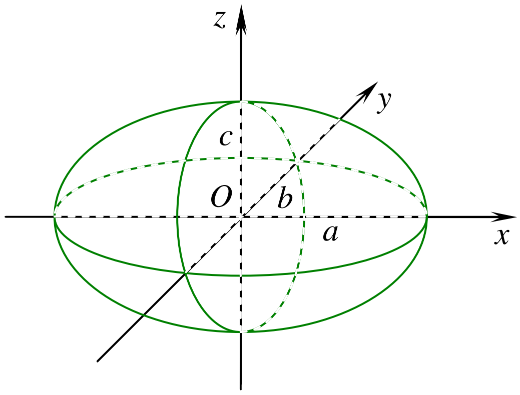
Эллипсоид

Эллипсоид – это поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$



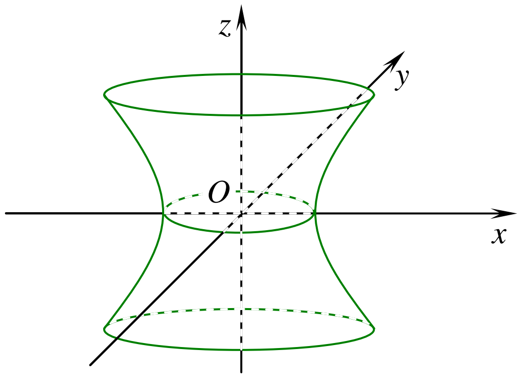
Свойства эллипсоида:

1. У поверхности имеется три плоскости симметрии (плоскости Oxy, Oxz и Oyz), три оси симметрии (оси абсцисс, ординат и аппликат) и один центр симметрии (начало координат).
2. Координаты точки $M(x,y,z)$, принадлежащей поверхности, удовлетворяют следующим неравенствам: $|x|\le a$, $|y|\le b$ и $|z|\le c$.
3. Точки $A_1(-a,0,0)$, $A_2(a,0,0)$, $B_1(0,-b,0)$, $B_2(0,b,0)$, $C_1(0,0,-c)$ и $C_2(0,0,c)$ называются *вершинами эллипсоида*.
4. Линии пересечения эллипсоида с плоскостями, параллельными плоскостям Oxy, Oxz и Oyz, являются эллипсами.
   Например, при $z=\tilde{z}$ имеем эллипс с уравнением
   $$\frac{x^2}{\tilde{a}^2}+\frac{y^2}{\tilde{b}^2}=1,\text{ где } \tilde{a}=a\sqrt{1-\frac{\tilde{z}^2}{c^2}},\ \tilde{b}=b\sqrt{1-\frac{\tilde{z}^2}{c^2}}.$$
5. При $a=b=c$ эллипсоид превращается в сферу с радиусом a.

Однополостный гиперболоид

Однополостный гиперболоид – это поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$



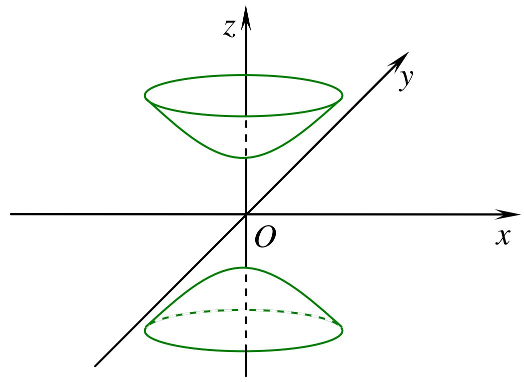
Свойства однополостного гиперболоида:

