Свободная энергия 6-вершинной модели в термодинамическом пределе

Полина Болохова, Иван Павлов

14 мая 2025 г.

1 Уравнения анзаца Бете и их термодинамический предел

Стартуем с уравнений анзаца Бете, полученных из требования, чтобы вектор

$$\Phi(u_1, ...u_n) = B(u_1)...B(u_n)\Psi_0, \tag{1}$$

где $B(u_i)$ - компонента матрицы монодромии, $\Psi_0 = (+, ..., +) \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$, являлся собственным для трансфер-матрицы, N - число столбцов решетки, n - число, нумерующее вектор Бете. Это требование удовлетворяется при выполнении уравнений:

$$\Big(\frac{a(u_j)}{b(u_j)}\Big)^N = \prod_{i=1, i\neq j}^{n} \frac{a(u_j - u_i)b(u_i - u_j)}{b(u_j - u_i)a(u_i - u_j)},\ j = 1, ..., n \tag{2}$$

Соответствующее собственное значение равно

$$\Lambda(u, u_1, ..., u_n) = a^N(u)\prod_{i=1}^{n}\frac{a(u_i - u)}{b(u_i - u)} + b^N(u)\prod_{i=1}^{n}\frac{a(u - u_i)}{b(u - u_i)}. \tag{3}$$

Для параметров трансфер-матрицы выбрана параметризация:

$$\begin{cases} a(u) = s(\lambda - u), \\ b(u) = s(u), \\ \Delta = -c(\lambda), \end{cases} \tag{4}$$

причем

$$\begin{cases} s(u) = \sinh u,\ c(u) = \cosh u,\ \Delta < -1, \\ s(u) = \sin u,\ c(u) = \cos u,\ -1 < \Delta < 1. \end{cases} \tag{5}$$

(случай $\Delta > 1$ уже разобрали предыдущие докладчики)

Тогда $\frac{b(u_j - u_i)}{b(u_i - u_j)} = \frac{s(u_j - u_i)}{s(u_i - u_j)} = -1$, и уравнения Бете переписываются в виде

$$\left(\frac{s(\lambda - u_j)}{s(u_j)}\right)^N = (-1)^{n-1}\prod_{i=1, i\neq j}^{n}\frac{s(\lambda + u_i - u_j)}{s(\lambda - u_i + u_j)} \tag{6}$$

Сделаем замены:

$$u_i = \lambda/2 + iv_i, \quad e^{ik(v)} = \frac{s(\lambda/2 + iv)}{s(\lambda/2 - iv)}, \quad e^{iS(v_i - v_j)} = \frac{s(\lambda + iv_i - iv_j)}{s(\lambda - iv_i + iv_j)}. \tag{7}$$

Тогда уравнение 6 перепишется как

$$e^{ik(v_j)N} = (-1)^{n-1}\prod_{i=1}^{n} e^{iS(v_j - v_i)} \tag{8}$$

$$Nk(v_j) = 2\pi J_j + \sum_{i=1}^{n} S(v_j - v_i), \tag{9}$$

Числа J_j, возникшие при извлечении корня называются числами Бете, они полуцелые при четных n и целые при нечетных.

Наша цель - найти свободную энегрию на ячейку в термодинамическом пределе, которая определяется максимальным собственным значением трансфер-матрицы. Термодинамический предел определяется как $n, N \to \infty,\ n/N = const$. Эту задачу будем решать при трех предположениях:

1. $J_{i+1} - J_i = 1$,

2. $n/N = 1/2$. Среднюю намагниченность можно измерить экспериментально, она оказывается равной нулю. Это позволяет предположить, что в состоянии с минимальной энергией в каждом ряду перевернута ровно половина спиновю.

3. В основном состоянии все корни $u_j = \lambda/2 + iv_j$ уравнения Бете таковы, что v_j вещественные и располагаются плотно и симметрично относительно нуля в интервале $(-U; U)$, то есть функция плотности корней
$$\rho(v) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \frac{1}{v_{j+1} - v_j} \tag{10}$$
существует и симметрична.

