Задача 1

Поверхность S называется *цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси* Oz, если для любой точки $M(x, y, z)$, принадлежащей этой поверхности, прямая линия L, проходящая через эту точку параллельно оси Oz, целиком лежит на этой поверхности.

Доказать, что поверхность, уравнение которой имеет вид $F(x, y) = 0$, является цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz.

Задача 2

Декартова прямоугольная система координат $O'x'y'$ получена параллельным переносом декартовой прямоугольной системы координат Oxy.

Требуется:

1) определить координаты точки M в новой системе координат, если в исходной системе точки O' и M имеют координаты $(2,-1)$ и $(1,1)$ соответственно;
2) определить координаты точки M в исходной системе координат, если её координаты в новой системе равны $(-2,-2)$, а координаты точки O' в исходной системе равны $(2,1)$;
3) определить координаты точки O' в исходной системе координат, если точка M имеет координаты $(2,3)$ и $(3,2)$ в исходной и в новой системах соответственно;
4) определить координаты точки M в исходной системе координат, если в новой системе её координаты и точки O равны соответственно $(2,-2)$ и $(1,-1)$.

Ответы:

1) $M(-1,2)$,
2) $M(0,-1)$,
3) $O'(-1,1)$,
4) $M(1,-1)$.

Задача 3

Уравнение линии L в декартовой прямоугольной системе координат Oxy имеет вид $2x - y^2 + 2 = 0$.

Записать уравнение линии L в новой системе координат $O'x'y'$, которая получена из исходной системы параллельным переносом и начало которой имеет координаты $(1,2)$.

Ответ: $2x' - 4y' - y'^2 = 0$.

Задача 4

Новая система координат получена из исходной с помощью поворота на угол $\varphi = \pi/3$.

Требуется:

1) определить координаты точки M в исходной системе координат, если в новой системе её координаты равны $(3,-2)$;
2) определить координаты точки M в новой системе координат, если в исходной системе её координаты равны $(1,0)$.

Ответы:

1) $M\left(\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}, \dfrac{3\sqrt{3}-2}{2}\right)$,
2) $M\left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Задача 5

Уравнение линии L в декартовой прямоугольной системе координат Oxy имеет вид $x^2-2xy+3y^2+1=0$.

Записать уравнение линии L в новой системе координат $O'x'y'$, которая получена из исходной системы путём поворота вокруг точки O на 90 градусов по часовой стрелке.

Ответ: $3x'^2+2x'y'+y'^2+1=0$.

Задача 6

На плоскости заданы два базиса $\{\mathbf{e}\}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ и $\{\mathbf{e}'\}=\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2\}$. Векторы $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$ в базисе $\{\mathbf{e}\}$ имеют координаты $\{3,7\}$ и $\{2,5\}$ соответственно, некоторый вектор $\mathbf{a}$ имеет координаты $\{\lambda_1,\lambda_2\}$ и $\{\lambda'_1,\lambda'_2\}$ в базисах $\{\mathbf{e}\}$ и $\{\mathbf{e}'\}$ соответственно.

Требуется:

1) выразить координаты вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\{\mathbf{e}\}$ через его координаты в базисе $\{\mathbf{e}'\}$;
2) выразить координаты вектора $\mathbf{a}$ в базисе $\{\mathbf{e}'\}$ через его координаты в базисе $\{\mathbf{e}\}$;
3) записать координаты векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ в базисе $\{\mathbf{e}'\}$.

Ответы:

1) $\lambda_1=3\lambda'_1+2\lambda'_2$, $\lambda_2=7\lambda'_1+5\lambda'_2$;
2) $\lambda'_1=5\lambda_1-2\lambda_2$, $\lambda'_2=3\lambda_2-7\lambda_1$;
3) $\mathbf{e}_1=\{5,-7\}$, $\mathbf{e}_2=\{-2,3\}$.

Задача 7

На плоскости заданы две системы координат: первая с началом в точке O и базисом $\{\mathbf{e}\}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ и вторая с началом в точке O' и базисом $\{\mathbf{e}'\}=\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2\}$. Координаты точки O' в первой системе координат равны $(2,3)$, координаты базисных векторов $\mathbf{e}'_1$ и $\mathbf{e}'_2$ в базисе $\{\mathbf{e}\}$ равны $\{3,7\}$ и $\{4,9\}$ соответственно. Точка M имеет координаты (λ_1,λ_2) и (λ'_1,λ'_2) в первой и второй системах координат соответственно.

Требуется:

1) выразить координаты λ_1 и λ_2 точки M через её координаты λ'_1 и λ'_2;
2) выразить координаты λ'_1 и λ'_2 точки M через её координаты λ_1 и λ_2;
3) найти координаты точки O и векторов $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ во второй системе координат.

Ответы:

1) $\lambda_1=2+3\lambda'_1+4\lambda'_2$, $\lambda_2=3+7\lambda'_1+9\lambda'_2$;
2) $\lambda'_1=6-9\lambda_1+4\lambda_2$, $\lambda'_2=-5+7\lambda_1-3\lambda_2$;
3) $O(6,-5)$, $\mathbf{e}_1=\{-9,7\}$, $\mathbf{e}_2=\{4,-3\}$.