ОБРАЗЕЦ № 1

Вопрос 1 (*требуется записать основные определения, свойства, формулировки теорем*)
(оценка 3)

Ортогональная и ортонормированная совокупности векторов. Теорема об ортогональной совокупности векторов.

Вопрос 2 (*требуется решить задачу*)
(оценка 4)

Координаты совокупностей векторов {A} и {B}, записаны в столбцах матриц A и B. Определить размерности линейных подпространств L(A), L(B), L(A)+L(B) и L(A)∩L(B).

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 3 & -1 & 4 & 9 \\ 6 & 6 & 0 & 8 & -4 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -5 & 1 & -5 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -4 & 5 & 5 \\ -8 & -7 & 2 & 1 & -6 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & -3 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Вопрос 3 (*требуется доказать теорему, утверждения, свойства,...*)
(оценка 5)

Теорема (процедура ортогонализации Грама-Шмидта).

Ответ на вопрос 2

Dim(L(A)) = 4, Dim(L(B)) = 3, Dim(L(A)&L(B)) = 2, Dim(L(A)+L(B)) = 5.

ОБРАЗЕЦ № 2

Вопрос 1 (*требуется записать основные определения, свойства, формулировки теорем*)
(оценка 3)

Прямая сумма линейных подпространств (определение). Теорема "о прямой сумме линейных подпространств".

Вопрос 2 (*требуется решить задачу*)
(оценка 4)

Найти проекцию вектора Y на линейную оболочку векторов X_1, X_2, X_3, если

$$X_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix},\ X_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ и } Y = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Вопрос 3 (*требуется доказать теорему, утверждения, свойства,...*)
(оценка 5)

Теорема "об ортогональной совокупности векторов".

Ответ на вопрос 2

$$Pr(Y) = Xb = [-1,\ 1,\ 4,\ 4]^T \text{ , где } b = [\ -2,\ -1,\ 1\ ]^T.$$

ОБРАЗЕЦ № 3

<u>Вопрос 1</u> (*требуется записать основные определения, свойства, формулировки теорем*)
(оценка 3)

Сумма и пересечение линейных подпространств (определение). Теорема "о сумме и пересечении линейных подпространств".

<u>Вопрос 2</u> (*требуется решить задачу*)
(оценка 4)

Записать общее уравнение плоскости, параметрическое уравнение которой имеет вид

$$X = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>Вопрос 3</u> (*требуется доказать теорему, утверждения, свойства,...*)
(оценка 5)

Теорема "о необходимых и достаточных условиях зависимости векторов в координатной форме".

Ответ на вопрос 2
Возможный вариант общего уравнения плоскости имеет вид:

$$-1X_1 - 1X_3 + 2X_4 - 2X_5 = 5$$
$$1X_1 + 1X_2 + 1X_5 = 1$$

ОБРАЗЕЦ № 4

Вопрос 1 (*требуется записать основные определения, свойства, формулировки теорем*)
(оценка 3)

Ортонормированный базис и его свойства. Теорема (процедура ортогонализации Грама-Шмидта).

Вопрос 2 (*требуется решить задачу*)
(оценка 4)

Найти проекцию вектора Y на линейную оболочку векторов X_1, X_2, X_3, если

$$X_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ и } Y = \begin{bmatrix} -7 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Вопрос 3 (*требуется доказать теорему, утверждения, свойства,...*)
(оценка 5)

Теорема "об описании линейного подпространства однородной СЛАУ".

Ответ на вопрос 2

$Pr(Y) = Xb = [-5, -4, -2, 2]^T$, где $b = [\ -1, -1, -2\ ]^T$.

ОБРАЗЕЦ № 5

Вопрос 1 (***требуется записать основные определения, свойства, формулировки теорем***)
(оценка 3)

Гиперплоскость (определение). Выпуклое множество (определение). Теорема о выпуклых множествах. Полупространство (определение). Теорема "о полупространствах".

Вопрос 2 (***требуется решить задачу***)
(оценка 4)

Размерность линейного пространства равна 5.
Записать СЛАУ для ортогонального дополнения линейного подпространства L, заданного следующей СЛАУ

$$1X_1 - 2X_3 + 1X_4 = 0$$
$$-2X_1 + 1X_2 - 1X_3 + 1X_4 + 1X_5 = 0$$

Вопрос 3 (***требуется доказать теорему, утверждения, свойства,...***)
(оценка 5)

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Ответ на вопрос 2
Возможный вариант СЛАУ для ортогонального дополнения линейного подпространства L:

$$1X_1 + 1X_2 - 1X_4 + 2X_5 = 0$$
$$-1X_1 - 1X_2 + 1X_3 + 3X_4 - 3X_5 = 0$$
$$-1X_2 - 1X_3 - 2X_4 + 2X_5 = 0$$

ОБРАЗЕЦ № 6

Вопрос 1 (*требуется записать основные определения, свойства, формулировки теорем*)
(оценка 3)

Ортогональность вектора подпространству, ортогональные подпространства, ортогональное дополнение. Теорема (об условиях ортогональности линейных подпространств). Теорема (о разложении евклидова пространства).