1. У поверхности имеется три плоскости симметрии (плоскости Oxy, Oxz и Oyz), три оси симметрии (оси абсцисс, ординат и аппликат) и один центр симметрии (начало координат).
2. Линия пересечения однополостного гиперболоида с плоскостью $z=\tilde{z}$ является эллипсом с уравнением
$$\frac{x^2}{\tilde{a}^2}+\frac{y^2}{\tilde{b}^2}=1,\text{ где } \tilde{a}=a\sqrt{1+\frac{\tilde{z}^2}{c^2}},\ \tilde{b}=b\sqrt{1+\frac{\tilde{z}^2}{c^2}}.$$
При $\tilde{z}=0$ уравнение эллипса примет вид
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$
Этот эллипс называется *горловым эллипсом*, т.к. является самым узким местом поверхности.
3. Линии пересечения однополостного гиперболоида с плоскостями, параллельными плоскостям Oxz и Oyz, являются либо гиперболами, либо пересекающимися прямыми линиями.
Например, при $x=\tilde{x}$, имеем гиперболы с уравнениями
$$\frac{y^2}{\tilde{b}^2}-\frac{z^2}{\tilde{c}^2}=1 \text{ при } |\tilde{x}|<a,\text{ где } \tilde{b}=b\sqrt{1-\frac{\tilde{x}^2}{a^2}},\ \tilde{c}=c\sqrt{1-\frac{\tilde{x}^2}{a^2}},$$
$$\frac{y^2}{\tilde{b}^2}-\frac{z^2}{\tilde{c}^2}=-1 \text{ при } |\tilde{x}|>a,\text{ где } \tilde{b}=b\sqrt{\frac{\tilde{x}^2}{a^2}-1},\ \tilde{c}=c\sqrt{\frac{\tilde{x}^2}{a^2}-1};$$
при $x=\tilde{x}=a$ имеем пару пересекающихся прямых с уравнениями
$$\frac{y}{b}\pm\frac{z}{c}=0.$$

Двуполостный гиперболоид

Двуполостный гиперболоид – это поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 .$$



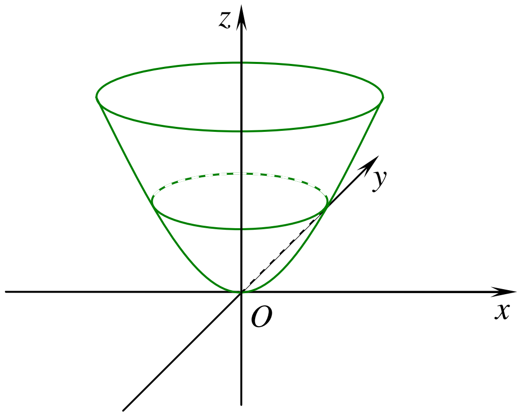
Свойства двуполостного гиперболоида:

1. У поверхности имеется три плоскости симметрии (плоскости Oxy, Oxz и Oyz), три оси симметрии (оси абсцисс, ординат и аппликат) и один центр симметрии (начало координат).
2. Координата z точки $M(x, y, z)$, принадлежащей поверхности, по модулю не меньше c. При $|z|=c$ поверхность пересекается с осью Oz в точках $C_1(0,0,-c)$ и $C_2(0,0,c)$.
3. Линия пересечения однополостного гиперболоида с плоскостью $z=\tilde{z}$ при $|z|>c$ является эллипсом с уравнением
$$\frac{x^2}{\tilde{a}^2}+\frac{y^2}{\tilde{b}^2}=1, \text{ где } \tilde{a}=a\sqrt{\frac{\tilde{z}^2}{c^2}-1}\,,\ \tilde{b}=b\sqrt{\frac{\tilde{z}^2}{c^2}-1}\,.$$
4. Линии пересечения однополостного гиперболоида с плоскостями, параллельными плоскостям Oxz и Oyz, являются гиперболами.
   Например, при $x=\tilde{x}$ имеем гиперболу с уравнением
$$\frac{y^2}{\tilde{b}^2}-\frac{z^2}{\tilde{c}^2}=-1, \text{ где } \tilde{b}=b\sqrt{1+\frac{\tilde{x}^2}{a^2}}\,,\ \tilde{c}=c\sqrt{1+\frac{\tilde{x}^2}{a^2}}\,.$$

Эллиптический параболоид

Эллиптический параболоид – это поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2z\,.$$



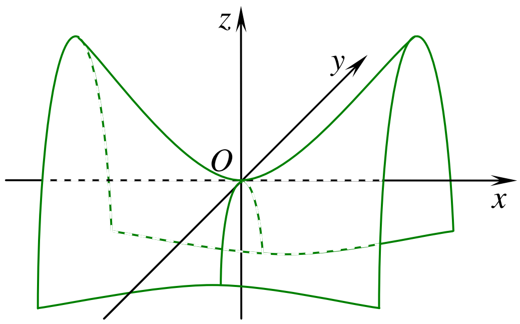
Свойства эллиптического параболоида:

