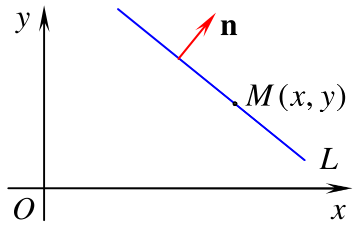
Прямая линия на плоскости

Теорема (об общем уравнении прямой линии)
Линия L, принадлежащая плоскости, является прямой тогда и только тогда, когда она описывается уравнением первой степени $Ax + By + C = 0$, где коэффициенты A и B не равны нулю одновременно.

Уравнение $Ax + By + C = 0$ называется *общим уравнением прямой линии*, причём, если все коэффициенты уравнения не равны нулю, то оно называется *полным общим уравнением прямой линии*.
Вектор $\mathbf{n} = \{A, B\}$ ортогонален прямой линии L и называется *нормальным вектором прямой линии*.



Замечание. Если уравнения $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ описывают одну и ту же прямую линию L, то существует число λ такое, что $A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2$, $C_1 = \lambda C_2$.

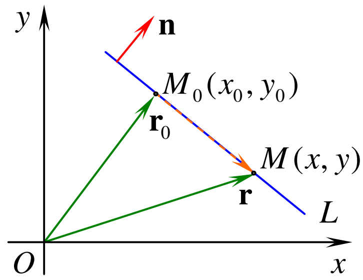
Другие способы описания прямой линии
Общее уравнение прямой – не единственный способ описания прямой линии.
Существуют следующие виды уравнения прямой линии:

Уравнение прямой линии, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ ортогонально вектору $\mathbf{n} = \{A, B\}$, имеет вид

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 .$$

Векторное уравнение прямой линии имеет вид

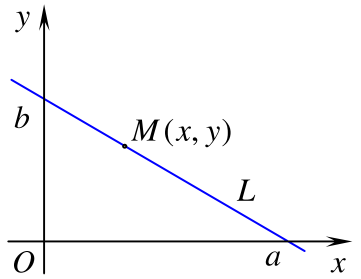
$$(\mathbf{n}, \overline{M_0M}) = 0 \quad \text{или} \quad (\mathbf{n}, \mathbf{r}) = (\mathbf{n}, \mathbf{r}_0) .$$



Уравнение прямой линии в отрезках имеет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 ,$$

где коэффициенты a и b – величины отрезков, которые прямая линия L отсекает на осях координат Ox и Oy соответственно.

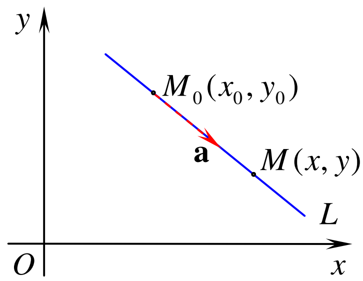


Каноническое уравнение прямой линии имеет вид

$$\frac{x - x_0}{x_a} = \frac{y - y_0}{y_a} ,$$

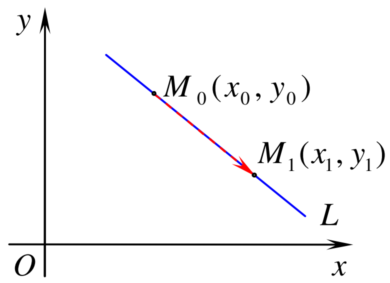
где $M_0(x_0, y_0)$ – *начальная точка прямой*, вектор $\mathbf{a} = \{x_a, y_a\}$ – *направляющий вектор прямой*.
Если одна из координат направляющего вектора равна нулю, то уравнение переписывается в виде

$$y_a(x - x_0) = x_a(y - y_0) .$$



Уравнение прямой линии, проходящей через две заданные точки $M_0(x_0, y_0)$ *и* $M_1(x_1, y_1)$, имеет вид

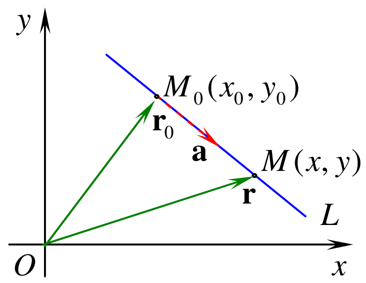
$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$



Параметрическое уравнение прямой линии имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 + x_a t, \\ y = y_0 + y_a t, \end{cases}$$

где t – *параметр*, принимающий любые значения, $M_0(x_0, y_0)$ – *начальная точка прямой*, вектор $\mathbf{a} = \{x_a, y_a\}$ – *направляющий вектор прямой.*

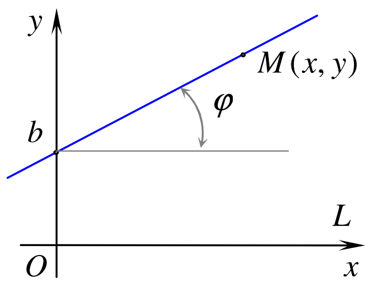


Уравнение прямой линии с угловым коэффициентом имеет вид

$$y = kx + b,$$

где k – угловой коэффициент, b – величина отрезка, отсекаемого прямой линией L на оси Oy.

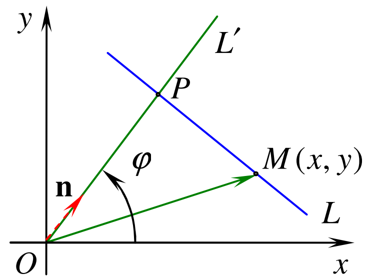
Можно показать, что $k = tg(\varphi)$, φ – угол между прямой линией и осью Ox.



Нормированное уравнение прямой линии имеет вид

$$x\cos(\varphi) + y\sin(\varphi) - \rho = 0,$$

где φ – угол между единичным вектором $\mathbf{n}$, исходящим из начала координат, ортогонально прямой линии L, и осью Ox, ρ – расстояние от точки O до точки P – точки пересечения прямой линии L с линией L', проходящей через точку O в направлении вектора $\mathbf{n}$.



Пучок прямых линий

Совокупность прямых линий, лежащих в одной плоскости и проходящих через одну точку $M_0(x_0, y_0)$, называется *пучком прямых с центром в точке* M_0.

Теорема (о пучке прямых линий)

Пусть $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ – уравнения двух различных прямых, пересекающихся в точке $M_0(x_0, y_0)$, тогда справедливы утверждения:

1. Для любых не равных одновременно нулю чисел λ_1 и λ_2, уравнение $\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ является уравнением прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$.
2. Для любой прямой линии L, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, можно найти числа λ_1 и λ_2 такие, что уравнение $\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ будет уравнением этой прямой.