

**Задача 1 (\*)**

Доказать, что указанные множества вектор-столбцов размера  $n$  образуют линейное подпространство, найти их размерность и базис.

1. Множество вектор-столбцов, у которых первый элемент равен 0.
2. Множество вектор-столбцов, у которых все элементы равны между собой.

**Задача 2 (\*)**

Доказать, что сумма и пересечение линейных подпространств  $L'$  и  $L''$  – это линейные подпространства.

**Задача 3 (\*)**

Доказать формулу Грассмана:  $\dim(L' + L'') = \dim(L') + \dim(L'') - \dim(L' \cap L'')$ .

**Задача 4 (\*)**

Доказать, что всякий вектор  $x$  из пространства вектор-столбцов размера  $n$  может быть единственным образом представлен в виде суммы  $x = x' + x''$ , где

1.  $x'$  – это вектор-столбец, у которого все компоненты равны между собой,  
 $x''$  – это вектор-столбец, у которого сумма всех компонентов равна 0.
2.  $x'$  – это вектор-столбец, у которого все компоненты равны между собой,  
 $x''$  – это вектор-столбец, у которого первая компонента равна 0.

**Задача 5 (\*)**

Координаты входящих в совокупности  $A = \{a_1, a_2, a_3\}$  и  $B = \{b_1, b_2, b_3\}$  векторов записаны в столбцах матриц  $A$  и  $B$  соответственно.

Требуется определить размерность и базис следующих линейных подпространств  $L(A)$ ,  $L(B)$ ,  $L(A) \cap L(B)$  и  $L(A) + L(B)$ ; для каждого подпространства записать однородную систему алгебраических уравнений, которой удовлетворяют координаты всех векторов подпространства; дать геометрическую интерпретацию подпространств.

$$\begin{aligned} 1. \quad A &= \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -9 & -3 & 6 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & -9 & -3 \end{bmatrix}. \\ 2. \quad A &= \begin{bmatrix} -3 & -5 & -2 \\ -5 & -5 & 0 \\ -1 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}. \\ 3. \quad A &= \begin{bmatrix} -3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$