Такое определение $\rho(v)$ соответствует тому, что в интервале $(v; v + dv)$ находится $N\rho(v)dv$ корней Бете. Отсюда следует, что для произвольной функции f
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{n} f(v_j) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(v_j)\rho(v_j)(v_j - v_{j-1}) = \int_{-U}^{U} f(v)\rho(v)dv \tag{11}$$
В частности,
$$\int_{-U}^{U} \rho(v)dv = \frac{n}{N} \tag{12}$$

В этих предположениях, вычитая соседние уравнения 9 и правильно переходя к пределу $n \to \infty$ получаем интегральное уравнение
$$\frac{dk(v)}{dv} = 2\pi\rho(v) + \int_{-U}^{U} du \frac{dS(v-u)}{dv} \rho(u) \tag{13}$$

Замечание. Это уравнение на функцию ρ с параметром U. Но, поскольку мы зафиксировали отношение $n/N = 1/2$, на самом деле у нас есть система уравнений 12, 13, из которых можно найти и U, и ρ.

Замечание. Найдя решение $\rho(v)$, мы сможем выразить через него соответствующее собственное число $\Lambda(u, u_1, \ldots, u_n)$. Если оно максимальное, мы далее можем найти и свободную энергию $f = -\lim\limits_{N\to\infty} \frac{\ln \Lambda_{\max}}{N}$ (примечание: в предыдущем докладе показано, что в случае однородной модели $Z \sim \Lambda_{\max}^M$, поэтому $f \sim \frac{\ln Z}{MN} \sim \frac{\ln \Lambda_{\max}}{N}$ не зависит от числа рядов M). А именно,
$$\begin{gathered} f = -\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \ln Z_N = -\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^2} \ln(\Lambda_{max}^N) - = \lim_{N\to\infty} \frac{\ln \Lambda_{\max}(u, u_1, \ldots, u_n)}{N} = \\ = -\max\left(\ln a(u) + \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{a(u_i - u)}{b(u_i - u)},\ \ln b(u) + \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{a(u - u_i)}{b(u - u_i)}\right) \end{gathered} \tag{14}$$
Здесь возникают суммы по корням Бете, как в 11.

2 Решение уравнений Бете

Для начала решим уравнение 13 на $\rho(v)$. Дифференцируя уравнение 7, получаем
$$\begin{gathered} \frac{dk(v)}{dv} = \frac{1}{i} \frac{d}{dv} \ln\left(\frac{s(\lambda/2 + iv)}{s(\lambda/2 - iv)}\right) = \frac{c(\lambda/2 + iv)s(\lambda/2 - iv) + c(\lambda/2 - iv)s(\lambda/2 + iv)}{s^2(\lambda/2 - iv)} \cdot \frac{s(\lambda/2 - iv)}{s(\lambda/2 + iv)} = \\ = \frac{s(\lambda)}{s(\lambda/2 - iv)s(\lambda/2 + iv)}. \end{gathered} \tag{15}$$

Заметим, что $k(v)$ и $S(v)$ имеют одинаковый вид как функции от v, отличаются только заменой параметра $\lambda/2 \to \lambda$. Поэтому здесь и далее некоторые вычисления для $k(v)$ и $S(v)$ будут аналогичными.

Результат:
$$\begin{cases} \frac{dk(v)}{dv} = \frac{s(\lambda)}{s(\lambda/2+iv)s(\lambda/2-iv)}, \\ \frac{dS(v)}{dv} = \frac{s(2\lambda)}{s(\lambda-iv)s(\lambda+iv)}. \end{cases} \tag{16}$$

2.1 $\Delta < -1$

Вспомним, что в этом случае $s(x) = \mathrm{sh}(x)$. Функции k' и S' имеют вид
$$\begin{gathered} k'(v) = \frac{2\,\mathrm{sh}(\lambda)}{\mathrm{ch}(\lambda) - \cos(2v)}; \\ S'(v) = \frac{2\,\mathrm{sh}(2\lambda)}{\mathrm{ch}(2\lambda) - \cos(2v)} \end{gathered} \tag{17}$$

периодичны с периодом π. Это значит, что мы можем решить уравнение 13 разложением в ряд Фурье на интервале $(-U;U) = (-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$. Сделаем это, а затем проверим, что условие нормировки 12 выполняется.

