Задача 1

Найти длины векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, их скалярное произведение и угол между ними, если их координаты в некотором ортонормированном базисе имеют вид:

1. $\mathbf{x} = \{1,0,1,0\}$, $\mathbf{y} = \{0,-1,0,1\}$.
2. $\mathbf{x} = \{1,1,1,1\}$, $\mathbf{y} = \{2,2,2,2\}$.
3. $\mathbf{x} = \{1,1,1,1\}$, $\mathbf{y} = \{1,0,0,0\}$.

Ответ:

1. $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{2}$, $\|\mathbf{y}\| = \sqrt{2}$, $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$, $\cos(\varphi) = 0$, векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны.
2. $\|\mathbf{x}\| = 2$, $\|\mathbf{y}\| = 4$, $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 8$, $\cos(\varphi) = 1$, векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ коллинеарны.
3. $\|\mathbf{x}\| = 2$, $\|\mathbf{y}\| = 1$, $(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 1$, $\cos(\varphi) = 1/2$, угол между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ равен $\pi/6$.

Задача 2 (*)

Пусть $\{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$ – некоторый базис евклидова пространства.

Используя процедуру ортогонализации Грама-Шмидта, построить ортонормированный базис, если координаты векторов $\{\mathbf{f}\}$ в некотором ортонормированном базисе имеют вид:

1. $\mathbf{f}_1 = \{0,1,1\}$, $\mathbf{f}_2 = \{1,1,0\}$ и $\mathbf{f}_3 = \{1,0,1\}$.
2. $\mathbf{f}_1 = \{-1,0,1\}$, $\mathbf{f}_2 = \{1,2,0\}$ и $\mathbf{f}_3 = \{-1,0,0\}$.
3. $\mathbf{f}_1 = \{-1,2,-1\}$, $\mathbf{f}_2 = \{2,-1,2\}$ и $\mathbf{f}_3 = \{0,-2,-1\}$.

Ответ:

1. $\mathbf{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\{0,1,1\}$, $\mathbf{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\{2,1,-1\}$ и $\mathbf{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,-1,1\}$.
2. $\mathbf{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\{-1,0,1\}$, $\mathbf{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\{1,4,1\}$ и $\mathbf{e}_3 = \dfrac{1}{3}\{-2,1,-2\}$.
3. $\mathbf{e}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\{-1,2,-1\}$, $\mathbf{e}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$ и $\mathbf{e}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\{1,0,-1\}$.

Задача 3 (*)

Доказать, что:

1. Функция $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}$ может быть использована для определения длины вектора $\mathbf{x}$, т.к. удовлетворяет определению нормы вектора.
2. Функция $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ может быть использована для определения расстояния между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, т.к. удовлетворяет определению метрики.
3. Отношение
$$\frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}$$
может быть использована для определения косинуса угла между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, т.к. не превосходит по модулю единицы; дать геометрическую интерпретацию ситуации, когда модуль отношения равен единице.

Задача 4 (*)

Доказать, что имеют место следующие неравенства:

1. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$.
2. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \ge \big|\,\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\,\big|$.