Преобразование базиса

Пусть в линейном пространстве L имеются базисы $\{e\}=\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ и $\{e'\}=\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$.
Пусть векторы базиса $\{e'\}$ раскладываются по векторам базиса $\{e\}$ следующим образом:

$$\begin{aligned} e'_1 &= s_{11}e_1 + s_{21}e_2 + ... + s_{n1}e_n \\ e'_2 &= s_{12}e_1 + s_{22}e_2 + ... + s_{n2}e_n \\ &... \\ e'_n &= s_{1n}e_1 + s_{2n}e_2 + ... + s_{nn}e_n \end{aligned} \quad \text{или} \quad e'_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij}e_i \text{, для всех } j = 1,2,...,n.$$

Записав координаты каждого из векторов e'_1, e'_2,…, e'_n в столбец, получим матрицу

$$S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \cdots & s_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_{n1} & s_{n1} & \cdots & s_{nn} \end{bmatrix},$$

которая называется *матрицей перехода от базиса* $\{e\}$ *к базису* $\{e'\}$.
Аналогично строится матрица $S' = \| s'_{ij} \|$ – матрица перехода от базиса $\{e'\}$ к базису $\{e\}$.
Матрицы S и S' – невырожденные и связаны соотношением $S' = S^{-1}$.

Пусть $e = [e_1 \; e_2 \; ... \; e_n]$ и $e' = [e'_1 \; e'_2 \; ... \; e'_n]$ – вектор-строки, составленные из векторов базисов $\{e\}$ и $\{e'\}$ соответственно, тогда имеют место следующие равенства:

$$e' = eS \quad \text{и} \quad e = e'S' \quad \text{или с учётом того, что } S' = S^{-1}, \quad e = e'S^{-1}.$$

Преобразование координат вектора при смене базиса

Пусть в линейном пространстве L имеются базисы $\{e\}=\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ и $\{e'\}=\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$.
Пусть некоторый вектор x, имеющий в базисе $\{e\}$ координаты ξ_1, ξ_2,…, ξ_n, в базисе $\{e'\}$ имеет координаты ξ'_1, ξ'_2,…, ξ'_n, т.е.

$$x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i = \sum_{j=1}^{n} \xi'_j e'_j .$$

Координаты вектора связаны соотношениями:

$$\xi_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}\xi'_j \quad \text{и} \quad \xi'_i = \sum_{j=1}^{n} s'_{ij}\xi_j , \quad \text{где } i = 1,2,...,n.$$

Пусть ξ и ξ' – координатные столбцы вектора x в базисах $\{e\}$ и $\{e'\}$ соответственно, тогда соотношения, связывающие координаты вектора, в матричной форме примут вид:

$$\xi = S\xi' \quad \text{и} \quad \xi' = S'\xi \quad \text{или с учётом того, что } S' = S^{-1}, \quad \xi' = S^{-1}\xi .$$

Линейные подпространства

Подмножество L' линейного пространства L называется *линейным подпространством*, если:

1. Для любых векторов $x, y \in L'$ вектор $x + y \in L'$.
2. Для любого вектора $x \in L'$ и числа λ вектор $\lambda x \in L'$.

или в компактном виде: для любых векторов $x, y \in L'$ и чисел λ и μ вектор $\lambda x + \mu y \in L'$.

Теорема (о линейном подпространстве)
Пусть L' – линейное подпространство линейного пространства L, тогда справедливы следующие утверждения:

1. Линейное подпространство L' является линейным пространством.
2. Размерность линейного подпространства L' не превосходит размерности всего пространства L, т.е. $\dim(L') \le \dim(L)$.
3. Всякий базис линейного подпространства L' можно дополнить до базиса всего пространства L.

Линейная оболочка
Линейной оболочкой совокупности векторов $M = \{ x_1, x_2, ..., x_n \}$ называется множество $L(M) = L(x_1, x_2, ..., x_n) = \{ x : x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n \}$, где λ_1, $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – произвольные числа.
Из определения следует, что линейная оболочка является линейным подпространством.

Теорема (о линейной оболочке)
Справедливы следующие утверждения:

1. Если векторы x_1', $x_2', \ldots$ принадлежат линейной оболочке $L(x_1, x_2, ...)$, то их линейная оболочка $L(x_1', x_2', ...) \subseteq L(x_1, x_2, ...)$.
2. Если в совокупности векторов $M = \{ x_1, x_2, ..., x_n \}$ имеются линейно зависимые векторы, то их удаление из совокупности M не изменит линейной оболочки $L(M)$.
3. Размерность линейной оболочки равна количеству её линейно независимых векторов.