Задача 1
Построить обратные матрицы для следующих матриц:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 9 & 4\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}6 & -4 & -1\\ 7 & -4 & -1\\ 3 & -1 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Ответы:

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -9 & 7\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}^{-1}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ -3 & 3 & -1\\ 5 & -6 & 4\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

Задача 2
Вычислить определители следующих матриц:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 3 & -3\\ -1 & 1 & -2 & 3\\ -3 & -1 & -1 & 3\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 3 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0\\ 2 & 0 & 3 & 0 & 3\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix}-3 & 2 & 1 & -2\\ -3 & 2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1 & -1\\ -3 & 2 & 3 & -3\end{bmatrix},\quad \mathbf{D}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1\end{bmatrix}.$$

Ответы:

$|\mathbf{A}|=0$, $|\mathbf{B}|=1$, $|\mathbf{C}|=-3$, $|\mathbf{D}|=33$.

Задача 3 (*)
Доказать следующие свойства обратной матрицы:

1) $\mathbf{E}^{-1}=\mathbf{E}$;
2) $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\mathbf{A}$;
3) $(\lambda\mathbf{A})^{-1}=(1/\lambda)\mathbf{A}^{-1}$;
4) $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$;
5) $(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$;
6) если матрица $\mathbf{A}$ – невырожденная диагональная, то $\mathbf{A}^{-1}$ – диагональная;
7) если матрица $\mathbf{A}$ – невырожденная треугольная, то $\mathbf{A}^{-1}$ – треугольная;
8) если матрица $\mathbf{A}$ – невырожденная симметричная, то $\mathbf{A}^{-1}$ – симметричная;
9) если матрица $\mathbf{A}$ – *ортогональная*, т.е. $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}=\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}=\mathbf{E}$, то $\mathbf{A}^{-1}$ – ортогональная.

Задача 4 (*)
Доказать, что, если $\mathbf{A}$ – невырожденная матрица размера $n\times n$, то всякий вектор-столбец $\mathbf{b}$ размера $n\times 1$ является линейной комбинацией столбцов матрицы $\mathbf{A}$.
Найти коэффициенты этой линейной комбинации.

Задача 5 (*)
Доказать, что алгебраическое дополнение $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.