Задача 1

Доказать простейшие следствия из аксиом линейного пространства:

1. В линейном пространстве имеет единственный нулевой элемент $\mathbf{O}$.
2. Для всякого вектора $\mathbf{x}$ линейного пространства имеет место равенство $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{O}$.

Задача 2

Является ли линейным пространством следующее множество:

1) пустое множество;
2) множество, состоящее из одного элемента;
3) множество, состоящее из двух элементов;
4) множество векторов, коллинеарных некоторой прямой линии;
5) все векторы плоскости, концы лежат в первой четверти системы координат;
6) множество вектор-столбцов, состоящих из n элементов;
7) множество вектор-столбцов, состоящих из n элементов, где первый элемент равен 0;
8) множество вектор-столбцов, состоящих из n элементов, где первый элемент равен 1;
9) множество вектор-столбцов, элементы которых равны между собой;
10) множество матриц размера $m \times n$;
11) множество симметричных матриц;
12) множество вырожденных матриц;
13) множество непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций;
14) множество неотрицательных на отрезке $[a,b]$ функций;
15) множество полиномов степени не выше n.

Ответ: линейными пространствами являются множества: 2), 4), 6), 7), 9), 10), 11), 13), 15).

Задача 3

Образует ли совокупность векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots$ базис и, если да, то найти координаты вектора $\mathbf{z}$ в этом базисе:

1) $\mathbf{x}_1 = \{1,0,0\}$, $\mathbf{x}_2 = \{1,1,0\}$, $\mathbf{x}_3 = \{0,1,1\}$ и $\mathbf{z} = \{3,5,3\}$;
2) $\mathbf{x}_1 = \{1,0,1\}$, $\mathbf{x}_2 = \{0,1,0\}$, $\mathbf{x}_3 = \{1,1,1\}$ и $\mathbf{z} = \{4,3,4\}$;
3) $\mathbf{x}_1 = \{1,1,0\}$, $\mathbf{x}_2 = \{0,1,1\}$ и $\mathbf{z} = \{1,2,1\}$;
4) $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$;
5) $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ и $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 7 \end{bmatrix}$;
6) $\mathbf{x}_1 = 1 + t$, $\mathbf{x}_2 = t^2 + t^3$, $\mathbf{x}_3 = 1 + t + t^2$, $\mathbf{x}_4 = t + t^2 + t^3$ и $\mathbf{z} = t + 2t^2 + 3t^3$.

Ответы:

1) совокупность векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots$ образует базис, в котором вектор $\mathbf{z} = \{1,2,3\}$;
2) совокупность векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots$ линейно зависимая, поэтому базис не образует;
3) совокупность векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots$ линейно независимая, но базис не образует, т.к. существует вектор $\mathbf{z}$, например $\mathbf{z} = \{1,2,3\}$, который нельзя представить в виде линейной комбинации этих векторов;
4) совокупность векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots$ образует базис, в котором вектор $\mathbf{z} = \{1,2,1,2\}$;
5) совокупность векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots$ образует базис, в котором вектор $\mathbf{z} = \{3,2,1,4\}$;
6) совокупность векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots$ образует базис, в котором вектор $\mathbf{z} = \{1,2,-1,1\}$.