Задача 1

Записать каноническое уравнение линии второго порядка, найти координаты её вершин и фокусов, записать (если возможно) уравнения асимптот, если известно, что:

1) уравнения директрис линии $D_1 : x = -2$, $D_2 : x = 2$ и эксцентриситет $e = 1/2$;
2) уравнения директрис линии $D_1 : x = -4$, $D_2 : x = 4$ и межфокусное расстояние 10;
3) расстояние от точки $M(4,4)$, принадлежащей линии, до её фокуса равно расстоянию до её директрисы и равно 5.

Ответы:

1) уравнение линии $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{3/4} = 1$, т.е. линия представляет собой эллипс; вершины $A_1(-1,0)$, $A_2(1,0)$, $B_1(0,-\sqrt{3}/2)$ и $B_2(0,\sqrt{3}/2)$; фокусы $F_1(-1/2,0)$ и $F_2(1/2,0)$;
2) уравнение линии $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$, т.е. линия представляет собой гиперболу; вершины $A_1(-2\sqrt{5},0)$ и $A_2(2\sqrt{5},0)$; фокусы $F_1(-5,0)$ и $F_2(5,0)$; асимптоты $L_1 : y = -x/2$ и $L_2 : y = x/2$;
3) уравнение линии $y^2 = 4x$, т.е. линия представляет собой параболу; вершина $(0,0)$; фокус $F(1,0)$.

Пояснение к задачам 2 и 3.

Каноническое уравнение гиперболы было получено из уравнения $r_1 - r_2 = 2a$, т.е. является его следствием. Так как уравнение $r_1 - r_2 = 2a$ по сути является определением гиперболы, то получается, что координаты всякой точки гиперболы удовлетворяют каноническому уравнению. Но в процессе вывода канонического уравнения применялась операция возведения в квадрат, поэтому уравнение могло "зацепить" лишние корни, в связи с чем возникает вопрос: верно ли обратное утверждение, т.е, если координаты точки удовлетворяют каноническому уравнению, то принадлежит ли эта точка гиперболе?

В задаче 2 требуется доказать, что в каноническом уравнении гиперболы лишних корней нет, а в задаче 3 доказать аналогичное утверждение относительно канонического уравнения параболы.

Задача 2 (*)

Доказать, что уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ является уравнением гиперболы.

Задача 3 (*)

Доказать, что уравнение $y^2 = 2px$ является уравнением параболы.

Задача 4 (*)

Доказать, что для любой точки $M(x,y)$, принадлежащей гиперболе, имеет место равенство

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e,$$

где

r_1, r_2 – расстояния от точки M до фокусов гиперболы $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$;

d_1, d_2 – расстояния от точки M до её директрис $D_1 : x = -\frac{a}{e}$ и $D_2 : x = \frac{a}{e}$.