Вопрос 2 (*требуется решить задачу*)
(оценка 4)

Записать параметрическое уравнение плоскости, общее уравнение которой имеет вид:

$$\begin{aligned} 2X_1 - 1X_2 - 2X_3 - 6X_4 + 3X_5 &= -5 \\ -1X_1 + 1X_2 + 4X_4 - 2X_5 &= 3 \\ 2X_1 + 2X_2 - 8X_3 &= -2 \\ 1X_1 + 2X_2 - 6X_3 + 2X_4 - 1X_5 &= 0 \end{aligned}$$

Вопрос 3 (*требуется доказать теорему, утверждения, свойства,...*)
(оценка 5)

Теорема "о выражении линейных операций над векторами через линейные комбинации над их координатами".

Ответ на вопрос 2

$$X = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ОБРАЗЕЦ № 7

Вопрос 1 (*требуется записать основные определения, свойства, формулировки теорем*)
(оценка 3)

Прямое дополнение линейного подпространства (определение). Теорема "о существовании прямого дополнения".

Вопрос 2 (*требуется решить задачу*)
(оценка 4)

Записать общее уравнение плоскости, параметрическое уравнение которой имеет вид

$$X = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + t_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Вопрос 3 (*требуется доказать теорему, утверждения, свойства,...*)
(оценка 5)

Теорема (о разложении евклидова пространства).

Ответ на вопрос 2
Возможный вариант общего уравнения плоскости имеет вид:

$$-1X_1 - 1X_3 + 1X_4 + 2X_5 = -2$$
$$1X_5 = -1$$

ОБРАЗЕЦ № 8

Вопрос 1 (*требуется записать основные определения, свойства, формулировки теорем*)
(оценка 3)

Прямое дополнение линейного подпространства (определение). Теорема "о существовании прямого дополнения".

Вопрос 2 (*требуется решить задачу*)
(оценка 4)

Записать уравнение прямой L, проходящей через точку M0(1,2,2,1,-1) и пересекающую прямые L1 и L2, уравнения которых имеют вид:
L1: X = r_1 + a1*t1, где r_1 = {-2,-1,4,4,-2}, a_1 = {1,1,2,1,-1};
L2: X = r_2 + a2*t2, где r_2 = {-5,0,-6,-11,-3}, a_2 = {-2,-1,-1,-2,-1}.
Найти точки пересечения L с прямыми L1 и L2.

Вопрос 3 (*требуется доказать теорему, утверждения, свойства,...*)
(оценка 5)

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Ответ на вопрос 2
Возможный вариант уравнения прямой имеет вид:
L: X = r_0 + a*t, где r_0 = {1,2,2,1,-1}, a = {-1,-1,2,2,-1}.
Точки пересечения: M1(-1,0,6,5,-3), M2(3,4,-2,-3,1).

ОБРАЗЕЦ № 9

Вопрос 1 (*требуется записать основные определения, свойства, формулировки теорем*)
(оценка 3)

Сумма и пересечение линейных подпространств (определение). Теорема "о сумме и пересечении линейных подпространств".

Вопрос 2 (*требуется решить задачу*)
(оценка 4)

Найти проекцию вектора Y на линейную оболочку векторов X_1, X_2, X_3, если

$$X_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \ X_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \ X_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ и } Y = \begin{bmatrix} 9 \\ 5 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Вопрос 3 (*требуется доказать теорему, утверждения, свойства,...*)
(оценка 5)

Теорема "о решении системы нормальных уравнений".

Ответ на вопрос 2

$Pr(Y) = Xb = [5,\ 7,\ 6,\ 4]^T$, где $b = [\ -2,\ -1,\ -1\ ]^T$.

ОБРАЗЕЦ № 10

Вопрос 1 (*требуется записать основные определения, свойства, формулировки теорем*)
(оценка 3)

Прямая в точечно-векторном пространстве: определение, параметрическое уравнение прямой, каноническое уравнение прямой, уравнение отрезка.

Вопрос 2 (*требуется решить задачу*)
(оценка 4)

Координаты совокупностей векторов {A} и {B}, записаны в столбцах матриц A и B. Определить размерности линейных подпространств L(A), L(B), L(A)+L(B) и L(A)∩L(B).

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -5 & -1 & -1 \\ -4 & -5 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Вопрос 3 (*требуется доказать теорему, утверждения, свойства,...*)
(оценка 5)

Теорема "о прямой сумме линейных подпространств".

Ответ на вопрос 2

Dim(L(A)) = 4, Dim(L(B)) = 4, Dim(L(A)&L(B)) = 3, Dim(L(A)+L(B)) = 5.