Задача 1 (*)
Функция $F(x, y, z)$ называется *однородной функцией степени* s, если для любого числа λ имеет место равенство $F(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^s F(x, y, z)$.

Поверхность S называется *конической поверхностью с вершиной в точке* O, если для любой точки $M'(x', y', z')$, принадлежащей этой поверхности, прямая линия L, проходящая через точки O и M, целиком лежит на этой поверхности.

Доказать, что поверхность, уравнение которой имеет вид $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ – однородная функция произвольной степени, является конической поверхностью.

Задача 2
Декартова прямоугольная система координат $O'x'y'z'$ получена параллельным переносом декартовой прямоугольной системы координат $Oxyz$.
Требуется:
1) определить координаты точки M в новой системе координат, если в исходной системе точки O' и M имеют координаты $(-1, -1, 2)$ и $(0, 1, 1)$ соответственно;
2) определить координаты точки M в исходной системе координат, если её координаты в новой системе равны $(-1, -1, -1)$, а координаты точки O' в исходной системе равны $(1, 0, -1)$;
3) определить координаты точки O' в исходной системе координат, если точка M имеет координаты $(2, 0, 2)$ и $(1, -2, -1)$ в исходной и в новой системах соответственно;
4) определить координаты точки M в исходной системе координат, если в новой системе её координаты и точки O равны соответственно $(-1, -1, -1)$ и $(-1, 0, -2)$.

Ответы:
1) $M(1, 2, -1)$,
2) $M(0, -1, -2)$,
3) $O'(1, 2, 3)$,
4) $M(0, -1, 1)$.

Задача 3
Уравнение линии L в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ имеет вид $x^2 + 2xy^2 - z^2 - 1 = 0$.
Записать уравнение линии L в новой системе координат $O'x'y'z'$, которая получена из исходной параллельным переносом и начало которой имеет координаты $(1, 0, -1)$.
Ответ: $2x' + x'^2 + 2y' + 2x'y'^2 - z'^2 + 2z' - 1 = 0$.

Задача 4
Новая система координат получена из исходной с помощью поворота на угол $\varphi = \pi / 4$.
Требуется:
1) определить координаты точки M в исходной системе координат, если в новой системе её координаты равны $(8, 4)$;
2) определить координаты точки M в новой системе координат, если в исходной системе её координаты равны $(4, 8)$.

Ответы:
1) $M(2\sqrt{2}, 6\sqrt{2})$,
2) $M(6\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

Задача 5

Соотношения, связывающие координаты точки M в декартовой прямоугольной системе координат Oxy с её же координатами в декартовой прямоугольной системе координат $O'x'y'$, имеют вид:

$$x = a + x'\cos(\varphi) - y'\sin(\varphi),$$

$$y = b + x'\sin(\varphi) + y'\cos(\varphi),$$

где a и b – координаты точки O', φ – угол между осями Ox и $O'x'$.

Записать соотношения, позволяющие вычислить координаты точки M в системе $O'x'y'$ через её же координаты в системе Oxy.

Ответ:

$$x' = (x-a)\cos(\varphi) + (y-b)\sin(\varphi),$$

$$y' = (a-x)\sin(\varphi) + (y-b)\cos(\varphi).$$

Задача 6

На плоскости заданы два базиса $\{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и $\{\mathbf{e}'\} = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$. Векторы $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$ в базисе $\{\mathbf{e}\}$ имеют координаты $\{2,4\}$ и $\{1,3\}$ соответственно, вектор $\mathbf{a}$ имеет координаты $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ и $\{\lambda'_1, \lambda'_2\}$ в базисах $\{\mathbf{e}\}$ и $\{\mathbf{e}'\}$ соответственно.

Требуется:

1) выразить координаты вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\{\mathbf{e}\}$ через его координаты в базисе $\{\mathbf{e}'\}$;
2) выразить координаты вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\{\mathbf{e}'\}$ через его координаты в базисе $\{\mathbf{e}\}$;
3) записать координаты векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ в базисе $\{\mathbf{e}'\}$.

Ответы:

1) $\lambda_1 = 2\lambda'_1 + \lambda'_2$, $\lambda_2 = 4\lambda'_1 + 3\lambda'_2$;
2) $\lambda'_1 = 3/2\,\lambda_1 - 1/2\,\lambda_2$, $\lambda'_2 = \lambda_2 - 2\lambda_1$;
3) $\mathbf{e}_1 = \{3/2, -2\}$, $\mathbf{e}_2 = \{-1/2, 1\}$.

