Задача 1

Пусть $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]^{\mathrm{T}}$ – координатный столбец вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Используя метод Лагранжа, привести квадратичную форму $A(\mathbf{x},\mathbf{x})$ к каноническому виду, найти её ранг, положительный и отрицательный индексы инерции, записать матрицу $\mathbf{S}$ перехода от базиса $\{\mathbf{e}\}$ к каноническому базису $\{\mathbf{e}'\}$ и матрицу $\mathbf{A}'$ квадратичной формы в этом базисе, если в базисе $\{\mathbf{e}\}$ она имеет вид:

1) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = -3\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_3$;
2) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 2\xi_1\xi_3 - \xi_2^2 - 2\xi_2\xi_3 + 2\xi_3^2$;
3) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = -2\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 + 4\xi_2\xi_3$.

Ответы:

1) $r = 2$, $i_+ = 1$, $i_- = 1$, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$;

2) $r = 3$, $i_+ = 1$, $i_- = 2$, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$;

3) $r = 3$, $i_+ = 2$, $i_- = 1$, $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Задача 2

Пусть $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]^{\mathrm{T}}$ – координатный столбец вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Методом Якоби привести квадратичную форму $A(\mathbf{x},\mathbf{x})$ к каноническому виду и установить её знакоопределённость, если в базисе $\{\mathbf{e}\}$ она имеет вид:

1) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \xi_1^2 - 2\xi_1\xi_3 + \xi_2^2 - 2\xi_2\xi_3 + 3\xi_3^2$;
2) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = -\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 - 3\xi_2^2 + 4\xi_2\xi_3 - 4\xi_3^2$;
3) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = -\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_2 - 2\xi_2\xi_3 + 2\xi_3^2$.

Ответы:

1) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$, $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) > 0$ для любого $\mathbf{x}$;
2) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = -\xi_1^2 - \dfrac{1}{2}\xi_2^2 - \dfrac{1}{2}\xi_3^2$, $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) < 0$ для любого $\mathbf{x}$;
3) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = -\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$, форма не является знакоопределённой.