1. У поверхности имеется две плоскости симметрии (плоскости Oxz и Oyz) и одна ось симметрии (ось аппликат).
2. Координата z точки $M(x,y,z)$, принадлежащей поверхности, неотрицательна.
3. Точка $O(0,0,0)$ принадлежит поверхности.
4. Линия пересечения эллиптического параболоида с плоскостью $z=\tilde{z}$ является эллипсом с уравнением
$$\frac{x^2}{\tilde{a}^2}+\frac{y^2}{\tilde{b}^2}=1\text{, где } \tilde{a}=\sqrt{2p\,\tilde{z}}\,,\ \tilde{b}=\sqrt{2q\,\tilde{z}}\,.$$
5. Линии пересечения эллиптического параболоида с плоскостями, параллельными плоскостям Oxz и Oyz, являются параболами.
   Например, при $x=\tilde{x}\neq 0$ имеем параболу с уравнением
$$y^2=2q\tilde{z}\text{, где } \tilde{z}=z-\frac{\tilde{x}^2}{2p};$$
   при $x=\tilde{x}=0$ получаем уравнение $y^2=2qz$.

Гиперболический параболоид

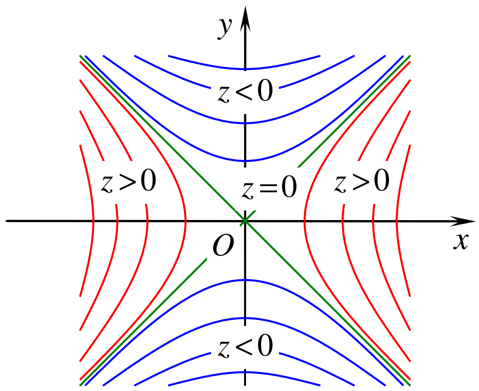
Гиперболический параболоид – это поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет вид

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z.$$



Свойства гиперболического параболоида:

1. У поверхности имеется две плоскости симметрии (плоскости Oxz и Oyz) и одна ось симметрии (ось аппликат).
2. Точка $O(0,0,0)$ принадлежит поверхности.
3. Линия пересечения гиперболического параболоида с плоскостью $z=\tilde{z}$ при $\tilde{z}\neq 0$ является гиперболой с уравнением
   $$\frac{x^2}{\tilde{a}^2}-\frac{y^2}{\tilde{b}^2}=1 \text{ при } \tilde{z}>0, \text{ где } \tilde{a}=\sqrt{2p\tilde{z}},\ \tilde{b}=\sqrt{2q\tilde{z}},$$
   $$\frac{x^2}{\tilde{a}^2}-\frac{y^2}{\tilde{b}^2}=-1 \text{ при } \tilde{z}<0, \text{ где } \tilde{a}=\sqrt{-2p\tilde{z}},\ \tilde{b}=\sqrt{-2q\tilde{z}}.$$
   При $\tilde{z}=0$ линия пересечения гиперболического параболоида с плоскостью вырождается в пару пересекающихся прямых линий
   $$\frac{x}{\sqrt{p}}\pm\frac{y}{\sqrt{q}}=0.$$
   Линии уровней поверхности при различных значениях переменной z имеют вид



4. Линии пересечения эллиптического параболоида с плоскостями, параллельными плоскостям Oxz и Oyz, являются параболами с уравнениями:
   $$\text{при } y=\tilde{y}\quad x^2=2p\tilde{z}, \text{ где } \tilde{z}=z+\frac{\tilde{y}^2}{2q} \text{ и при } x=\tilde{x}\quad y^2=-2q\tilde{z}, \text{ где } \tilde{z}=z-\frac{\tilde{x}^2}{2p}.$$
   При $\tilde{y}=0$ и $\tilde{x}=0$ уравнения принимают вид $x^2=2pz$ и $y^2=-2qz$.
   Заметим, что точка $O(0,0,0)$ является точкой минимума первой и точкой максимума второй параболы. Такая точка называется *седловой точкой*.

Цилиндрические поверхности

Ранее было показано, что цилиндрическая поверхность с образующей, параллельной оси Oz, описывается уравнением $F(x, y) = 0$. Если функция $F(x, y)$ является полиномом второго порядка, то поверхность называется *цилиндром второго порядка*.

