Линейный оператор

Правило, которое каждому вектору $\mathbf{x}$ линейного пространства L ставит в соответствие единственный вектор $\mathbf{z} = A(\mathbf{x})$ из линейного пространства M , называется *линейным отображением* или *общим линейным оператором*, если оно обладает следующими свойствами:

1) $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = A(\mathbf{x}) + A(\mathbf{y})$ для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ пространства L;
2) $A(\lambda\,\mathbf{x}) = \lambda\,A(\mathbf{x})$ для любого вектора $\mathbf{x}$ из L и числа λ.

Вектор $\mathbf{z} = A(\mathbf{x})$ называется *образом вектора* $\mathbf{x}$, который, в свою очередь, называется *прообразом вектора* $\mathbf{z} = A(\mathbf{x})$.

Линейное отображение, действующее из L в L, называется *преобразованием* L или *линейным оператором*.

Замечание 1. Обычно равенства 1) и 2) записывают в компактном виде:

$$A(\lambda\,\mathbf{x}+\mu\,\mathbf{y}) = \lambda\,A(\mathbf{x}) + \mu\,A(\mathbf{y}) \text{ для любых векторов } \mathbf{x} \text{ и } \mathbf{y} \text{ из } L \text{ и чисел } \lambda \text{ и } \mu.$$

Замечание 2. Операции сложения и умножения на число, записанные в левых частях равенств 1) и 2), в общем случае не совпадают с операциями, записанными справа, т.к. определены в разных линейных пространствах.

Примеры

1. Отображение $O(x) \equiv \mathbf{O}$, которое каждому вектору $\mathbf{x}$ из L ставит в соответствие нулевой вектор пространства M является линейным оператором и называется *нулевым оператором*.
2. В произвольном линейном пространстве преобразование $E(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}$, которое каждому вектору $\mathbf{x}$ из L ставит в соответствие тот же самый вектор $\mathbf{x}$, является линейным оператором и называется *тождественным оператором*.
3. В произвольном линейном пространстве преобразование $\Lambda(\mathbf{x}) = \lambda\,\mathbf{x}$, которое каждому вектору $\mathbf{x}$ из L ставит в соответствие вектор $\mathbf{x}$, умноженный на число λ, является линейным оператором и называется *оператором подобия*.
4. В пространстве R_n преобразование $A(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, где $\mathbf{A}$ – матрица размера $m\times n$, $\mathbf{x}$ – вектор-столбец размера $n\times 1$, является линейным отображением линейного пространства R_n в линейное пространство R_m.
5. В пространстве полиномов преобразование $A(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{x}'(t)$ является линейным отображением, действующим из пространства полиномов степени не выше n в пространство полиномов степени не выше $n-1$.
6. Преобразование $P(\mathbf{x}) = \mathrm{Pr}_{L'}(\mathbf{x})$ называется оператором проектирования вектора $\mathbf{x}$ на линейное подпространство L' линейного пространства L.

Координатная (матричная) форма записи линейного оператора

Пусть в линейном пространстве L выбран базис $\{\mathbf{e}\}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_n\}$ и пусть в этом базисе вектор $\mathbf{x}$ имеет координаты $\mathbf{x}=\{\xi_1,\xi_2,...,\xi_n\}$, т.е.

$$\mathbf{x}=\xi_1\mathbf{e}_1+\xi_2\mathbf{e}_2+...+\xi_n\mathbf{e}_n=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\mathbf{e}_j .$$

Пусть в линейном пространстве M выбран базис $\{\tilde{\mathbf{e}}\}=\{\tilde{\mathbf{e}}_1,\tilde{\mathbf{e}}_2,...,\tilde{\mathbf{e}}_m\}$, в котором вектор $\mathbf{z}$ имеет координаты $\mathbf{z}=\{\zeta_1,\zeta_2,...,\zeta_m\}$, т.е.

$$\mathbf{z}=\zeta_1\tilde{\mathbf{e}}_1+\zeta_2\tilde{\mathbf{e}}_2+...+\zeta_n\tilde{\mathbf{e}}_n=\sum_{i=1}^{m}\zeta_i\tilde{\mathbf{e}}_i .$$

Обозначим через $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\zeta}$ координатные столбцы векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{z}$ соответственно, т.е.

$$\boldsymbol{\xi}=\begin{bmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\zeta}=\begin{bmatrix}\zeta_1\\ \zeta_2\\ \vdots\\ \zeta_m\end{bmatrix}.$$

Заменяя в линейном отображении $A(\mathbf{x})$ вектор $\mathbf{x}$ его разложением по базису, получим

$$A(\mathbf{x})=A\left(\sum_{j=1}^{n}\xi_j\mathbf{e}_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\xi_jA(\mathbf{e}_j).$$

Заменяя в последнем выражении векторы $A(\mathbf{x})$ и $A(\mathbf{e}_j)$ их разложениями по базису $\{\tilde{\mathbf{e}}\}$

$$A(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{m}\zeta_i\tilde{\mathbf{e}}_i \quad \text{и} \quad A(\mathbf{e}_j)=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\tilde{\mathbf{e}}_i ,$$

получим

$$\sum_{i=1}^{m}\zeta_i\tilde{\mathbf{e}}_i=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\tilde{\mathbf{e}}_i=\sum_{i=1}^{m}\tilde{\mathbf{e}}_i\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j .$$

Коэффициенты разложения вектора по базису определены однозначно, поэтому

$$\zeta_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\xi_j \quad \text{для всех } i=1,2,...,m$$

или в векторном виде

$$\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{A}\boldsymbol{\xi},$$

где $\mathbf{A}=\| a_{ij}\|$ – матрица коэффициентов линейного отображения, j-й столбец которой – это координатный столбец вектора $A(\mathbf{e}_j)$ в базисе $\{\tilde{\mathbf{e}}\}$ пространства M.

