Определитель произведения матриц

Определитель матрицы обладает следующими свойствами (продолжение):

1) если матрица $\mathbf{A}$ – диагональная (треугольная), то
$$|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11}\, a_{22} \ldots a_{nn};$$
2) если матрица $\mathbf{L}$ – это матрица последовательности элементарных преобразований, то $|\mathbf{LA}| = |\mathbf{L}||\mathbf{A}|$;
3) если матрица $\mathbf{A}$ вырожденная, то $|\mathbf{A}| = 0$;
4) $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$.

Ранг матрицы

Минором k-го порядка матрицы $\mathbf{A}$ называется определитель матрицы, построенной из элементов исходной матрицы $\mathbf{A}$, стоящих на пересечении k строк и k столбцов.
Например, для матрицы
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$
можно построить девять миноров второго порядка:
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}.$$
Рангом матрицы называется число, равное наивысшему порядку отличного от нуля минора этой матрицы. Из определения ранга следует, что если ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен r, то в матрице имеется ненулевой минор порядка r, а всякий минор порядка $r+1$ и выше равен нулю.
Для ранга матрицы $\mathbf{A}$ используются обозначения: $r(\mathbf{A})$, $rg(\mathbf{A})$, $rank(\mathbf{A})$ или $rang(\mathbf{A})$.
Пусть $r(\mathbf{A}) = r$, тогда любой ненулевой минор матрицы $\mathbf{A}$ порядка r называется *базисным*, а строки и столбцы его образующие – *базисными*.

Теорема (о базисном миноре)

Всякий столбец (строка) матрицы является линейной комбинацией столбцов (строк) базисного минора матрицы.

Следствия из теоремы о базисном миноре

1. Базисные столбцы (строки) линейно независимы.
2. Ранг матрицы – это количество линейно независимых столбцов (строк) матрицы.
3. В любой матрице количество линейно независимых столбцов равно количеству линейно независимых строк.
4. Матрица $\mathbf{A}$ вырожденная тогда и только тогда, когда $|\mathbf{A}| = 0$.
5. Добавление (удаление) нулевых столбцов (строк) или столбцов (строк), являющихся линейными комбинациями столбцов (строк) базисного минора, не изменяет ранг матрицы.

Свойства ранга матрицы

Ранг матрицы обладает следующими свойствами:

1) $r(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}) = r(\mathbf{A})$;
2) $r(\mathbf{LA}) = r(\mathbf{A})$, $r(\mathbf{AL}) = r(\mathbf{A})$, где $\mathbf{L}$ – квадратная матрица последовательности элементарных преобразований, $\mathbf{A}$ – произвольная матрица;
3) $r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{B})$, $r(\mathbf{CA}) = r(\mathbf{C})$, где $\mathbf{A}$ – квадратная невырожденная матрица, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ – произвольные матрицы;
4) $r(\mathbf{AB}) \le r(\mathbf{A})$ и $r(\mathbf{AB}) \le r(\mathbf{B})$.

Метод нахождения ранга матрицы

Матрица (в общем случае прямоугольная)

$$\tilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & ... & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 \end{array}\right],$$

у которой первые r элементов главной диагонали равны 1, а все остальные равны 0, называется *канонической*, её ранг равен, очевидно, количеству ненулевых элементов.

Так как ранг матрицы не меняется при выполнении элементарных преобразований, то для его нахождения достаточно с помощью элементарных преобразований привести матрицу к каноническому виду, после чего посчитать количество ненулевых элементов на главной диагонали.