Пусть k'_l, S'_l – коэффициенты Фурье функций $\frac{dk(v)}{dv}, \frac{dS'(v)}{dv}$, то есть

$$\frac{dk(v)}{dv} = \sum_{l\in 2\mathbb{Z}} k'_l e^{-ilv}, \quad \frac{dS(v)}{dv} = \sum_{l\in 2\mathbb{Z}} S'_l e^{-ilv} \tag{18}$$

$$k'_l = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} k'(v)\cos(kv)\,dv,\ S'_l = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} S'(v)\cos(kv)\,dv \tag{19}$$

Считая эти интегралы (например, универсальной тригонометрической подстановкой), находим, что

$$k'_l = 2e^{-\lambda|l|/2},\ S'_l = 2e^{-\lambda|l|}. \tag{20}$$

Проверка:

$$\begin{aligned}\sum_{l\in 2\mathbb{Z}} e^{-\lambda|l|/2}e^{-ilv} &= \sum_{l=0,2,4...} e^{-l(\lambda/2+iv)} + \sum_{l=-2,-4,...} e^{l(\lambda/2-iv)} = \frac{1}{1-e^{-(\lambda+2iv)}} + \frac{1}{1-e^{-(\lambda-2iv)}} - 1 = \\ &= \frac{1-e^{-2\lambda}}{(1-e^{-(\lambda+2iv)})(1-e^{-(\lambda-2iv)})} = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sh}\lambda}{\operatorname{sh}(\lambda/2+iv)\operatorname{sh}(\lambda/2-iv)}\end{aligned} \tag{21}$$

Пусть теперь ρ_l - Фурье-образ $\rho(v)$, то есть $\rho(v) = \sum\limits_{l\in 2\mathbb{Z}} \rho_l e^{-ilv}$. Тогда $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} du \frac{dS(v-u)}{dv}\rho(u) = \pi \sum\limits_{l\in 2\mathbb{Z}} S'_l \rho_l e^{-ilv}$ (Фурье свертки). Уравнение 13 приобретает вид

$$\sum_{l\in 2\mathbb{Z}} k'_l e^{-ilv} = 2\pi \sum_{l\in 2\mathbb{Z}} \rho_l e^{-ilv} + \pi \sum_{l\in 2\mathbb{Z}} S'_l \rho_l e^{-ilv} \tag{22}$$

$$\rho_l = \frac{k'_l}{\pi(2+S'_l)} = \frac{2e^{-\lambda|l|/2}}{2\pi(2+2e^{-\lambda|l|})} = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\operatorname{ch}(\lambda|l|/2)} \tag{23}$$

2.2 $|\Delta| < 1$

В этом случае $s(x) = \sin(x)$, функции $k'(v)$ и $S'(v)$ равны:

$$\begin{aligned} k'(v) &= \frac{2\sin\lambda}{\operatorname{ch}(2v) - \cos\lambda}, \\ S'(v) &= \frac{2\sin(2\lambda)}{\operatorname{ch}(2v) - \cos(2\lambda)}. \end{aligned} \tag{24}$$

Видно, что они убывают на $\pm\infty$ как $e^{-2|v|}$. Следовательно, уравнение 13 можно решать преобразованием Фурье на $(-U;U) = (-\infty;+\infty)$.

$$\rho(v) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \hat{\rho}(y)e^{-iyv}, \quad k'(v) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \hat{k}'(y)e^{-iyv}, \quad S'(v) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\ \hat{S}'(y)e^{-iyv}. \tag{25}$$

Поясним вычисление Фурье-образов.

