Задача 9 (*)
Пусть матрица $\mathbf{P}=\mathbf{E}-(\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j)^{\mathrm{T}}(\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j)$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица, $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$ – её i и j-я строки. Вычислить матрицы $\mathbf{PA}$ и $\mathbf{AP}$.

Решение
Пусть для определённости $i<j$.
По условию $\mathbf{e}_i$ и $\mathbf{e}_j$ – это i и j-я строки единичной матрицы $\mathbf{E}$, поэтому вектор-строка $\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j$ будет содержать только два ненулевых элемента, расположенных в столбцах с номерами i и j, т.е.

$$\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j=[\,\dots\ 1\ \dots\ -1\ \dots\,].$$

Произведение $(\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j)^{\mathrm{T}}(\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j)$ представляет собой квадратную матрицу размера $n\times n$, все элементы которой равны нулю, кроме четырёх, расположенных на пересечении строк и столбцов с номерами i и j, т.е.

$$(\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j)^{\mathrm{T}}(\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j)=\begin{bmatrix}\dots\\1\\\dots\\-1\\\dots\end{bmatrix}[\,\dots\ \ 1\ \ \dots\ \ -1\ \ \dots\,]=\begin{bmatrix}\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\\dots&1&\dots&-1&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\\dots&-1&\dots&1&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\end{bmatrix}.$$

С учётом полученного результата, можем записать матрицу $\mathbf{P}$:

$$\mathbf{P}=\mathbf{E}-(\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j)^{\mathrm{T}}(\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j)=\begin{bmatrix}1&\dots&\dots&\dots&\dots\\\dots&0&\dots&1&\dots\\\dots&\dots&1&\dots&\dots\\\dots&1&\dots&0&\dots\\\dots&\dots&\dots&\dots&1\end{bmatrix},$$

т.е. матрица $\mathbf{P}$ – это матрица, полученная из единичной матрицы $\mathbf{E}$ путём перестановки строк (столбцов) с номерами i и j, поэтому, умножение матрицы $\mathbf{P}$ на матрицу $\mathbf{A}$ слева (справа) приводит к перестановке в матрице $\mathbf{A}$ строк (столбцов) с номерами i и j.

Задача 10 (*)
Пусть $\boldsymbol{\iota}=\begin{bmatrix}1&1&\dots&1\end{bmatrix}$ и $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}x_1&x_2&\dots&x_n\end{bmatrix}$.

Вычислить сумму элементов матрицы $\mathbf{Z}=\mathbf{X}-\dfrac{1}{n}\boldsymbol{\iota}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}\,\mathbf{X}$.

Решение
Произведение $\boldsymbol{\iota}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}$ – это матрица размера $n\times n$, все элементы которой равны 1, поэтому

$$\frac{1}{n}\boldsymbol{\iota}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}\,\mathbf{X}=\frac{1}{n}\begin{bmatrix}1&1&\dots&1\\1&1&\dots&1\\\dots&\dots&\dots&\dots\\1&1&\dots&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{bmatrix}=\frac{1}{n}\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{n}x_i\\\sum_{i=1}^{n}x_i\\\dots\\\sum_{i=1}^{n}x_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{X}\\\overline{X}\\\dots\\\overline{X}\end{bmatrix},\ \text{где}\ \overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

Подставляя полученное выражение в выражение для матрицы $\mathbf{Z}$, получаем

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} - \frac{1}{n}\boldsymbol{\iota}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\iota}\,\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_i - \overline{X} \\ x_i - \overline{X} \\ \dots \\ x_i - \overline{X} \end{bmatrix}.$$

Суммируя элементы матрицы $\mathbf{Z}$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X}) = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n}\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\overline{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i - n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0.$$

Задача 11 (*)

Доказать, что, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – вектор-столбцы размера $n \times 1$ и $\mathbf{C} = \mathbf{ab}^{\mathrm{T}}$, то существует такое число λ, что $\mathbf{C}^2 = \lambda\mathbf{C}$.

Доказательство

Пусть $\mathbf{a} = \| a_i \|$, $\mathbf{b} = \| b_j \|$, тогда $\mathbf{C} = \mathbf{ab}^{\mathrm{T}} = \| c_{ij} \|$ – матрица размера $n \times n$, где $c_{ij} = a_i b_j$.

Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{C}^2 = \| d_{ij} \|$, тогда $d_{ij} = \sum_{k=1}^{n} c_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_i b_k a_k b_j = a_i b_j \sum_{k=1}^{n} b_k a_k = c_{ij}\lambda$, где $\lambda = \sum_{k=1}^{n} b_k a_k$,

т.е. $\mathbf{C}^2 = \lambda\mathbf{C}$.

