Суперполя

18 марта 2025 г.

Формализм суперполей и суперпространств позволяет записывать лагранжианы, инвариантные относительно действия группы преобразований суперсимметрии, "перемещивающей"обыкновенные переменные с грассмановыми. Нетеровские интегралы движения, соответствующие преобразованиям суперсимметрии равны классическим суперзарядам.

1 $N = 1$ суперпространство

Начнем с простейшего случая, рассмотрение которого хоть и не приводит к интересным системам, но полезно для дальнейшего понимания. В $N = 1$ суперпространстве помимо вещественного времени t присутствует вещественное грассманово-нечетное время $\theta = \bar{\theta}$. Преобразования суперсимметрии имеют вид:

$$\begin{cases} \theta \mapsto \theta + \epsilon \\ t \mapsto t + i\epsilon\theta, \end{cases} \tag{1}$$

где ϵ - это вещественный грассманово-нечетный (являющийся линейной комбинацией полиномов нечетной степени от образующих алгебры Грассмана) параметр. Совместно с преобразованиями трансляции сдвига по времени на вещественный грассманово-четный параметр α, преобразования (1) образуют супергруппу с правилом умножения:

$$g(\alpha_1, \epsilon_1)g(\alpha_2, \epsilon_2) = g(\alpha_1 + \alpha_2 + i\epsilon_1\epsilon_2, \epsilon_1 + \epsilon_2) \tag{2}$$

Важно, что параметры "перемешивания" ϵ всегда антикоммутируют между собой, а параметры временного сдвига коммутируют со всем. Легко написать вид генераторов суперменее. Генератор временного сдвига равен:

$$\hat{H} = -i\frac{\partial}{\partial t} \tag{3}$$

Генератор суперпреобразования равен:

$$\hat{Q} = -i\Big(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta\frac{\partial}{\partial t}\Big) \tag{4}$$

Отсюда сразу же видно, что $\hat{Q}^2 = \hat{H}$, то есть мы получили алгебру, которая действительно соответствует суперсимметричным квантовомеханическим системам. Теперь определим динамические переменные в суперпространстве. $N = 1$ суперполем называется функция

$$X(t, \theta) = x(t) + i\theta\Psi(t), \tag{5}$$

где $x(t)$ - вещественная переменная, $\Psi(t)$ - грассманово-нечетная динамическая переменная. Под действием (1) суперполе преобразуется так:

$$\delta X = i\epsilon\hat{Q}X = \epsilon\Big(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\theta\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Big(x + i\theta\Psi\Big) = +i\epsilon\Psi - i\theta\epsilon\dot{x} \tag{6}$$

Суперполе X приводимо. Можно наложить связь, например, потребовав $\bar{X} = X$ (вещественное суперполе). Эта связь согласована с преобразованием (6). Действительно, в силу грассмановой нечетности θ и Ψ δX остается вещественным. Последнее, что нам понадобится - это ввести суперсимметричную ковариантную производную:

$$D = \frac{\partial}{\partial\theta} - i\theta\frac{\partial}{\partial t}, \tag{7}$$

смысле которой в том, что дейсвтие iD на вещественное суперполе X тоже является вещественным суперполем, преобразующимся так же, как и X под действием (1):

$$iDX = i\Big(\frac{\partial}{\partial\theta} - i\theta\frac{\partial}{\partial t}\Big)\Big(x + i\theta\Psi\Big) = -\Psi + \theta\dot{x}. \tag{8}$$

Кроме того, $D^2 = -i\frac{\partial}{\partial t}$, поэтому временная производня суперполя - тоже суперполе. Суперсимметричное действие при $N = 1$ имеет вид:

$$S = \int d\theta dt\ F(X_M, \dot{X}_M, DX_M). \tag{9}$$

Оно, очевидно, инвариантно относительно суперсимметричных преобразований. Простейший пример -

$$S = \frac{i}{2}\int d\theta dt\, \dot{X} D X, \tag{10}$$

приводящий к лагранжиану для свободной частицы.

2 $N = 2$ суперпространство

Теперь супервремя θ будет комплексным, а суперпреобразования будут выглядеть так:

$$\begin{cases} \theta \mapsto \theta + \epsilon \\ \bar{\theta} \mapsto \bar{\theta} + \bar{\epsilon} \\ t \mapsto t + i(\epsilon\bar{\theta} - \theta\bar{\epsilon}) \end{cases} \tag{11}$$

Генераторы супералгебры:

$$\begin{cases} \hat{Q} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial t}\right), \\ \hat{\bar{Q}} = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + i\theta\frac{\partial}{\partial t}\right) \\ \hat{H} = -i\frac{\partial}{\partial t}, \end{cases} \tag{12}$$

удовлетворяют известной для суперсимметричных квантовых систем алгебре:

$$\begin{cases} \{\hat{Q}, \hat{\bar{Q}}\} = \hat{H} \\ \hat{Q}^2 = \hat{\bar{Q}}^2 = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Введем так же ковариантные производные:

$$\begin{cases} D = \frac{\partial}{\partial\theta} - i\bar{\theta}\frac{\partial}{\partial t}, \\ \bar{D} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}} + i\theta\frac{\partial}{\partial t}. \end{cases} \tag{14}$$

