂ и сопряженный к нему $\partial^\dagger$. Антикоммутатор $\{\partial,\partial^\dagger\} = \Delta$ называется лапласианом Дольбо. Множество форм типа (p,0) называется комплексом Дольбо. Аналогично, на множестве форм степени (0,q), называемом комплексом Анти-Дольбо действуют операторы $\bar{\partial}$ и $\bar{\partial}^\dagger$. Заметим, что $\partial + \bar{\partial} = d$, $\partial^\dagger + \bar{\partial}^\dagger = d^\dagger$.

1.2.1 Построение Лагранжиана

Построим сигма-модель из d голоморфных и d антиголоморфных суперполей:

$$\begin{cases} Z^m = z^m + \sqrt{2}\theta\psi^m - i\theta\bar{\theta}\dot{z}^m \\ \bar{Z}^m = \bar{z}^m + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}^m + i\theta\bar{\theta}\dot{\bar{z}}^m \end{cases} \tag{52}$$

инвариантную относительно соответствующих преобразований суперсимметрии. Лагранжиан такой теории:

$$L = \frac{1}{4} \int\ d\bar{\theta}d\theta h_{m\bar{n}}(\bar{Z}, Z)\bar{D}\bar{Z}^n DZ^m \tag{53}$$

1.2.2 Квантование

Теперь стоит проделать те же самые действия:
1) Получить классические суперзаряды из Теоремы Нётер
2) Перейти к новым переменным $\{p_c, p_{\bar{c}}\}$ и $\{\psi^c, \bar{\psi}^{\bar{c}}\}$, заменив базис в касательном пространстве.
Опуская вычисления на шагах 1-2, напишем сразу ответ для классических суперзаряды, выраженных через импульсы, полученые вариацией при постоянном ψ^c:

$$\begin{aligned} Q &= e^m_c \psi^c \Big(p_m - i\omega_{a\bar{b},m}\psi^a\bar{\psi}^{\bar{b}}\Big), \\ \bar{Q} &= e^{\bar{m}}_c \psi^c \Big(p_{\bar{m}} - i\omega_{a\bar{b},\bar{c}}\psi^c \bar{\psi}\bar{b}\Big). \end{aligned} \tag{54}$$

3) При каноническом квантовании с нормальным упорядочиванием получим квантовые суперзаряды:

$$\begin{cases} \hat{Q} = -ie^m_c\psi^c\Big(\partial_m + \omega_{a\bar{b},m}\psi^a\frac{\partial}{\partial\psi^{\bar{b}}}\Big) \\ \hat{Q}^\dagger = ie^{\bar{m}}_{\bar{c}}\frac{\partial}{\partial\psi^{\bar{c}}}\Big(\partial_{\bar{m}} + \frac{1}{2}\ln(\det h) + \omega_{a\bar{b},\bar{m}}\psi^a\frac{\partial}{\partial\psi^b}\Big) \end{cases} \tag{55}$$

Второй суперзаряд получается эрмитовым сопряжением $\hat{Q}$.

1.2.3 Результаты

Аналогичным рассмотрением можно получить вид действия $\hat{Q}$ на "голоморфную"волновую функцию с фермионным зарядом p:

$$\hat{Q}A_{m_1...m_p}(z,\bar{z})\psi^{m_1}...\psi^{m_p} = -i\partial_m A_{m_1...m_p}\psi^m\psi^{m_1}...\psi^{m_p} \tag{56}$$

Это в точности совпадает с действием оператора ∂ на голоморфные формы комплекса Дольбо, если отождествить ψ^k с dz^k. Наша квантово-механическая система двойственна следующему комплексу дифференциальных форм на M:

$$\Omega^{(0,0)} \to \Omega^{(0,1)} \to \Omega^{(0,2)} \to ... \tag{57}$$

Когомологии этого комплекса находятся в соответствии с вакуумами нашей системы. Сопряженный оператор $\partial^\dagger$ двойственен сопряженному оператору $\hat{Q}^\dagger$. Точно так же можно получить результат о том, что когомологии Дольбо

2 $N = 4$ суперсимметричные модели

2.1 Кэлеровы многообразия

Пусть M - эрмитово многообразие с эрмитовой метрикой g. Кэлеровой формой метрики g называется 2-форма, определяемая следующим образом:

$$\Omega = g(J\_, \_), \tag{58}$$

где J - почти комплексная структура на M. M называется кэлеровым, если $d\Omega = 0$. Отметим важные свойства кэлеровых многообразий, которые пригодятся нам:
1) Эрмитова матрица из определения (17) удовлетворяет:

$$\partial_n h_{m\bar{p}} - \partial_m hn\bar{p} = 0 \tag{59}$$

2) Локально (в окрестности любой точки может быть построена соответствующая карта) h может быть выражена в виде:

$$h_{m\bar{n}} = \partial_m \partial_{\bar{n}} K(z, \bar{z}), \tag{60}$$

K называется кэлеровым потенциалом.
3) Необходимое и достаточное условие кэлеровости M - для связности Леви-Чивиты почти комплексная структура сохраняется:

$$\nabla_P J = 0 \tag{61}$$

4) Единственные символы Кристоффеля, отличные от нуля равны

$$\Gamma^p_{mn} = h^{\bar{q}p} \partial_m h_{n\bar{q}}, \;\; \Gamma^{\bar{p}}_{\bar{m}\bar{n}} = h^{\bar{p}q} \partial_{\bar{m}} h_{q\bar{n}} \tag{62}$$

