Задача 1

Доказать, что элементарные преобразования ℓ^{III} (прибавление к i-й строке матрицы её j-й строки, умноженной на число $\lambda \neq 0$) и ℓ^{IV} (перестановка местами i-й и j-й строк матрицы) могут быть реализованы с помощью набора элементарных преобразований ℓ^{I} (умножение i-й строки матрицы на число $\lambda \neq 0$) и ℓ^{II} (прибавление к i-й строке матрицы её j-й строки).

Задача 2

Даны матрицы элементарных преобразований:

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Описать преобразование, выполняемое каждой из матриц.

Ответы:

1) умножение матрицы $\mathbf{L}_1$ на матрицу $\mathbf{A}$ слева приводит к умножению третьей строки матрицы $\mathbf{A}$ на 2, а при умножении справа – к умножению третьего столбца матрицы $\mathbf{A}$ на 2;
2) умножение матрицы $\mathbf{L}_2$ на матрицу $\mathbf{A}$ слева приводит к прибавлению первой строки матрицы $\mathbf{A}$ к её третьей строке, а при умножении справа – к прибавлению третьего столбца матрицы к её первому столбцу;
3) умножение матрицы $\mathbf{L}_3$ на матрицу $\mathbf{A}$ слева приводит к прибавлению удвоенной третьей строки матрицы $\mathbf{A}$ к её второй строке, а при умножении справа – к прибавлению второго столбца матрицы $\mathbf{A}$, умноженного на 2, к третьему столбцу.

Задача 3

Записать матрицы размера 3×3 следующих элементарных преобразований:

1) перестановка второй и третьей строк;
2) прибавление первой строки, умноженной на число $\lambda \neq 0$, к третьей строке;
3) прибавления к первой строке второй и третьей строк, умноженных на 2 и 3 соответственно.

Ответы:

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача 4

Записать матрицу $\mathbf{L}_{3\times3}$ следующей последовательности элементарных преобразований:

1) перестановка первой и третьей строк;
2) прибавление третьей строки ко второй строке;
3) прибавление первой строки к третьей строке;
4) прибавление второй строки к первой строке.

Ответ:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача 5

Даны матрицы элементарных преобразований:

$$\mathbf{L}_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{L}_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{L}_3=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Записать для каждой из матриц матрицу обратного элементарного преобразования.

Ответы:

$$\mathbf{L}_1^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{L}_2^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{L}_3^{-1}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Задача 6

Определить, какие из следующих матриц являются матрицами последовательности элементарных преобразований:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}4&6&3\\1&3&1\\1&2&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3&4&7\\1&0&3\\3&2&8\end{bmatrix}.$$

Ответ: матрицей последовательности элементарных преобразований является матрица $\mathbf{A}$.

Задача 7

Даны матрицы:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&2&1\\4&5&4\\6&8&9\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&3&1\\1&7&3\\0&8&5\end{bmatrix}.$$

Представить каждую из матриц в виде произведения $\mathbf{LU}$, где $\mathbf{L}$ – нижняя треугольная матрица, $\mathbf{U}$ – верхняя треугольная матрица.

Ответы:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\2&1&0\\3&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&2&1\\0&1&2\\0&0&2\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&2&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&3&1\\0&4&2\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

Задача 8

Определить, какие из следующих утверждений являются истинными:

1) если в матрице $\mathbf{A}$ сделать перестановку строк с номерами i и j, то в матрице $\mathbf{AB}$ произойдёт перестановка строк с такими же номерами;
2) если в матрице $\mathbf{A}$ сделать перестановку столбцов с номерами i и j, то в матрице $\mathbf{AB}$ произойдёт перестановка столбцов с такими же номерами;
3) если в матрице $\mathbf{B}$ сделать перестановку строк с номерами i и j, то в матрице $\mathbf{AB}$ произойдёт перестановка строк с такими же номерами;
4) если в матрице $\mathbf{B}$ сделать перестановку столбцов с номерами i и j, то в матрице $\mathbf{AB}$ произойдёт перестановка столбцов с такими же номерами.