Задача 12 (*)

Пусть $\mathbf{A} = diag(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ и $\mathbf{B} = diag(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$, $\mathbf{C}_{n\times n}$ – некоторая матрица и λ – некоторое число.

Доказать, что:

1) матрицы $\lambda\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ – диагональные;
2) $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.
3) строки матрицы $\mathbf{AC}$ – это строки матрицы $\mathbf{C}$, умноженные на α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$.
4) столбцы матрицы $\mathbf{CA}$ – это столбцы матрицы $\mathbf{C}$, умноженные на α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Доказательство

Докажем первое утверждение.

Пусть $\mathbf{A} = \| a_{ij} \|$, где $a_{ii} = \alpha_i$ и $a_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$.

По определению операции умножения $\lambda\mathbf{A} = \| \lambda a_{ij} \| = \| a'_{ij} \|$, где $a'_{ii} = \lambda\alpha_i$ и $a'_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$, т.е. матрица $\lambda\mathbf{A}$ – диагональная.

По определению операции умножения матриц $\mathbf{A}' = \mathbf{A}^2 = \| a'_{ij} \|$, где $a'_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}$. В этой сумме a_{ik} и a_{kj} не равны нулю, только если $i = k$ и $k = j$, а произведение $a_{ik}a_{kj}$ не равно нулю, только если $i = k = j$, поэтому ненулевыми будут только элементы a'_{ii}, т.е. матрица $\mathbf{A}^2$ также является диагональной.

Аналогично показывается, что матрица $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ является диагональной.

Докажем второе утверждение.

Пусть $\mathbf{A} = \| a_{ij} \|$, $\mathbf{B} = \| b_{ij} \|$ и $\mathbf{G} = \mathbf{AB} = \| g_{ij} \|$, где $g_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

Так как матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – диагональные, то $a_{ik} = b_{kj} = 0$ при $i \neq k$ и $k \neq j$, поэтому $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $g_{ij} = \alpha_i \beta_j$ при $i = j$.

Пусть $\mathbf{H} = \mathbf{BA} = \| h_{ij} \|$, где $h_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik} a_{kj}$, тогда, рассуждая аналогично, получаем, что $h_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $h_{ij} = \beta_i \alpha_j$ при $i = j$.

Таким образом, $g_{ij} = h_{ij}$ для всех значений i и j, т.е. $\mathbf{G} = \mathbf{H}$ или $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Третье и четвёртое утверждения очевидны, если рассматривать матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, как матрицы последовательностей элементарных преобразований.

Задача 13 (*)

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – *симметричные матрицы*, т.е. $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$ и $\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}$.
Доказать, что:

1. $\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}^n$, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ – симметричные матрицы.
2. $\mathbf{AB}$ – симметричная матрица, если и только если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – *перестановочные матрицы*, т.е. $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

Доказательство

Докажем первое утверждение.
Для каждой из матриц $\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$, $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{A}^n$, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ имеем следующие цепочки равенств:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathrm{T}},$$

$$(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A},$$

$$(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}},$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}^n)^{\mathrm{T}} &= (\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{n-1})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{n-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = (\mathbf{A}^{n-1})^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \\ &= (\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{n-2})^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{n-2})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{n-2})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}\,\mathbf{A} = (\mathbf{A}^{n-2})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}^2 = \\ &= \ldots = \\ &= (\mathbf{A})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{A}\,\mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{A}^n,\end{aligned}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A} + \mathbf{B}.$$

Заметим, что первый результат справедлив для любых квадратных матриц, а второй и третий результаты для любых, в том числе, прямоугольных матриц.

Докажем второе утверждение.

<u>Необходимость</u>.

Пусть $\mathbf{AB}$ – симметричная матрица, тогда $\mathbf{AB} = (\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{BA}$, т.е. матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – перестановочные.

<u>Достаточность</u>.

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – перестановочные матрицы, тогда $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = (\mathbf{BA})^{\mathrm{T}}$ и, т.к. $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ и $(\mathbf{BA})^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$, то $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$, т.е. матрицы $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}$ также перестановочные.

Теперь можем записать $(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{AB}$, т.е. матрица $\mathbf{AB}$ – симметричная.

Задача 14 (*)

Доказать, что, если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – *ортогональные матрицы*, т.е. $\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}$ и $\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E}$, то матрица $\mathbf{AB}$ также является ортогональной.