$$\hat{k}'(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk(v)}{dv} e^{iyv} dv = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\sin\lambda}{\operatorname{ch}2v - \cos\lambda} e^{iyv} dv \tag{26}$$

Полюса находятся в точках $v_m = \pm\frac{\lambda}{2}i + \pi m i$, $m \in \mathbb{Z}$. Вычет в v_m равен:

$$\underset{\pm\frac{\lambda}{2}i+\pi m i}{res} \frac{2\sin\lambda\ e^{iyv}}{\operatorname{ch}2v - \cos\lambda} = \pm\frac{1}{i}e^{-y(\pm\lambda/2+\pi m)} \tag{27}$$

Можно проинтегрироваться по контуру, изображенному на рисунке, интеграл по полуокружности стремится к нулю. Переходя к пределу при $R \to \infty$ в интеграле по контуру (рис.1), находим, что

$$\begin{aligned}\hat{k}'(y) &= 2\pi i \sum_{\pm\frac{\lambda}{2}+\pi m>0} \underset{\pm\frac{\lambda}{2}i+\pi m i}{res} \frac{2\sin\lambda\ e^{iyv}}{\operatorname{ch}2v - \cos\lambda} = e^{-\frac{\lambda}{2}y} + (e^{-\frac{\lambda}{2}y} - e^{\frac{\lambda}{2}y})\sum_{m=1}^{\infty} e^{-y\pi m} = e^{-\frac{\lambda}{2}y} + (e^{-\frac{\lambda}{2}y} - e^{\frac{\lambda}{2}y})\frac{e^{-\pi y}}{1-e^{-\pi y}} \\ &= \frac{\operatorname{sh}\frac{\pi-\lambda}{2}y}{\operatorname{sh}\frac{\pi y}{2}}\end{aligned} \tag{28}$$

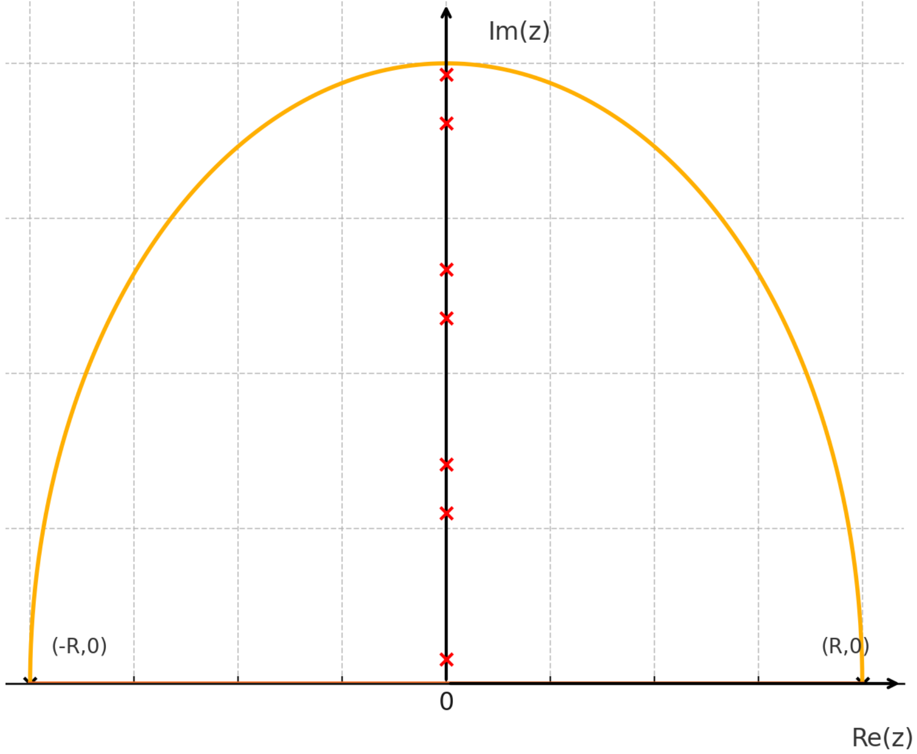


Рис. 1: Контур интегрирования, красным отмечены полюса v_m

Таким образом,

$$\hat{k}'(y) = \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{(\pi-\lambda)y}{2}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi y}{2}\right)}, \quad \hat{S}'(y) = \frac{\mathrm{sh}\left(\frac{(\pi-2\lambda)y}{2}\right)}{\mathrm{sh}\left(\frac{\pi y}{2}\right)}. \tag{29}$$