Для них верны свойства:

$$\begin{cases} D^2 = \bar{D}^2 = 0, \\ \{D, \bar{D}\} = -\hat{H}, \\ \{D, \hat{Q}\} = \{D, \hat{\bar{Q}}\} = 0, \\ \{\bar{D}, \hat{Q}\} = \{\bar{D}, \hat{\bar{Q}}\} = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Суперполе $N = 2$ в общем случае имеет вид:

$$Z = z + \chi\theta + \psi\bar{\theta} + \theta\bar{\theta}F, \tag{16}$$

z и F - комплексные, а ψ и χ - комплексные фермионные компоненты. Вообще, любое суперполе всегда включает в себя одинаковое число грассманово-четных и грассманово-нечетных компонент. Суперпреобразование $N = 2$ суперполей имеет вид:

$$\delta Z = i\sqrt{2}(\epsilon\hat{Q} + \bar{\epsilon}\hat{\bar{Q}})Z. \tag{17}$$

Зададимся целью сделать суперполе $N = 2$ неприводимым. Во-первых, сделав его вещественным, т.е потребовав $Z = \bar{Z}$, можно привести его к неприводимому виду (1,2,1):

$$Z = x + \theta\psi + \bar{\psi}\bar{\theta} + \theta\bar{\theta}F, \tag{18}$$

где x, F - вещесвтенные функции. Во-первых, суперпреобразования оставляют вещественное суперполе вещесвтенным. Действительно, компоненты Z преобразуются так:

$$\begin{cases} \delta x = \epsilon\psi - \bar{\epsilon}\bar{\psi}, \\ \delta\psi = \bar{\epsilon}(F - i\dot{x}), \\ \delta\bar{\psi} = \epsilon(F + i\dot{x}), \\ \delta F = -i(\epsilon\dot{\psi} + \bar{\epsilon}\dot{\bar{\psi}}). \end{cases} \tag{19}$$

Во вторых, это поле действительно неприводимо, не получится убрать никаких его степеней свободы, оставив его инвариантым относительно супералгебры, - в силу наличия двух суперзарядов, из каждой бозонной компоненты получаются как минимум две фермионные, и наоборот. Помимо вещественного суперполе, есть еще два вида важных неприводимых $N = 2$ суперполей - киральные голоморфные и киральные антиголоморфные, определяющиеся условиями $\bar{D}Z = 0$ и $DZ = 0$. Из условий (15) следует, что вариация киральных суперполей тоже киральна. Условие голоморфности приводит к выражению:

$$Z = z + \sqrt{2}\theta\psi - i\theta\bar{\theta}\dot{z} = z(t_L) + \sqrt{2}\theta\psi(t_L), \tag{20}$$

где введено "голоморфное время"$t_L = t - i\theta\bar{\theta}$. Аналогично, введя "антиголоморфное время $t_R = t + i\theta\bar{\theta}$ можно написать выражение для антиголоморфного поля:

$$\bar{Z} = \bar{z}(t_R) - \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(t_R) \tag{21}$$

Полученые поля имеют вид (2,2,0) и преобразуются под действием (11) так:

$$\begin{cases} \delta z = \sqrt{2}\epsilon\psi, \;\; \delta\bar{z} = -\sqrt{2}\bar{\epsilon}\bar{\psi} \\ \delta\psi = -i\sqrt{2}\bar{\epsilon}\dot{z}, \;\; \delta\bar{\psi} = i\sqrt{2}\epsilon\dot{z}. \end{cases} \tag{22}$$

Теперь надо научиться строить вещественное действие из имеющихся данных. Очевидно, что аналогично случаю $N = 1$ вещественное суперсимметричное действие получается интегрированием вещественного суперполя. Вещественное суперполе, в котором присутствуют динамические слагаемые можно построить из киральных полей и операторов ковариантной производной. Отметим, что в силу (15) действие D и $\bar{D}$ меняет голоморфность суперолей. Например, для модели Ландау суперсимметричное действие выглядит так:

$$S = \int d\bar{\theta}d\theta dt \left(\frac{1}{4}\bar{D}\bar{Z}DZ - \frac{B}{2}Z\bar{Z}\right) \tag{23}$$

3 $N = 4$ суперпространство

Теперь помимо времени t у нас имеется две грассмановых супервремени θ_j и сопряженные им $\bar{\theta}^j$ (индекс поднимается с помощью антисимметричного тензора ε_{ij}. Преобразования суперсимметрии:

$$\begin{cases} \theta_j \mapsto \theta_j + \epsilon_j, \\ \bar{\theta}^j \mapsto \bar{\theta}^j + \bar{\epsilon}^j, \\ t \mapsto t + i(\epsilon_j\bar{\theta}^j + \bar{\epsilon}^j\theta_j). \end{cases} \tag{24}$$

Супералгебра:

$$\begin{cases} \hat{Q}^j = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\theta_j} + i\bar{\theta}^j\frac{\partial}{\partial t}\right), \\ \hat{\bar{Q}}^j = -\frac{i}{\sqrt{2}}\left(\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}_j} + i\theta^j\frac{\partial}{\partial t}\right) \end{cases} \tag{25}$$

$$\begin{cases} \{\hat{Q}_i, \hat{Q}_j\} = \{\hat{\bar{Q}}^i, \hat{\bar{Q}}^i\} = 0, \\ \{\hat{Q}_i, \hat{\bar{Q}}^j\} = \delta_i^j\hat{H}. \end{cases} \tag{26}$$

Ковариантные производные:

$$\begin{cases} D^j = \frac{\partial}{\partial\theta_j} - i\bar{\theta}^j\frac{\partial}{\partial t}, \\ \bar{D}_j = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^j} + i\theta_j\frac{\partial}{\partial t} \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} \{D^j, D^k\} = \{\bar{D}_j, \bar{D}_k\} = 0, \\ \{D^j, \bar{D}_k\} = 2i\delta_i^j\frac{\partial}{\partial t}, \\ \{D, \hat{Q}\} = 0. \end{cases} \tag{28}$$