Доказательство

$$\mathbf{AB}(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}} = \mathbf{AB}\,\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}\,\mathbf{E}\,\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{E},$$

$$(\mathbf{AB})^{\mathrm{T}}\,\mathbf{AB} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{AB} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{E}\mathbf{B} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mathbf{E}.$$

Задача 15 (*)
Доказать, что, если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – верхние треугольные матрицы, то матрицы $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ и $\mathbf{D} = \mathbf{AB}$ также являются верхними треугольными матрицами.
Выразить диагональные элементы матриц $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ через элементы матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

Доказательство
Заметим, что если матрицы $\mathbf{A} = \| a_{ij} \|$ и $\mathbf{B} = \| b_{ij} \|$ – верхние треугольные, то $a_{ij} = b_{ij} = 0$ всегда при $i > j$ (если первый индекс строго больше второго).
В матрице $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \| c_{ij} \|$ элементы $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Поэтому при $i > j$ элемент $c_{ij} = 0 + 0 = 0$, т.е. матрица $\mathbf{C}$ – верхняя треугольная.

В матрице $\mathbf{D} = \mathbf{AB} = \| d_{ij} \|$ элементы $d_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$.

Пусть $i > j$, тогда при $k < i$ $a_{ik} = 0$ и при $k \geq i$ $b_{kj} = 0$, т.е. при любом значении индекса k произведение $a_{ik} b_{kj} = 0$.

Поэтому, если $i > j$, то элемент $d_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = 0$, т.е. матрица $\mathbf{D}$ – верхняя треугольная.

Найдём диагональные элементы матриц $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$.
Диагональные элементы матрицы $\mathbf{C}$, очевидно, равны $c_{ii} = a_{ii} + b_{ii}$.

Диагональные элементы матрицы $\mathbf{D}$ равны $d_{ii} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$, где $a_{ik} = 0$ при $k < i$ и $b_{ki} = 0$ при $k > i$, поэтому $d_{ii} = a_{ii} b_{ii}$.

Задача 16 (*)
Доказать, что, если $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ – *стохастические матрицы*, т.е. элементы этих матриц неотрицательные и сумма элементов любой строки (и/или столбца) равна единице, то матрица $\mathbf{AB}$ также является стохастической.

Доказательство
Матрицы $\mathbf{A} = \| a_{ij} \|$ и $\mathbf{B} = \| b_{pq} \|$, где $i = \overline{1, r}$, $j = \overline{1, s}$, $p = \overline{1, s}$ и $q = \overline{1, t}$ – стохастические, это значит, что для любых значений индексов i и p справедливо $\sum\limits_{j=1}^{s} a_{ij} = 1$ и $\sum\limits_{q=1}^{t} b_{pq} = 1$.

Пусть $\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \| c_{ij} \|$, где $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj}$, тогда сумма элементов i-й строки матрицы $\mathbf{C}$ равна $\sum\limits_{j=1}^{t} c_{ij} = \sum\limits_{j=1}^{t} \sum\limits_{k=1}^{s} a_{ik} b_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{s} \sum\limits_{j=1}^{t} a_{ik} b_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{s} a_{ik} \sum\limits_{j=1}^{t} b_{kj} = 1$, т.е. матрица $\mathbf{AB}$ – стохастическая.

Задача 17 (*)
Вычислить $tr(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{A})$, где $\mathbf{A}$ – произвольная матрица.

Решение
Пусть матрица $\mathbf{A}$ имеет размер $m \times n$, тогда матрица $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} = \| b_{ij} \|$ имеет размер $n \times n$, и её элементы $b_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{m} a_{ki} a_{kj}$ (обратите внимание на индексы). Тогда можем записать

$$tr(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}) = tr(\mathbf{B}) = \sum_{j=1}^{n} b_{jj} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2,$$

т.е. след матрицы $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}$ равен сумме квадратов элементов исходной матрицы $\mathbf{A}$.

Задача 18 (*)

Вычислить $tr(\mathbf{A}^m)$, где $\mathbf{A}$ – треугольная матрица.

Решение

Повторяя ход рассуждений решения предыдущей задачи, получаем, что i-й диагональный элемент матрицы $\mathbf{A}^2$ равен a_{ii}^2. Продолжая рассуждения, получаем, что в матрице $\mathbf{A}^m$ i-й диагональный элемент равен a_{ii}^m, поэтому

$$tr(\mathbf{A}^m) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}^m .$$

Задача 19 (*)

Доказать или опровергнуть утверждение: если $\mathbf{A}^2 = \mathbf{O}$, то $\mathbf{A} = \mathbf{O}$.

Решение

Утверждение задачи неверно, чтобы его опровергнуть, достаточно привести контрпример:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O} .$$