Линия пересечения цилиндра второго порядка с координатной плоскостью Oxy описывается системой уравнений

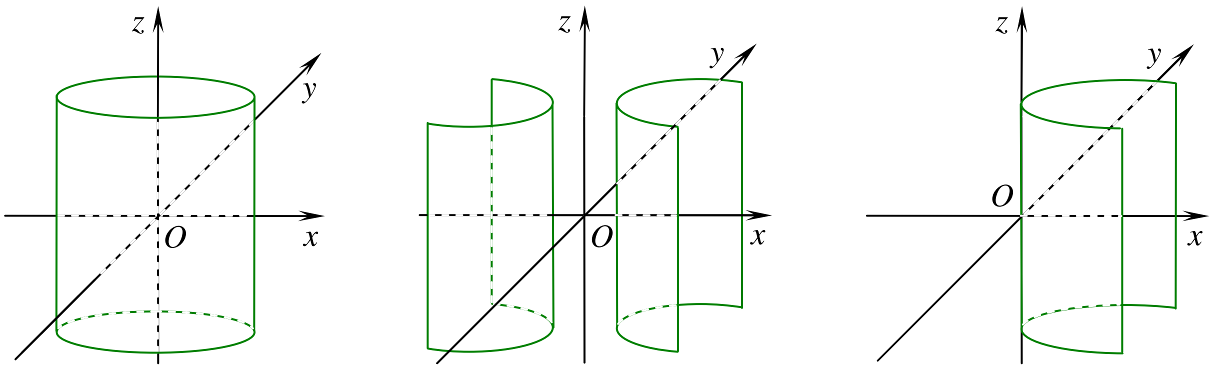
$$F(x, y) = 0,\ z = 0.$$

В зависимости от типа линии, получаемой в результате пересечения, поверхности делят на три типа:

1. *Эллиптический цилиндр*, определяемый уравнением
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2. *Гиперболический цилиндр*, определяемый уравнением
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3. *Параболический цилиндр*, определяемый уравнением
$$y^2 = 2px.$$



Свойства цилиндра второго порядка:

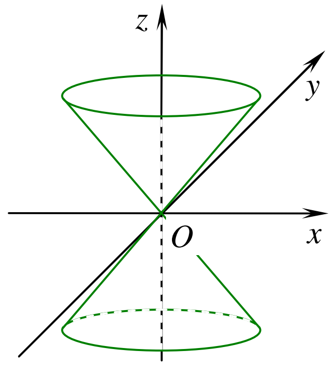
1. У эллиптического и гиперболического цилиндров имеется три плоскости симметрии (плоскости Oxy, Oxz и Oyz), три оси симметрии (оси абсцисс, ординат и аппликат) и один центр симметрии (начало координат).
   У параболического цилиндра имеется две плоскости симметрии (плоскости Oxy, Oxz) и одна ось симметрии (ось абсцисс).

Конические поверхности

Ранее было показано, что коническая поверхность описывается уравнением $F(x,y,z)=0$, где функция $F(x,y,z)$ является однородной функцией степени s, т.е. имеет место равенство $F(kx,ky,kz)=k^s F(x,y,z)$. Если функция $F(x,y,z)$ является полиномом второго порядка, то поверхность называется *конусом второго порядка*.

Уравнение конуса второго порядка в некоторой декартовой прямоугольной системе имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$



1. У поверхности имеется три плоскости симметрии (плоскости Oxy, Oxz и Oyz), три оси симметрии (оси абсцисс, ординат и аппликат) и один центр симметрии (начало координат).
2. Точка $O(0,0,0)$ принадлежит поверхности.
3. Линия пересечения конуса второго порядка с плоскостью $z=\tilde{z}\neq 0$ является эллипсом с уравнением
$$\frac{x^2}{\tilde{a}^2}+\frac{y^2}{\tilde{b}^2}=1, \text{ где } \tilde{a}=\frac{a}{c}\tilde{z},\ \tilde{b}=\frac{b}{c}\tilde{z}.$$
4. Линии пересечения конуса с плоскостями, параллельными плоскостям Oxz и Oyz, являются либо гиперболами, либо пересекающимися прямыми линиями. Например, при $x=\tilde{x}\neq 0$ имеем гиперболу с уравнением
$$\frac{y^2}{\tilde{b}^2}-\frac{z^2}{\tilde{c}^2}=-1, \text{ где } \tilde{b}=\frac{b}{a}\tilde{x},\ \tilde{c}=\frac{c}{a}\tilde{x};$$
при $x=\tilde{x}=0$ имеем пару пересекающихся прямых линий с уравнениями
$$\frac{y}{b}\pm\frac{z}{c}=0.$$