Выражение для Фурье-образа плотности такое же:

$$\hat{\rho}(y) = \frac{\hat{k}'(y)}{2\pi(1+\hat{S}'(y))} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\mathrm{ch}(\frac{\lambda y}{2})}. \tag{30}$$

Замечание. Мы нашли плотность корней в случаях $\Delta < -1$ и $|\Delta| < 1$ с учетом вышеуказанных предположений. В частности, мы угадали $U = \frac{\pi}{2}$ и $U = \infty$ соответственно. При этом условие нормировки действительно выполняется:

$$\frac{n}{N} = \int_{-U}^{U} \rho(u)du = \frac{1}{2}. \tag{31}$$

Замечание. Ранее мы предполагали, что соседние числа Бете отличаются на единицу. Если бы мы предположили, например, что $J_{i+1} - J_i = j > 1$ (при этом опуская условие $n/N = 1/2$), то смогли бы получить решение уравнений Бете (на тех же промежутках) точно таким же способом: например, $\rho_l = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{je^{\lambda|l|/2}+e^{-\lambda|l|/2}}$ при $\Delta < -1$. Это дало бы нам $\frac{n}{N} = \frac{1}{j+1}$, что заставляет усомниться в том, что такое решение соответствует максимальному собственному числу.

3 Вычисление свободной энергии

Теперь займемся вычислением свободной энергии на вершину. Напомним, что статсумма решетки $N \times N$ равна $Z_N = Tr(T(u)^N)$, а $Tr(T(u)^N) \sim \Lambda_{max}^N$ при $N \to \infty$, поэтому наша свободная свободная энергия равна:

$$\begin{aligned} f &= -\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\ln Z_N = -\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^2}\ln(\Lambda_{max}^N) = -\lim_{N\to\infty}\frac{\ln\Lambda_{\max}(u,u_1,\ldots,u_n)}{N} = \\ &= -\max\left(\ln a(u) + \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{a(u_i-u)}{b(u_i-u)},\ \ln b(u) + \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{a(u-u_i)}{b(u-u_i)}\right) \end{aligned} \tag{32}$$

Выразим свободную энергию через найденные функции. Сначала поработаем с левой частью в max:

$$\begin{aligned}
&\ln\frac{a(u_i-u)}{b(u_i-u)} = \ln\frac{s(\lambda-(u_i-u))}{s(u_i-u)} = \ln\frac{s(\lambda/2+(\lambda/2-u_i+u))}{s(\lambda/2-(\lambda/2-u_i+u))} = ik(\frac{\lambda/2-u_i+u}{i}) = ik(-v_i-iu)\\
&\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{a(u_i-u)}{b(u_i-u)} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} ik(-v_i-iu) = -\int_{-U}^{U} ik(v+iu)\rho(v)dv
\end{aligned} \tag{33}$$

С правой частью max все аналогично. Получаем формулу для свободной энергии через ρ, k:

$$f = -\max\left(\ln a(u) + \int\limits_{-U}^{U}\rho(v)(-i)k(iu+v)dv,\ \ln b(u) + \int\limits_{-U}^{U}\rho(v)(-i)k(i(\lambda-u)-v)dv\right) \tag{34}$$

3.1 $\Delta < -1$

Посчитаем интегралы, встречающиеся в формуле 34.

