Скалярные функции векторного аргумента

Линейная форма

Числовая функция $f(\mathbf{x})$ векторного аргумента $\mathbf{x}$, принадлежащего линейному пространству L, называется *линейной формой*, если она обладает следующими свойствами:

1) $f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$ для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из L;
2) $f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda f(\mathbf{x})$ для любого вектора $\mathbf{x}$ из L и числа λ.

Замечание. Обычно свойства 1) и 2) записывают в компактном виде:

$$f(\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}) = \lambda f(\mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{y}) \text{ для любых векторов } \mathbf{x} \text{ и } \mathbf{y} \text{ из } L \text{ и чисел } \lambda \text{ и } \mu.$$

Билинейная форма

Числовая функция двух векторных аргументов $A(\mathbf{x},\mathbf{y})$ из линейного пространства L называется *билинейной формой*, если она обладает следующими свойствами:

1) $A(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z}) = A(\mathbf{x},\mathbf{z}) + A(\mathbf{y},\mathbf{z})$ для любых векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ из L;
2) $A(\lambda \mathbf{x},\mathbf{y}) = \lambda A(\mathbf{x},\mathbf{y})$ для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из L и числа λ;
3) $A(\mathbf{x},\mathbf{y}+\mathbf{z}) = A(\mathbf{x},\mathbf{y}) + A(\mathbf{x},\mathbf{z})$ для любых векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ из L;
4) $A(\mathbf{x},\lambda \mathbf{y}) = \lambda A(\mathbf{x},\mathbf{y})$ для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из L и числа λ.

Таким образом, билинейная форма является линейной формой по одному аргументу при фиксированном значении другого аргумента.

Квадратичная форма

Если в билинейной форме $A(\mathbf{x},\mathbf{y})$ вектор $\mathbf{y}$ заменить на вектор $\mathbf{x}$, то получившаяся числовая функция $A(\mathbf{x},\mathbf{x})$ называется *квадратичной формой*.

Замечание 1. Билинейная форма называется *симметричной*, если для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеет место равенство $A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = A(\mathbf{y},\mathbf{x})$.

Замечание 2. Квадратичная форма может порождаться разными билинейными формами. Действительно, пусть $A(\mathbf{x},\mathbf{y})$ – произвольная билинейная форма. Нетрудно убедиться, что

$$\tilde{A}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left[A(\mathbf{x},\mathbf{y}) + A(\mathbf{y},\mathbf{x})\right]$$

является симметричной билинейной формой, а порождаемая ей квадратичная форма имеет вид

$$\tilde{A}(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\left[A(\mathbf{x},\mathbf{x}) + A(\mathbf{x},\mathbf{x})\right] = A(\mathbf{x},\mathbf{x}),$$

т.е. совпадает с квадратичной формой порождаемой исходной формой $A(\mathbf{x},\mathbf{y})$.

Замечание 3. Из предыдущего замечания следует, что зная вид квадратичной формы, в общем случае нельзя восстановить породившую её билинейную форму, кроме случая, когда известно, что порождающая билинейная форма была симметричной. Действительно, пусть известно, что породившая квадратичную форму $A(\mathbf{x},\mathbf{x})$ билинейная форма $A(\mathbf{x},\mathbf{y})$ является симметричной, тогда

$$A(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A(\mathbf{x},\mathbf{x}) + 2A(\mathbf{x},\mathbf{y}) + A(\mathbf{y},\mathbf{y}),$$

откуда получаем, что

$$A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}[A(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{x}+\mathbf{y}) - A(\mathbf{x},\mathbf{x}) - A(\mathbf{y},\mathbf{y})],$$

т.е. билинейная форма $A(\mathbf{x},\mathbf{y})$ однозначно определяется по значениям порождённой ею квадратичной формы $A(\mathbf{x},\mathbf{x})$.

Замечание 4. Из двух предыдущих замечаний следует, что без потери общности можно считать, что всякая квадратичная форма порождается симметричной билинейной формой.

Примеры

1. В произвольном линейном пространстве L числовая функция $f(\mathbf{x}) \equiv 0$ для любого вектора $\mathbf{x}$ является линейной формой.
2. В произвольном линейном пространстве L числовая функция $A(\mathbf{x},\mathbf{y}) \equiv 0$ для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ является билинейной формой.
3. Всякая линейная форма $f(\mathbf{x})$ является линейным отображением линейного пространства L на множество вещественных чисел R.
4. В векторных пространствах V_2 или V_3 числовая функция $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a},\mathbf{x})$ – скалярное произведение вектора $\mathbf{x}$ на фиксированный вектор $\mathbf{a}$, является линейной формой.
5. В векторных пространствах V_2 или V_3 числовая функция $A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (\mathbf{x},\mathbf{y})$ – скалярное произведение векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, является билинейной формой.
6. В произвольном линейном пространстве числовая функция $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = (\mathbf{x},\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\|^2$ является квадратичной формой.
7. В пространстве R_n функция $A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{y}$ является билинейной формой.
8. В пространстве квадратных матриц размера $n \times n$ числовая функция $f(\mathbf{x}) = tr(\mathbf{x})$ является линейной формой.
9. В пространстве непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций интеграл
   $$f(\mathbf{x}) = \int_a^b \mathbf{x}(t)dt$$
   является линейной формой.
10. В пространстве непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций интеграл
   $$A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \int_a^b \mathbf{x}(t)\mathbf{y}(t)dt$$
   является билинейной формой.

