1. Базис

Множество элементов называется *замкнутым* относительно некоторой операции, если результат применения этой операции к элементам множества принадлежит этому же множеству.
Например, множество целых чисел замкнуто относительно операций сложения и умножения, но не замкнуто относительно операции деления.

Множество векторов замкнутое относительно операций сложения векторов и умножения вектора на число называется *векторным пространством*.
Примерами векторных пространств являются следующие множества:

1. V_1 – множество векторов коллинеарных заданной прямой.
2. V_2 – множество векторов компланарных заданной плоскости.
3. V_3 – множество векторов пространства.

Упорядоченная совокупность линейно независимых векторов $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ векторного пространства V_n называется *базисом*, если всякий вектор $\mathbf{a}$ из этого пространства может быть *разложен по базису*, т.е. представлен в виде $\mathbf{a} = \lambda_1 \mathbf{e}_1 + \lambda_2 \mathbf{e}_2 + ... + \lambda_n \mathbf{e}_n$.

В определении базиса содержатся следующие требования:

1. Требование упорядоченности совокупности векторов, входящих в базис, означает, что порядок перечисления векторов существенен. Например, $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и $\{\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1\}$ – это разные базисы, состоящие из одних и тех же векторов.
2. Требование полноты, гарантирующее возможность разложения по базису каждого вектора пространства.
3. Требование линейной независимости базисных векторов гарантирует компактность базиса в том смысле, что в базисе присутствуют только те векторы, которые необходимы для разложения каждого вектора по базису, и никаких других "лишних" векторов нет, что, в свою очередь, гарантирует единственность разложения вектора по базису, как это утверждается в следующей теореме.

Теорема (о единственности разложения вектора по базису)
Коэффициенты разложения вектора по базису определяются единственным образом.

Индекс n в обозначении V_n называется *размерностью пространства* и, как это видно из определения базиса, совпадает с количеством базисных векторов, кроме того, из теоремы о признаках линейной зависимости следует, что в пространстве V_n найдётся n линейно независимых векторов, а всякие $n+1$ векторы будут линейно зависимыми.
Следующая теорема даёт описание базисов пространств V_1, V_2 и V_3.

Теорема (о базисе)
Справедливы следующие утверждения:

1. Всякий ненулевой вектор, коллинеарный данной прямой, образует базис на этой прямой.
2. Любые два неколлинеарных вектора компланарных данной плоскости, образуют базис на этой плоскости.
3. Любые три некомпланарных вектора образуют базис в пространстве.

2. Координаты вектора

Пусть в пространстве V_n выбран базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$, тогда любой вектор $\mathbf{a}$ пространства представим в виде $\mathbf{a} = \lambda_1\mathbf{e}_1 + \lambda_2\mathbf{e}_2 + ... + \lambda_n\mathbf{e}_n$. Коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ в разложении вектора по базису называются *координатами вектора* $\mathbf{a}$ *в базисе* $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$. Факт того, что вектор $\mathbf{a}$ в выбранном базисе имеет координаты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ будем обозначать, как $\mathbf{a} = \{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$.

Теорема (о выражении линейных операций над векторами через их координаты)

При сложении векторов их координаты складываются, при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

3. Аффинная и декартова прямоугольная системы координат

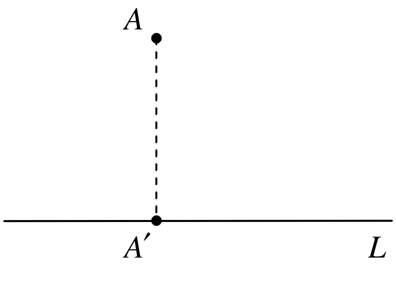
Процесс построения аффинной системы координат рассмотрим на примере пространства (построения аффинных систем координат на плоскости и на прямой осуществляются аналогичным образом).

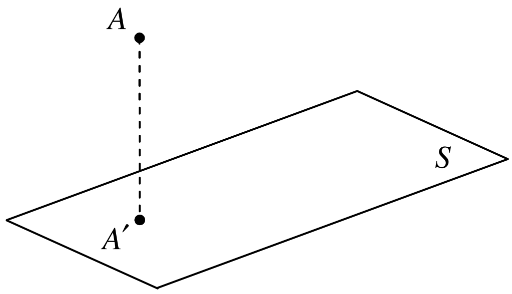
Пусть в пространстве выбраны точка O, которую будем называть *началом отсчёта*, и базис $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, тогда каждой точке M пространства можно поставить во взаимно однозначное соответствие её радиус-вектор, разложение которого базису имеет вид $\overline{OM} = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3$. Так как коэффициенты разложения вектора по базису определены однозначно, то это означает, что каждой точке M пространства могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие координаты её радиус-вектора – числа x, y и z. Факт того, что радиус-вектор точки M имеет координаты x, y и z, будем обозначать, как $M(x, y, z)$, сами числа x, y и z будем называть *аффинными координатами точки* M *в выбранном базисе*, совокупность точки O и базиса $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ будем называть *аффинной системой координат*, а прямые, проходящие через точку O в направлении базисных векторов, – *осями координат*.

Если при построении аффинной системы координат в качестве базисных были выбраны взаимно ортогональные векторы единичной длины, то такую систему координат называют *декартовой прямоугольной системой координат*. В этом случае базисные векторы принято обозначать латинскими буквами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$. Координатные оси в декартовой прямоугольной системе координат обозначаются и называются так: Ox – *ось абсцисс*, направлена вдоль вектора $\mathbf{i}$; Oy – *ось ординат*, направлена вдоль вектора $\mathbf{j}$; Oz – *ось аппликат*, направлена вдоль вектора $\mathbf{k}$.