$$\begin{aligned}
i\int_{-U}^{U}\rho(v)k(iu+v)dv &= -u - \int_{-U}^{U}dv\sum_{l,m\in 2\mathbb{Z},\neq 0}\rho_m e^{-imv}\frac{k'_l}{l}e^{-il(iu+v)} = -u - \pi\sum_{l\in 2\mathbb{Z},\neq 0}\rho_{-l}\frac{k'_l}{l}e^{lu} =\\
&= -u - \sum_{l\in 2\mathbb{Z},\neq 0}\frac{e^{-\lambda|l|/2}}{l\,\mathrm{ch}\,\frac{\lambda l}{2}}e^{lu} = -u - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda m}}{2m\,\mathrm{ch}\,\lambda m}e^{2mu} - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda m}}{-2m\,\mathrm{ch}\,\lambda m}e^{-2mu} =\\
&= -u - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda m}\,\mathrm{sh}\,2mu}{m\,\mathrm{ch}\,\lambda m}
\end{aligned} \tag{35}$$

Таким образом, свободная энергия:

$$f = -\max\Big(\ln a(u) + u + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda m}\,\mathrm{sh}\,2um}{m\,\mathrm{ch}\,\lambda m},\ \ln b(u) + (\lambda-u) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda m}\,\mathrm{sh}\,2(\lambda-u)m}{m\,\mathrm{ch}\,\lambda m}\Big) \tag{36}$$

Две части максимума отличаются заменой u на $\lambda-u$, так как $a(u) = b(\lambda-u)$.
Замечание. Если бы мы вычисляли все то же самое в предположении $J_{i+1} - J_i = j > 1$, то получили бы $-\lim\frac{\ln\Lambda'}{N} = -\max(-\ln a(u) - u - \sum\limits_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda m}\,\mathrm{sh}\,2um}{m}\frac{2}{je^{\lambda m}+e^{-\lambda m}}, \ldots)$. Слагаемые в ряду меньше, значит, собственное число, соответствующее решению с $j > 1$, не максимально. А если $j = 0$, то ряд вообще не сходится.

3.2 $|\Delta| < 1$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho(v)(-i)k(iu+v)dv &= \int dz\ dy\ dv\ \hat{\rho}(z)e^{-izv}\frac{\hat{k'}(y)}{y}e^{-iy(iu+v)} = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{y}\hat{\rho}(-y)\hat{k'}(y)e^{yu} =\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{2y}\frac{\mathrm{sh}\,\frac{(\pi-\lambda)y}{2}e^{yu}}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi y}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\lambda y}{2}} = \int_{0}^{\infty}\frac{dy}{y}\frac{\mathrm{sh}\,\frac{(\pi-\lambda)y}{2}\,\mathrm{sh}\,yu}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi y}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\lambda y}{2}}
\end{aligned} \tag{37}$$

Таким образом, свободная энергия:

$$f = -\ln a(u) - \int\limits_{0}^{\infty}\frac{dy}{y}\frac{\mathrm{sh}\,uy\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi-\lambda}{2}y}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi y}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\lambda y}{2}} = -\ln b(u) - \int\limits_{0}^{\infty}\frac{dy}{y}\frac{\mathrm{sh}(\lambda-u)y\,\mathrm{sh}\,\frac{\pi-\lambda}{2}y}{\mathrm{sh}\,\frac{\pi y}{2}\,\mathrm{ch}\,\frac{\lambda y}{2}} \tag{38}$$

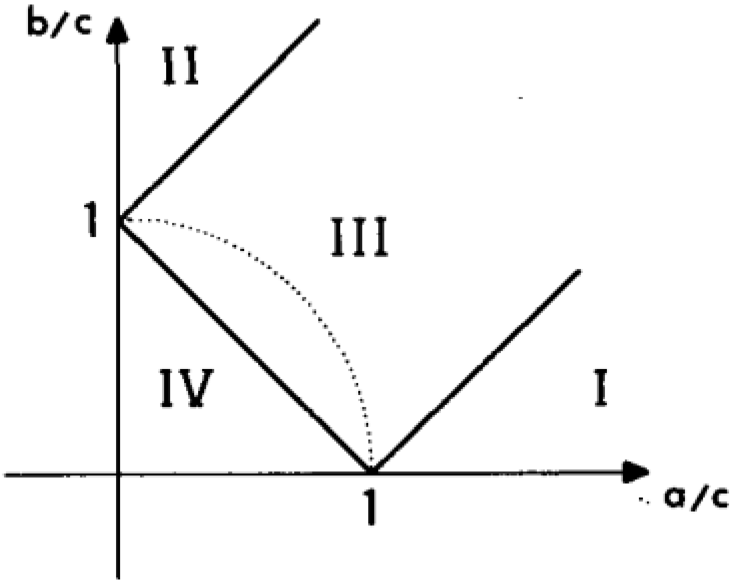
Снова две альтернативы оказываются равными.