Задача 7

На плоскости заданы две системы координат: первая с началом в точке O и базисом $\{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ и вторая с началом в точке O' и базисом $\{\mathbf{e}'\} = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2\}$. Координаты точки O' в первой системе координат равны $(-1,1)$, координаты базисных векторов $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$ в базисе $\{\mathbf{e}\}$ равны $\{2,-3\}$ и $\{-5,8\}$ соответственно, координаты точка M в первой и второй системах координат равны (λ_1, λ_2) и (λ'_1, λ'_2) соответственно.

Требуется:

1) выразить координаты λ_1 и λ_2 точки M через её координаты λ'_1 и λ'_2;
2) выразить координаты λ'_1 и λ'_2 точки M через её координаты λ_1 и λ_2;
3) найти координаты точки O и векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ во второй системе координат.

Ответы:

1) $\lambda_1 = 2\lambda'_1 - 5\lambda'_2 - 1$, $\lambda_2 = 1 - 3\lambda'_1 + 8\lambda'_2$;
2) $\lambda'_1 = 3 + 8\lambda_1 + 5\lambda_2$, $\lambda'_2 = 1 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2$;
3) $O(3,1)$, $\mathbf{e}_1 = \{8,3\}$, $\mathbf{e}_2 = \{5,2\}$.

Задача 8 (*)

Пусть в пространстве заданы два базиса: $\{\mathbf{e}\}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ и $\{\mathbf{e}'\}=\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3\}$. Векторы $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ и $\mathbf{e}'_3$ в базисе $\{\mathbf{e}\}$ имеют координаты $\{1,2,-2\}$, $\{0,-1,1\}$ и $\{0,-2,1\}$ соответственно, вектор $\mathbf{a}$ имеет координаты $\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3\}$ и $\{\lambda'_1,\lambda'_2,\lambda'_3\}$ в базисах $\{\mathbf{e}\}$ и $\{\mathbf{e}'\}$ соответственно.

Требуется:

1) выразить координаты вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\{\mathbf{e}\}$ через его координаты в базисе $\{\mathbf{e}'\}$;
2) выразить координаты вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\{\mathbf{e}'\}$ через его координаты в базисе $\{\mathbf{e}\}$;
3) записать координаты векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ в базисе $\{\mathbf{e}'\}$.

Ответы:

1) $\lambda_1=\lambda'_1$, $\lambda_2=2\lambda'_1-\lambda'_2-2\lambda'_3$, $\lambda_3=\lambda'_2-2\lambda'_1+\lambda'_3$;
2) $\lambda'_1=\lambda_1$, $\lambda'_2=2\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3$, $\lambda'_3=-\lambda_2-\lambda_3$;
3) $\mathbf{e}_1=\{1,2,0\}$, $\mathbf{e}_2=\{0,1,-1\}$, $\mathbf{e}_3=\{0,2,-1\}$.

Задача 9 (*)

В пространстве заданы две системы координат: первая с началом в точке O и базисом $\{\mathbf{e}\}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3\}$ и вторая с началом в точке O' и базисом $\{\mathbf{e}'\}=\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,\mathbf{e}'_3\}$. Координаты точки O' в первой системе равны $(0,-1,-1)$, координаты базисных векторов $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ и $\mathbf{e}'_3$ равны: $\{-1,-3,-2\}$, $\{2,1,0\}$ и $\{-2,0,1\}$ соответственно. Точка M имеет координаты $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ и $(\lambda'_1,\lambda'_2,\lambda'_3)$ в первой и второй системах координат соответственно.

Требуется:

1) выразить координаты λ_1, λ_2 и λ_3 точки M через её координаты λ'_1, λ'_2 и λ'_3;
2) выразить координаты λ'_1, λ'_2 и λ'_3 точки M через её координаты λ_1, λ_2 и λ_3;
3) найти координаты точки O и векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{e}_3$ во второй системе координат.

Ответ:

1) $\lambda_1=2\lambda'_2-\lambda'_1-2\lambda'_3$, $\lambda_2=\lambda'_2-3\lambda'_1-1$, $\lambda_3=\lambda'_3-2\lambda'_1-1$;
2) $\lambda'_1=\lambda_1-2\lambda_2+2\lambda_3$, $\lambda'_2=1+3\lambda_1-5\lambda_2+6\lambda_3$, $\lambda'_3=1+2\lambda_1-4\lambda_2+5\lambda_3$;
3) $O(0,1,1)$, $\mathbf{e}_1=\{1,3,2\}$, $\mathbf{e}_2=\{-2,-5,-4\}$, $\mathbf{e}_3=\{2,6,5\}$.