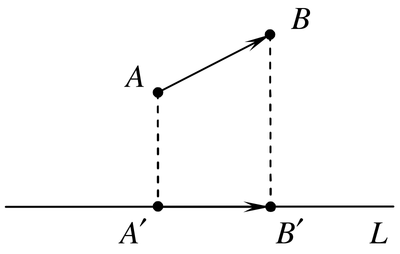
4. Ортогональная проекция вектора на ось

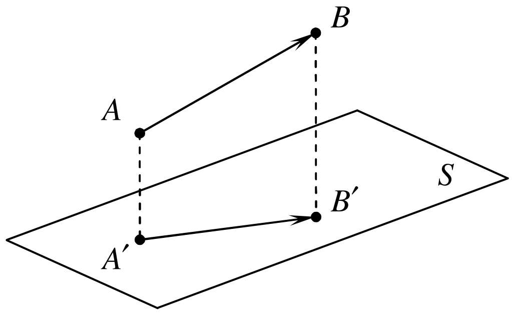
Ортогональной проекцией точки A *на прямую* L [*на плоскость* S] называется основание перпендикуляра A', опущенного из этой точки на прямую L [на плоскость S].





Ортогональной проекцией вектора $\overline{AB}$ *на прямую* L [*на плоскость* S] называется вектор $\overline{A'B'}$, соединяющий основания перпендикуляров A' и B', опущенных из точек A и B на прямую L [на плоскость S].





Пусть имеется прямая линия L, на которой выбраны точка O – начало отсчёта и базисный вектор $\mathbf{e}$, определяющий направление на прямой L, т.е. имеется *ось*.

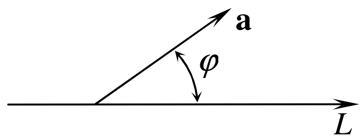
Ортогональной проекцией вектора $\overline{AB}$ *на ось* L (*на вектор* $\mathbf{e}$) называется число

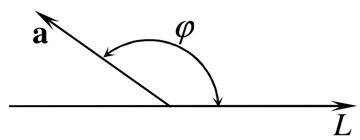
$$\mathrm{Pr}_L(\overline{AB}) = \mathrm{Pr}_{\mathbf{e}}(\overline{AB}) = \begin{cases} |\overline{A'B'}|, & \textit{если векторы } \overline{A'B'} \textit{ и } \mathbf{e} \textit{ сонаправлены}, \\ -|\overline{A'B'}|, & \textit{если векторы } \overline{A'B'} \textit{ и } \mathbf{e} \textit{ разнонаправлены.} \end{cases}$$

Заметим, что ортогональная проекция вектора <u>на прямую</u> – это <u>вектор</u>, а ортогональная проекция вектора <u>на ось</u> – это <u>число</u>.

Свойства ортогональной проекции вектора на ось

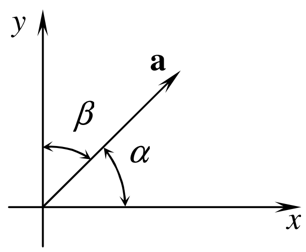
1. $\mathrm{Pr}_L(\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|\cos(\varphi)$,
   где φ – угол между вектором $\mathbf{a}$ и осью L – наименьший угол, на который необходимо повернуть вектор $\mathbf{a}$, чтобы его направление совпало с направлением оси L.
2. $\mathrm{Pr}_L(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\,\mathrm{Pr}_L(\mathbf{a})$.
3. $\mathrm{Pr}_L(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathrm{Pr}_L(\mathbf{a}) + \mathrm{Pr}_L(\mathbf{b})$.





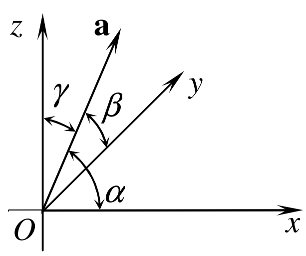
5. Направляющие косинусы

Пусть на плоскости выбрана декартова прямоугольная система координат Oxy. Рассмотрим ненулевой вектор $\mathbf{a}$, начало которого совмещено с точкой O. Обозначим углы между вектором $\mathbf{a}$ и координатными осями Ox и Oy через α и β соответственно. Направляющими *косинусами вектора* $\mathbf{a}$ называются величины $\cos(\alpha)$ и $\cos(\beta)$.



Аналогичным образом вводятся направляющие косинусы вектора в пространстве: пусть α, β и γ – углы между вектором $\mathbf{a}$ и координатными осями Ox, Oy и Oz декартовой прямоугольной системы координат. Тогда направляющими косинусами вектора $\mathbf{a}$ называются величины $\cos(\alpha)$, $\cos(\beta)$ и $\cos(\gamma)$.

Имеют место следующие соотношения.



На плоскости:

1. $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{|\mathbf{a}|}$, $\cos(\beta) = \dfrac{y}{|\mathbf{a}|}$.
2. $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) = 1$.

В пространстве:

1. $\cos(\alpha) = \dfrac{x}{|\mathbf{a}|}$, $\cos(\beta) = \dfrac{y}{|\mathbf{a}|}$, $\cos(\gamma) = \dfrac{z}{|\mathbf{a}|}$.
2. $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$.