4 Фазовая диаграмма

Напомним, что

$$\Delta = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \tag{39}$$

В зависимости от параметра Δ в 6-вершинной модели имеются 4 фазы, на плоскости $(a/c, b/c)$ они расположены так:



1) $\Delta > 1$ - в этом случае система называется ферромагнетиком, свободная энергия находится тривиально, она равна $\min(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$. Фазе I соответствует случай $a > b + c$, то есть свободная энергия равна ε_1, состоянию с минимальной энергией соотвествтует конфигурация, больцмановский вес которой равен a, то есть когда все вершины имеют вид R_{++}^{++}, или все вершины имеют вид R_{--}^{--}

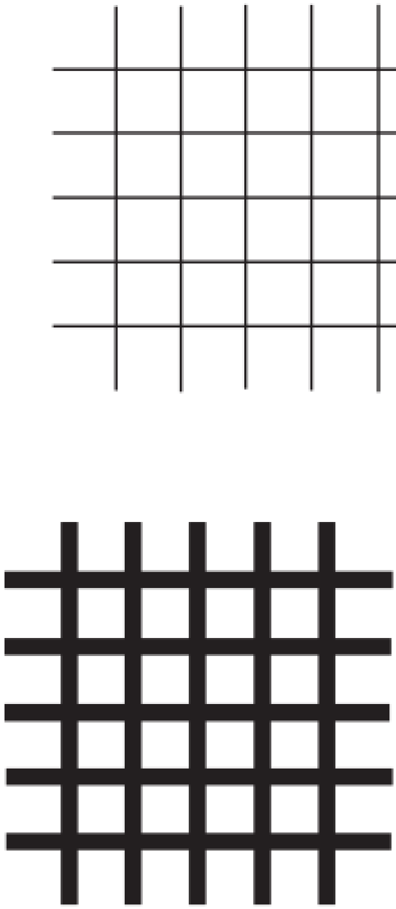


Рис. 2: Две решетки с минимальной энергией в ферромагнитной фазе при $a > b + c$

Фазе II соответствует случай $b > a + c$, когда свободная энергия равна ε_3 и состоянию с минимальной энергией соотвествует конфигурация, где все вершины равны R^{+-}_{+-} или R^{-+}_{-+}:

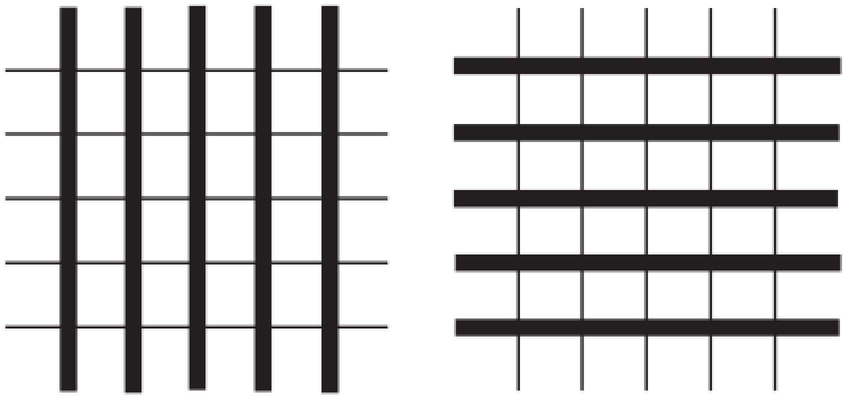


Рис. 3: Две решетки с минимальной энергией в ферромагнитной фазе при $b > a + c$

2) $\Delta < -1$ - в этом случае система называется антиферромагнетиком (фаза IV).
Решетка, соответствующая конфигурации с минимальной энергией выглядит почти как на рис.4 (только вершины с энергией $\varepsilon_5 = \varepsilon_6$),

