Способы задания линейных подпространств
Существует два способа задания линейных подпространств:
1) с помощью линейной оболочки векторов,
2) с помощью однородной системы линейных уравнений.

Теорема (об определении линейного подпространства однородной СЛАУ)
Справедливы следующие утверждения:
1. Множество решений однородной системы $Ax = \mathbf{O}$ является линейным подпространством пространства R_n, размерность которого равна $n - rank(A)$.
2. Всякое линейное подпространство $L' \subseteq L$ может быть описано однородной системой линейных алгебраических уравнений ранга $n - r$, где $n = \dim(L)$, $r = \dim(L')$.

Линейное многообразие
Пусть L' – линейное подпространство линейного пространства L.

Линейное многообразие – это множество векторов $H = \{ y : y = x + z\}$, где $x \in L'$, $z \in L$ и $z \notin L'$, при этом говорят, что множество векторов H получается сдвигом линейного подпространства L' в направлении вектора z.
Линейным многообразием также называется множество векторов, координаты которых в некотором базисе удовлетворяют неоднородной системе $Ax = b$.

Замечание 1. Можно показать, что эти определения эквивалентны.
Замечание 2. Хотя линейное многообразие не является линейным пространством, тем не менее, для него также вводится понятие размерности, а именно: *размерность линейного многообразия* равна размерности порождающего его линейного подпространства L'.

Пересечение и сумма линейных подпространств, прямая сумма подпространств
Пусть L' и L'' – два линейных подпространства линейного пространства L.

Пересечение линейных подпространств L' и L'' – это множество векторов

$$L' \cap L'' = \{ x : x \in L', x \in L''\},$$

т.е. это множество векторов, принадлежащих одновременно подпространствам L' и L''.

Замечание. Для любых линейных подпространств L' и L'' их пересечение содержит, по крайней мере, один нулевой вектор.

Сумма линейных подпространств L' и L'' – это множество векторов

$$L' + L'' = \{ x : x = x' + x'', x' \in L', x'' \in L''\},$$

т.е. это множество векторов, которые представимы в виде суммы векторов, взятых из подпространств L' и L''.

Прямая сумма линейных подпространств L' и L'' – это множество векторов

$$L' \oplus L'' = \{ x : x = x' + x'', x' \in L', x'' \in L'', L' \cap L'' = \{\mathbf{O}\}\},$$

т.е. это сумма линейных подпространств при условии, что их пересечение состоит из единственного нулевого вектора.

Теорема (о пересечении и сумме линейных подпространств)
Пересечение и сумма линейных подпространств – это линейные подпространства.

Теорема (о прямой сумме линейных подпространств)
Пусть линейное пространство $L = L' \oplus L''$, тогда справедливы следующие утверждения:

1. Для любого вектора x пространства L найдутся единственные векторы $x' \in L'$ и $x'' \in L''$ такие, что $x = x' + x''$.
2. Размерность линейного пространства L равна $\dim(L) = \dim(L') + \dim(L'')$.

Прямое дополнение линейного подпространства
Пусть L' – линейное подпространство линейного пространства L.

Прямое дополнение линейного подпространства L' *до линейного пространства* L – это линейное подпространство L'' такое, что $L = L' \oplus L''$.

Теорема (о прямом дополнении линейного подпространства)
Для любого линейного подпространства L' найдётся линейное подпространство L'' такое, что $L = L' \oplus L''$.

Теорема (о размерности суммы линейных подпространств)
Пусть L' и L'' – два линейных подпространства линейного пространства L, тогда имеет место равенство (формула Грассмана):

$$\dim(L' + L'') = \dim(L') + \dim(L'') - \dim(L' \cap L'').$$