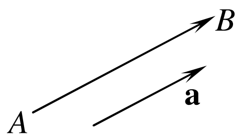
1. Векторы и элементарные операции над ними

Вектор – это упорядоченная пара точек (направленный отрезок), одна из которых называется *началом*, другая – *концом вектора*. Обозначается вектор либо одной строчной латинской буквой, например, $\mathbf{a}$, либо двумя прописными латинскими буквами (первая обозначает начало вектора, вторая – конец вектора) с чертой над ними, например, $\overline{AB}$.



Длина (*модуль*) *вектора* – это длина отрезка, соединяющего его точки, обозначается $|\overline{AB}|$ или $|\mathbf{a}|$.

Нулевой вектор (далее будет обозначаться, как $\mathbf{O}$) – это вектор, начало и конец которого совпадают, его длина, очевидно, равна 0. Вектор, длина которого равна 1, называется *единичным* или *ортом*.

Вектор лежит на прямой линии (*плоскости*), если на ней лежат его начало и конец.

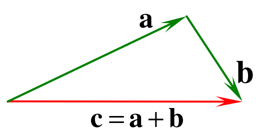
Векторы коллинеарны, если они лежат на одной и той же прямой линии или на разных параллельных прямых линиях. *Векторы компланарны*, если они лежат на одной плоскости или на разных параллельных плоскостях.

Векторы одинаково ориентированы или *сонаправлены*, если они коллинеарны и их концы располагаются по одну сторону от прямой линии, соединяющей их начала.

Векторы $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *равны*, если они:

1) коллинеарны ($\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$),
2) одинаковой длины ($|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$),
3) одинаково ориентированы ($\mathbf{a} \uparrow\uparrow \mathbf{b}$).

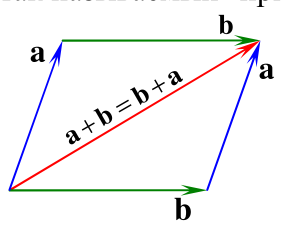
Суммой векторов $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ такой, что его начало совпадает с началом вектора $\mathbf{a}$, а конец совпадает с концом вектора $\mathbf{b}$, начало которого совмещено с концом вектора $\mathbf{a}$.

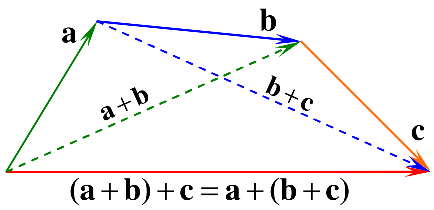


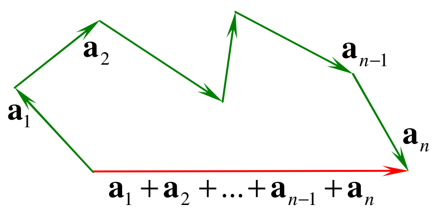
Операция сложения векторов обладает следующими свойствами:

1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$,
2) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$,
3) $\mathbf{a} + \mathbf{O} = \mathbf{O} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$,
4) для каждого вектора $\mathbf{a}$ существует противоположный вектор $\mathbf{a}'$ такой, что $\mathbf{a} + \mathbf{a}' = \mathbf{O}$.

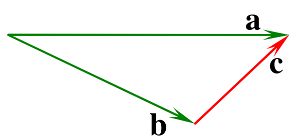
Следующие рисунки иллюстрируют два первых свойства операции сложения векторов и так называемый "принцип замыкания векторов".







Разностью векторов $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c}$ такой, что сумма $\mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{a}$. Разность векторов обозначается $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.



Теорема (о разности векторов)

Для $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}\ \exists! \mathbf{c}:\ \mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, т.е. для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ существует единственный вектор $\mathbf{c}$ такой, что $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Результатом *умножения вектора* $\mathbf{a}$ *на число* λ является вектор $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$ такой, что:

1) вектор $\mathbf{b}$ коллинеарен вектору $\mathbf{a}$,
2) длина вектора $|\mathbf{b}| = |\lambda| \cdot |\mathbf{a}|$,
3) векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ сонаправлены при $\lambda > 0$ и разнонаправлены при $\lambda < 0$.

Операция умножения вектора на число обладает следующими свойствами:

1) $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$
2) $\lambda(\mu\mathbf{a}) = (\lambda\mu)\mathbf{a}$,
3) $(\lambda + \mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}$,
4) $\lambda(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$.

Теорема (о коллинеарных векторах)

Для $\forall \mathbf{a} \neq \mathbf{O}$ и $\forall \mathbf{b} \parallel \mathbf{a}$ $\exists\lambda$: $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, т.е. для любого ненулевого вектора $\mathbf{a}$ и коллинеарного ему вектора $\mathbf{b}$ существует число λ такое, что $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$.

2. Линейная зависимость векторов

Выражение $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_n\mathbf{a}_n$ называется *линейной комбинацией векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – *коэффициентами линейной комбинации.*

Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называются *линейно зависимыми*, если существуют не равные одновременно нулю числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ такие, что $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{O}$.

Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называются *линейно независимыми*, если их линейная комбинация $\lambda_1\mathbf{a}_1 + \lambda_2\mathbf{a}_2 + ... + \lambda_n\mathbf{a}_n = \mathbf{O}$ только, если $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Элементарными преобразованиями совокупности векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называются:

1) умножение одного из векторов совокупности на число $\lambda \neq 0$,
2) прибавление одного вектора совокупности к другому.

Замечание: требование $\lambda \neq 0$ гарантирует обратимость элементарных преобразований.

Теорема (о линейной зависимости)

Справедливы следующие утверждения:

1. Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них может быть представлен в виде линейной комбинации других векторов.
2. Если среди векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ имеется нулевой вектор, то они линейно зависимы.
3. Если какая-то часть из совокупности векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно зависима, то и вся совокупность векторов линейно зависима.
4. Если совокупность векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ линейно независима, то и любая её часть линейно независима.
5. В результате элементарных преобразований линейно (не)зависимая совокупность векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ остаётся линейно (не)зависимой.

Теорема (о признаках линейной зависимости)

Справедливы следующие утверждения:

1. Один вектор линейно зависимы тогда и только тогда, когда он нулевой.
2. Два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны.
3. Три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.
4. Любые четыре вектора линейно зависимы.

Следствия (признаки линейной независимости)

1. Один вектор линейно независим тогда и только тогда, когда он не нулевой.
2. Два вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они неколлинеарны.
3. Три вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они некомпланарны.