Задача 1

Дан параллелограмм $ABCD$. Векторы $\mathbf{a}=\overline{AC}$ и $\mathbf{b}=\overline{BD}$ являются его диагоналями.
Выразить векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$ через векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Ответ: $\overline{AB}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{b})$, $\overline{BC}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$, $\overline{CD}=\frac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$, $\overline{DA}=-\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$.

Задача 2

Дан треугольник ABC.
Выразить медиану $\overline{AD}$, опущенную из вершины A к стороне BC, через векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Ответ: $\overline{AD}=\frac{1}{2}(\overline{AB}+\overline{AC})$.

Задача 3

Дан четырёхугольник $ABCD$. Точки P и Q являются серединами сторон AB и CD соответственно.
Записать вектор $\overline{PQ}$ через векторы $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$.

Ответ: $\overline{PQ}=\frac{1}{2}(\overline{BC}+\overline{AD})$.

Задача 4

Точка C делит отрезок AB в отношении $\alpha:\beta$, т.е. $\frac{|\overline{AC}|}{|\overline{CB}|}=\frac{\alpha}{\beta}$, точка O – произвольная точка, не лежащая на отрезке AB.
Записать вектор $\overline{OC}$ через $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$.

Ответ: $\overline{OC}=\frac{\beta}{\alpha+\beta}\overline{OA}+\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\overline{OB}$.

Задача 5

Доказать утверждение: необходимым и достаточным условием линейной зависимости трёх векторов является их компланарность.

Задача 6

Доказать или опровергнуть утверждение: для любых ненулевых компланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ найдутся числа α и β такие, что $\mathbf{c}=\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}$.