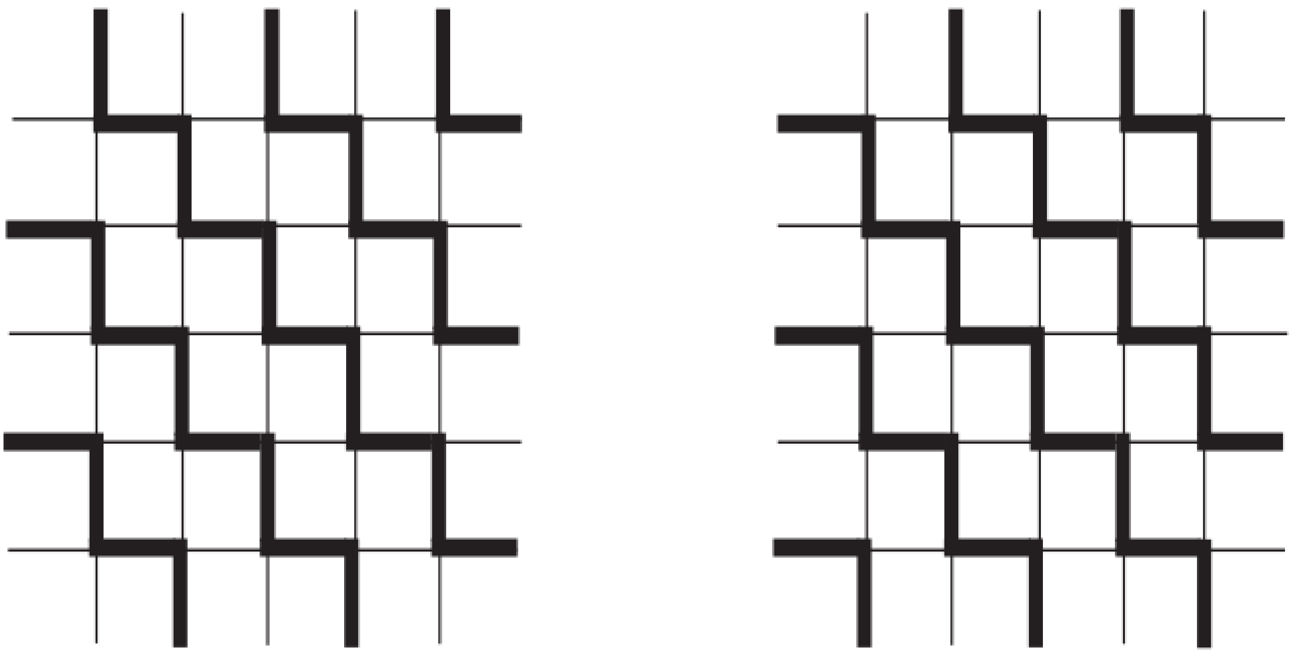


Рис. 4: Вид конфигурации с минимальной энергий вдали от границ в случае $\Delta < -1$

за ислючением того факта, что при четных N (по нашей гипотезе, напомним, $N = 2n$) такая конфигурация невозможна при периодических граничных условиях. Однако логично ожидать, что "замороженное состояние"имеет такой вид вдалеке от границ. 3) $|\Delta| < 1$ - фаза III - в этой фазе нет состояния с упорядочеными вершинами. Выделенная полуокружность - это случай $\Delta = 0$, в этом случае задача диагонализации трансфер-матрицы решается и при конечном размере решетки с помощью свободных фермионов и преобразования Йордана-Вигнера.