Преобразование матрицы линейного оператора при смене базиса

Пусть $\mathbf{S}$ – матрица перехода от старого базиса $\{\mathbf{e}\}$ к новому базису $\{\mathbf{e}'\}$ пространства L и $\mathbf{T}$ – матрица перехода от старого базиса $\{\tilde{\mathbf{e}}\}$ к новому базису $\{\tilde{\mathbf{e}}'\}$ пространства M. Пусть ξ – координатный столбец вектора $\mathbf{x}$ в старом базисе $\{\mathbf{e}\}$, а ξ' – его координатный столбец в новом базисе $\{\mathbf{e}'\}$. Пусть ζ и ζ' – координатные столбцы вектора $\mathbf{z}$ в старом и новом базисах $\{\tilde{\mathbf{e}}\}$ и $\{\tilde{\mathbf{e}}'\}$ соответственно. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\xi = \mathbf{S}\xi', \quad \zeta = \mathbf{T}\zeta'.$$

Заменяя в матричной записи линейного отображения координатные столбцы ξ и ζ на их выражения через столбцы ξ' и ζ', получим

$$\mathbf{T}\zeta' = \mathbf{A}\mathbf{S}\xi' \quad \text{или} \quad \zeta' = \mathbf{A}'\xi',$$

где $\mathbf{A}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}$ – матрица линейного отображения $A(\mathbf{x})$ в базисах $\{\mathbf{e}'\}$ и $\{\tilde{\mathbf{e}}'\}$ линейных пространств L и M соответственно.

Замечание. Если $A(\mathbf{x})$ – линейное преобразование, действующее из пространства L в L, и базисы $\{\tilde{\mathbf{e}}\} = \{\mathbf{e}\}$ и $\{\tilde{\mathbf{e}}'\} = \{\mathbf{e}'\}$, то матрицы переходов $\mathbf{S}$ и $\mathbf{T}$ совпадают и выражение, связывающее матрицы линейного преобразования в разных базисах, принимает вид:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}.$$

Линейные операции над функциями векторного аргумента

Сумма и произведение линейных операторов

Пусть $A(\mathbf{x})$ и $B(\mathbf{x})$ – два линейных оператора, действующих в линейном пространстве L, тогда можно естественным образом определить их сумму и произведение:

$$(A+B)(x) = A(x) + B(x) \quad \text{и} \quad (AB)(x) = A(B(x)).$$

Геометрические свойства линейного оператора

Пусть имеется линейный оператор $A(\mathbf{x})$, действующий в линейном пространстве L.
Образом линейного оператора называется множество

$$T_A = \{\mathbf{z} : \mathbf{z} = A(\mathbf{x}); \mathbf{x}, \mathbf{z} \in L\}.$$

Ядром линейного оператора называется множество

$$N_A = \{\mathbf{x} : A(\mathbf{x}) = \mathbf{O}; \mathbf{x} \in L\}.$$

Можно показать, что образ и ядро линейного оператора являются линейными подпространствами пространства L, более того имеет место следующее равенство

$$\dim(T_A) + \dim(N_A) = \dim(L).$$

Величина $r_A = \dim(T_A)$ называется *рангом линейного оператора*.

Теорема (о ранге линейного операторов)

Пусть r_A, r_B, r_{A+B} и r_{AB} – ранги операторов $A(\mathbf{x})$, $B(\mathbf{x})$, $(A+B)(\mathbf{x})$ и $(AB)(\mathbf{x})$ соответственно, тогда имеют место следующие неравенства:

1. $r_{AB} \le r_A$, $r_{AB} \le r_B$.
2. $r_{AB} \ge r_A + r_B - n$.
3. $r_{A+B} \le r_A + r_B$.

Обратный оператор

Линейный оператор $A(\mathbf{x})$ называется *невырожденным*, если его ядро состоит из единственного нулевого элемента, т.е. $N_A = \{\mathbf{O}\}$. Если ядро оператора содержит ненулевые векторы, то оператор называется – *вырожденным*.

Линейный оператор называется *взаимно-однозначным*, если его значения на любых не равных между собой векторах не равны друг другу, т.е. $A(\mathbf{x}_1) \ne A(\mathbf{x}_2)$ для любых $\mathbf{x}_1 \ne \mathbf{x}_2$.

Теорема (о невырожденном линейном операторе)

Справедливы следующие утверждения:

1. Линейный оператор $A(\mathbf{x})$ невырожденный тогда и только тогда, когда он взаимно-однозначный.
2. Если линейные операторы $A(\mathbf{x})$ и $B(x)$ невырожденные, то оператор $(AB)(x)$ – также невырожденный.
3. Ранг невырожденного оператора, действующего в линейном пространстве L совпадает с размерностью пространства, т.е. $r_A = \dim(L)$.

Линейный оператор $B(x)$ называется *обратным оператором* по отношению к линейному оператору $A(\mathbf{x})$, если $(AB)(x) = (BA)(x) = E(x)$, где $E(x)$ – тождественный оператор.
Обратный оператор обычно обозначают $A^{-1}(x)$.

Теорема (об обратном операторе)

Линейный оператор $A(\mathbf{x})$ имеет обратный оператор тогда и только тогда, когда он невырожденный.