1. Определитель

Прямоугольная таблица чисел называется *матрицей*.

Матрицы принято обозначать прописными латинскими буквами, а элементы матриц – строчными с указанием индексов, при этом первый индекс, обычно, означает номер строки, в которой расположен элемент, а второй индекс – номер столбца, например:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \| \, a_{ij} \, \|, \text{ где } i=1,2,3 \text{ и } j=1,2,3,4 .$$

Матрица называется *квадратной*, если у неё количество строк равно количеству столбцов.

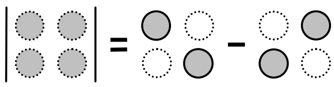
Определителем квадратной матрицы размера 2×2 называется число

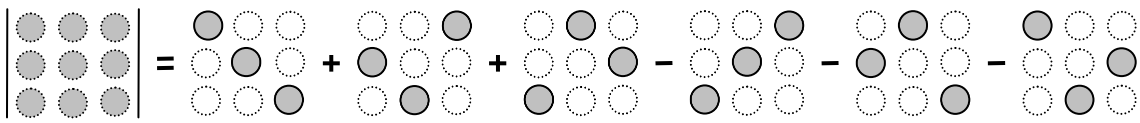
$$|\,\mathbf{A}\,| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12} .$$

Определителем квадратной матрицы размера 3×3 называется число

$$|\,\mathbf{A}\,| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + a_{21}\,a_{32}\,a_{13} + a_{31}\,a_{12}\,a_{23} - a_{11}\,a_{32}\,a_{23} - a_{21}\,a_{12}\,a_{33} - a_{31}\,a_{22}\,a_{13} .$$

Следующие "схемы" помогут запомнить формулы вычисления определителей:





2. Свойства определителей

Непосредственными вычислениями легко проверяется истинность следующих свойств определителей:

1. Если элементы матрицы переписать так, что элементы первого столбца окажутся расположенными в первой строке, элементы второго столбца – во второй строке и т.д., то определитель получившейся матрицы буден равен определителю исходной матрицы, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} .$$

Следствием данного свойства является то, что свойства определителя, сформулированные в терминах строк, остаются справедливыми при формулировке в терминах столбцов. Поэтому далее все свойства будут формулироваться только в терминах строк.

2. Если все элементы одной из строк матрицы равны нулю, то её определитель равен нулю, например

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

3. Если все элементы одной из строк матрицы умножить на одно число λ, то определитель получившейся матрицы будет равен определителю исходной матрицы, умноженному на это число, например,

$$\begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda |\mathbf{A}| \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda |\mathbf{A}|.$$

4. Если в матрице любые две строки переставить местами, то определитель получившейся матрицы будет равен определителю исходной матрицы, умноженному на -1, например,

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = -|\mathbf{A}| \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} = -|\mathbf{A}|.$$

Следствием этого свойства является то, что, если в матрице имеется две одинаковые строки, то её определитель равен нулю.

5. Если все элементы i-й строки матрицы представимы в виде $\lambda c_{ij} + \mu d_{ij}$, то её определитель равен сумме умноженных на числа λ и μ определителей матриц, полученных из исходной матрицы путём замены элементов i-й строки на числа c_{ij} и d_{ij}, например,

$$\begin{vmatrix} \lambda c_{11} + \mu d_{11} & \lambda c_{12} + \mu d_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \lambda c_{11} + \mu d_{11} & \lambda c_{12} + \mu d_{12} & \lambda c_{13} + \mu d_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Следствием этого и предыдущего свойства является то, что, если к элементам j-й строки прибавить элементы i-й строки, умноженные на одно и то же число λ, то определитель получившееся матрицы будет равен определителю исходной матрицы, например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + \lambda a_{11} & a_{22} + \lambda a_{12} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + \lambda a_{11} & a_{22} + \lambda a_{12} & a_{23} + \lambda a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3. Применение определителей для решения систем линейных уравнений

Решение системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

может быть найдено с помощью формул: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$ и $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$,

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{21} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

Решение системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

может быть найдено с помощью формул: $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$ и $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$,

где $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

Существенным условием применимости формул является требование $\Delta \neq 0$.