Координатная (матричная) форма записи функций векторного аргумента

Пусть в линейном пространстве L выбран базис $\{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ и пусть в этом базисе векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ имеют координаты: $\mathbf{x} = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ и $\mathbf{y} = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n\}$, т.е.

$$\mathbf{x} = \xi_1\mathbf{e}_1 + \xi_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \xi_n\mathbf{e}_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j \mathbf{e}_j \quad \text{и} \quad \mathbf{y} = \eta_1\mathbf{e}_1 + \eta_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \eta_n\mathbf{e}_n = \sum_{j=1}^{n} \eta_j \mathbf{e}_j .$$

Обозначим через $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ координатные столбцы векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ соответственно, т.е.

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}.$$

Заменяя в линейной форме $f(\mathbf{x})$ вектор $\mathbf{x}$ его разложением по базису, получим

$$f(\mathbf{x}) = f\left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j f(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j \xi_j = \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\xi},$$

где $\boldsymbol{\varphi} = [\varphi_1 \ \varphi_2 \ \cdots \ \varphi_n]$ – вектор-строка коэффициентов линейной формы, элементы которой $\varphi_j = f(\mathbf{e}_j)$ представляют собой значения линейной формы на базисных векторах.

Заменяя в билинейной форме $A(\mathbf{x},\mathbf{y})$ векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ их разложениями по базису, получим

$$A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = A\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j \mathbf{e}_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j A(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j a_{ij} = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{\eta},$$

где $\mathbf{A} = \| a_{ij} \|$ – матрица коэффициентов билинейной формы, элементы которой $a_{ij} = A(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)$ – это значения билинейной формы на базисных векторах.

Замечание. Если билинейная форма $A(\mathbf{x},\mathbf{y})$ – симметричная, т.е. $A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = A(\mathbf{y},\mathbf{x})$ для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, тогда $a_{ij} = A(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j) = A(\mathbf{e}_j,\mathbf{e}_i) = a_{ji}$, т.е. $\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}$. Таким образом, матрица симметричной билинейной формы является симметричной в любом базисе.

Преобразование матриц функций векторного аргумента при смене базиса

Пусть $\mathbf{S}$ – матрица перехода от старого базиса $\{\mathbf{e}\}$ к новому базису $\{\mathbf{e}'\}$ пространства L и $\mathbf{T}$ – матрица перехода от старого базиса $\{\tilde{\mathbf{e}}\}$ к новому базису $\{\tilde{\mathbf{e}}'\}$ пространства M. Пусть $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ – координатные столбцы векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в старом базисе $\{\mathbf{e}\}$, а $\boldsymbol{\xi}'$ и $\boldsymbol{\eta}'$ – их координатные столбцы в новом базисе $\{\mathbf{e}'\}$. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{S}\boldsymbol{\xi}', \quad \boldsymbol{\eta} = \mathbf{S}\boldsymbol{\eta}'.$$

Заменяя в матричной записи линейной формы координатный столбец $\boldsymbol{\xi}$ на его выражение через координатный столбец $\boldsymbol{\xi}'$, получим

$$f(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\varphi}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{S}\boldsymbol{\xi}' = \boldsymbol{\varphi}'\boldsymbol{\xi}',$$

где $\boldsymbol{\varphi}' = \boldsymbol{\varphi}\mathbf{S}$ – вектор-строка коэффициентов линейной формы $f(\mathbf{x})$ в новом базисе $\{\mathbf{e}'\}$.

Заменяя в матричной записи билинейной формы координатные столбцы $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\eta}$ на их выражения через координатные столбцы $\boldsymbol{\xi}'$ и $\boldsymbol{\eta}'$, получим

$$A(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}'^{\mathrm{T}}\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{S}\boldsymbol{\eta}' = \boldsymbol{\xi}'^{\mathrm{T}}\mathbf{A}'\boldsymbol{\eta}',$$

где $\mathbf{A}' = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{S}$ – матрица билинейной формы $A(\mathbf{x},\mathbf{y})$ в новом базисе $\{\mathbf{e}'\}$.