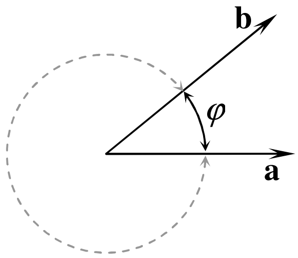
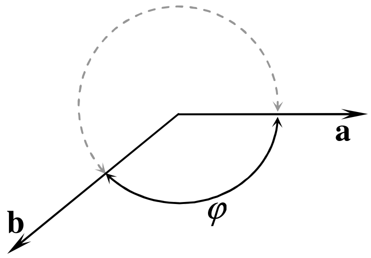
1. Некоторые полезные определения и формулы

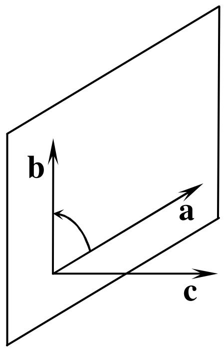
Углом между приведёнными к общему началу векторами $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ называется наименьший угол, на который необходимо повернуть вектор $\mathbf{a}$, чтобы его направление совпало с направлением вектора $\mathbf{b}$.





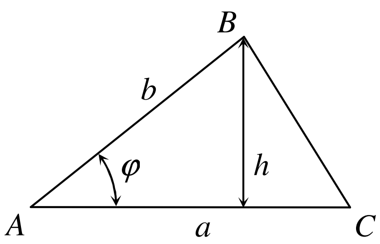
Три вектора называются *упорядоченной тройкой векторов*, если указано, какой из векторов является первым, какой – вторым, какой – третьим.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ называется *правой* (*левой*), если после приведения к общему началу вектор $\mathbf{c}$ располагается по ту сторону плоскости, определяемой векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, откуда кратчайший поворот от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$ осуществляется против часовой стрелки.

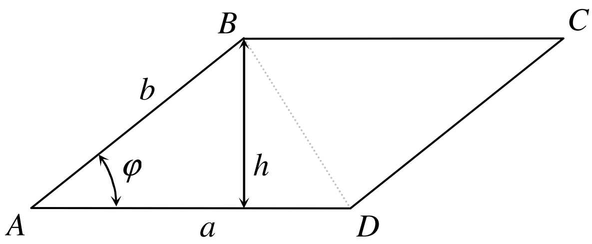


Заметим, что если тройка векторов $\mathbf{abc}$ является правой, то правыми также являются тройки $\mathbf{bca}$ и $\mathbf{cab}$, а тройки $\mathbf{bac}$, $\mathbf{acb}$ и $\mathbf{cba}$ – являются левыми.

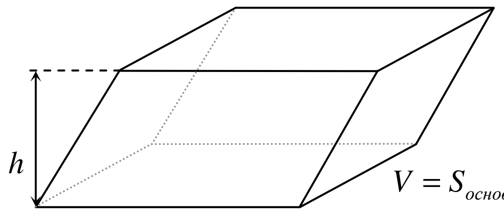
Площади треугольника и параллелограмма и объём параллелепипеда могут быть вычислены по следующим формулам:



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin(\varphi)$$



$$S_{ABCD} = a \cdot h = a \cdot b \cdot \sin(\varphi)$$



$$V = S_{основания} \cdot h$$

2. Скалярное произведение

Скалярным произведением векторов $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ называется число $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos(\varphi)$, где φ – угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Так как $\mathrm{Pr}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}) = |\mathbf{a}|\cdot\cos(\varphi)$ и $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = |\mathbf{b}|\cdot\cos(\varphi)$, то имеем $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|\cdot\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = |\mathbf{b}|\cdot\mathrm{Pr}_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})$.

2.1. Геометрические свойства скалярного произведения

1. $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны.
2. $(\mathbf{a},\mathbf{b}) > 0$ тогда и только тогда, когда угол φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ острый;
   $(\mathbf{a},\mathbf{b}) < 0$ тогда и только тогда, когда угол φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ тупой.

2.2. Алгебраические свойства скалярного произведения

1. $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b},\mathbf{a})$.
2. $(\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a},\mathbf{b})$ и $(\mathbf{a},\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a},\mathbf{b})$.
3. $(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{c}) + (\mathbf{b},\mathbf{c})$ и $(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{b}) + (\mathbf{a},\mathbf{c})$.
4. Для $\forall\mathbf{a} \neq \mathbf{O}$ $(\mathbf{a},\mathbf{a}) > 0$ и $(\mathbf{a},\mathbf{a}) = \mathbf{O}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} = \mathbf{O}$.

2.3. Скалярное произведение векторов в декартовой прямоугольной системе координат

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат $\mathbf{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$ и $\mathbf{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$, тогда $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$.

3. Векторное произведение

Векторным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c} = [\mathbf{a},\mathbf{b}]$, такой что:

1. $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\sin(\varphi)$.
2. Вектор $\mathbf{c}$ ортогонален плоскости, определяемой векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ($\mathbf{c}\perp\mathbf{a}$, $\mathbf{c}\perp\mathbf{b}$).
3. Тройка векторов $\mathbf{abc}$ является правой.

3.1. Геометрические свойства векторного произведения

1. $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \mathbf{O}$ тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны.
2. Длина вектора $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ равна площади параллелограмма, построенного на приведённых к общему началу векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

3.2. Алгебраические свойства векторного произведения

1. $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = -[\mathbf{b},\mathbf{a}]$.
2. $[\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}] = \lambda[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ и $[\mathbf{a},\lambda\mathbf{b}] = \lambda[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.
3. $[\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}] = [\mathbf{a},\mathbf{c}] + [\mathbf{b},\mathbf{c}]$ и $[\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c}] = [\mathbf{a},\mathbf{c}] + [\mathbf{b},\mathbf{c}]$.
4. Для $\forall\mathbf{a}$ $[\mathbf{a},\mathbf{a}] = \mathbf{O}$.

3.3. Векторное произведение векторов в декартовой прямоугольной системе координат

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат $\mathbf{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$ и $\mathbf{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$, тогда

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = (y_a z_b - y_b z_a)\mathbf{i} + (x_b z_a - x_a z_b)\mathbf{j} + (x_a y_b - x_b y_a)\mathbf{k}.$$

Определитель в этой формуле является символической формой записи.

4. Смешанное произведение

Смешанным произведением векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ называется число $([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c})$.

4.1. Геометрические свойства смешанного произведения

1. $([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}) = V$, где V – объём параллелепипеда, построенного на приведённых к общему началу векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, взятый со знаком "+", если тройка векторов $\mathbf{abc}$ является правой, и со знаком "–" в противном случае.
2. $([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны.

4.2. Алгебраические свойства смешанного произведения

1. $([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}) = (\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}])$.

4.3. Смешанное произведение векторов в декартовой прямоугольной системе координат

Пусть в декартовой прямоугольной системе координат $\mathbf{a} = \{x_a, y_a, z_a\}$, $\mathbf{b} = \{x_b, y_b, z_b\}$ и $\mathbf{c} = \{x_c, y_c, z_c\}$ тогда

$$([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$