Мы потребуем, чтобы сигма-модель из раздела 1.1.1 на четно-мерном вещественном многообразии M была инвариантна относительно преобразований, удовлетворяющих алгебре расширенной суперсимметрии $N = 4$ и докажем, что для этого необходимо и достаточно, чтобы M было кэлеровым. Это позволит доказать интересное утверждение о кэлеровых многообразиях:
1) Для кэлеровых многообразиях лапласианы Дольбо и анти-Дольбо совпадают:

$$\{\partial, \partial^\dagger\} = \{\bar{\partial}, \bar{\partial}^\dagger\} \tag{63}$$

2) $\{\partial, \bar{\partial}^\dagger\} = \{\partial^\dagger, \bar{\partial}\} = 0$

2.2

Рассмотрим суперсимметричную сигма модель, построенную из $2d$ вещественных суперполей (3):

$$S = \frac{1}{2} \int \; dt \; d\bar{\theta} \; d\theta g_{MN} \bar{D} X^M D X^N \tag{64}$$

Чтобы получить 4 суперзаряда вместо двух, потребуем инвариантности действия относительно дополнительных преобразований (?):

$$\delta X^M = I^M_N(X) \Big(\epsilon D X^N - \bar{\epsilon} \bar{D} X^N \Big) \tag{65}$$

Можно доказать следующее утверждение:
Действие (32) инвариантно относительно (33) тогда и только тогда, когда I^N_M - интегрируемая почти комплексная структура и $\nabla_P I = 0$, то есть M - комплексное многообразие, которое к тому же и кэлерово. Свойства $I^2 = -id$ и интегрируемости (эквивалентно равенствую нулю тензора Нейенхейса, выражение для которого опустим, это отдельная история) необходимо и достаточно для того, чтобы преобразования образовывали алгебру, а ковариантное постоянство I равносильно инвариантности действия.
Таким образом, в случая кэлерова M получаются 4 суперзаряда, которые квантуются уже хорошо известным образом. Опустим все промежуточные формулы и сразу напишем ответ:

$$\begin{cases} \hat{Q}_0 = -\frac{i}{\sqrt{2}} \Big(\psi^m D_m + \psi^{\bar{m}} D_{\bar{m}} \Big) \\ \hat{Q}^\dagger_0 = -\frac{i}{\sqrt{2}} \Big(e^m_{\bar{c}} \frac{\partial}{\partial \psi^{\bar{c}}} D_m + e^{\bar{m}}_{\bar{c}} \frac{\partial}{\partial \psi^{\bar{c}}} D_{\bar{m}} \Big) \\ \hat{Q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(\psi^{\bar{m}} D_{\bar{m}} - \psi^m D_m \Big) \\ \hat{Q}^\dagger_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Big(e^{\bar{m}}_c \frac{\partial}{\partial \psi^c} D_{\bar{m}} - e^m_c \frac{\partial}{\partial \psi^c} D_m \Big), \end{cases} \tag{66}$$

где $D_m = \partial_m + \omega_{a\bar{b}} \psi^a \frac{\partial}{\partial \psi^b}$. Далее можно доказать ключевое утверждение о том, что действие оператора $\psi^m D_m$ на волновые функции $\Psi(z, \bar{z}, \psi)$ двойственно действию оператора ∂ на формы в комплексе Кэлера-де-Рама, пользуясь свойством 4 для Кэлеровых многообразий. Аналогично, действие оператора $\psi^{\bar{m}}$ двойственно действию оператора $\bar{\partial}$. Получается, что $\hat{Q}_0$ двойственен $\partial + \bar{\partial}$, а $\hat{Q}_1$ двойственен $\bar{\partial} - \partial$. По построению, суперзаряды, а значит и операторы, двойственные им на комплексе Кэлера-де-Рама удовлетворяют алгебре $N = 4$ суперсимметрии:

$$\begin{cases} \{\hat{Q}_i, \hat{Q}_j\} = \{\hat{Q}_i^\dagger, \hat{Q}_j^\dagger\} = 0 \\ \{\hat{Q}_i, \hat{Q}_j^\dagger\} = \delta_{ij}\hat{H} \end{cases} \tag{67}$$

откуда следует анонсированная ранее теорема.

2.3 Разложение Лефшеца и R-симметрия