Пусть оператор $A(\mathbf{x})$ действует в линейном пространстве L размерности n.

Число λ и вектор $\mathbf{x} \neq \mathbf{O}$ – называются соответственно *собственным значением* и *собственным вектором* оператора $A(\mathbf{x})$, если $A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$.

Замечание. В уравнении $A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ неизвестными являются и число λ и вектор $\mathbf{x}$.

Теорема (о характеристическом уравнении)

Число λ является собственным значением линейного оператора $A(\mathbf{x})$, действующего в линейном пространстве L, тогда и только тогда, когда оно является корнем *характеристического уравнения*

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = 0,$$

где $\mathbf{A}$ – матрица линейного оператора в произвольном базисе и $\mathbf{E}$ – единичная матрица размера $n \times n$.

Замечание 1. Выражение, стоящее в левой части характеристического уравнения, представляет собой полином степени n, т.е.

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \ldots + a_{n-1}\lambda^{n-1} + (-1)^n \lambda^n,$$

где коэффициенты a_i – это суммы всех *диагональных миноров* матрицы оператора порядка $n-i$, взятых со знаком $(-1)^i$, в частности $a_0 = |\mathbf{A}|$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1} tr(\mathbf{A})$.

Замечание 2. Если линейный оператор действует в комплексном линейном пространстве, то по основной теореме линейной алгебры его характеристический полином имеет, по крайней мере, один корень, т.е. оператор имеет хотя бы одно собственное значение и, значит, хотя бы один собственный вектор.

Замечание 3. Если линейный оператор действует в вещественном линейном пространстве, то всякое его собственное значение является корнем характеристического уравнения, но не всякий корень характеристического уравнения является его собственным значением (т.к. корень может оказаться комплексным).

Нахождение собственных векторов линейного оператора

Пусть $\mathbf{x}$ – собственный вектор линейного оператора $A(\mathbf{x})$, соответствующий собственному значению λ, и пусть $\mathbf{A}$ и ξ – матрица линейного оператора и координатный столбец вектора $\mathbf{x}$ в некотором базисе $\{\mathbf{e}\}$ соответственно, тогда из равенства $A(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$ следует равенство $\mathbf{A}\xi = \lambda \xi$, из которого следует, что координатный столбец собственного вектора, соответствующего собственному значению λ, должен является решением однородной системы

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\xi = \mathbf{O}.$$

Итак, чтобы найти все собственные значения и собственные векторы линейного оператора необходимо:

1) найти все корни характеристического уравнения $|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}| = 0$;
2) для каждого найденного собственного значения λ, найти все решения однородной системы $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E})\xi = \mathbf{O}$.

Множество $L_\lambda = \{\mathbf{x} : A(\mathbf{x}) = \lambda\,\mathbf{x}\} \cup \{\mathbf{O}\}$ называется *собственным подпространством линейного оператора* $A(\mathbf{x})$, *соответствующим собственному значению* λ.

Теорема (о собственном подпространстве)
Пусть линейный оператор $A(\mathbf{x})$ действует в линейном пространстве L размерности n, тогда справедливы следующие утверждения:

1) всякое собственное подпространство L_λ является линейным подпространством пространства L;
2) размерность собственного подпространства L_λ не превосходит кратности соответствующего собственного значения λ;
3) собственные векторы оператора $A(\mathbf{x})$, соответствующие различным собственным значениям, линейно независимы;
4) линейный оператор, действующий в линейном пространстве размерности n не может иметь более n различных собственных значений.

Диагональный вид матрицы линейного оператора
Пусть у линейного оператора $A(\mathbf{x})$, действующего в вещественном линейном пространстве L, имеется n попарно различных собственных значений, тогда у него имеется n линейно независимых собственных векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2, \ldots$, $\mathbf{x}_n$, которые можно выбрать в качестве базисных. Пусть ξ_1, $\xi_2, \ldots$, ξ_n – их координатные столбцы в некотором базисе $\{\mathbf{e}\}$, тогда матрица $\mathbf{S} = [\xi_1 \,|\, \xi_2 \,|\ldots|\, \xi_n]$ – это матрица перехода от базиса $\{\mathbf{e}\}$ к базису из собственных векторов $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n\}$. Пусть $\mathbf{A}$ – матрица оператора в базисе $\{\mathbf{e}\}$, рассмотрим следующую цепочку равенств

$$\mathbf{A}\,\mathbf{S} = \mathbf{A}[\xi_1 \,|\, \xi_2 \,|\ldots|\, \xi_n] = [\mathbf{A}\,\xi_1 \,|\, \mathbf{A}\,\xi_2 \,|\ldots|\, \mathbf{A}\,\xi_n] = [\lambda_1\xi_1 \,|\, \lambda_2\xi_2 \,|\ldots|\, \lambda_n\xi_n] = \mathbf{S}\,\mathbf{\Lambda},$$

где $\mathbf{\Lambda} = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ – диагональная матрица, составленная из собственных значений оператора. Из полученного равенства следует, что

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\,\mathbf{S},$$

т.е. в базисе из собственных векторов матрица оператора имеет диагональный вид.

Замечание 1. Если все корни характеристического уравнения линейного оператора, действующего в вещественном линейном пространстве, оказались комплексными, то у оператора нет собственных значений и нет собственных векторов.
Замечание 2. Если все корни характеристического уравнения линейного оператора, действующего в вещественном пространстве, оказались вещественными, но среди них имеются кратные, то ответить на вопрос, существует ли базис пространства из собственных векторов, в котором матрица оператора будет диагональной, можно только найдя все его собственные векторы. Если окажется, что каждому собственному значению соответствует столько же линейно независимых собственных векторов, какова его кратность, то такой базис построить можно, в этом случае оператор называется *оператором простой структуры*.