

Задача 1

Столбцы матриц \mathbf{F} и \mathbf{G} – это координатные столбцы векторов базисов $\{\mathbf{f}\}$ и $\{\mathbf{g}\}$ относительно некоторого базиса $\{\mathbf{e}\}$. Требуется найти матрицы \mathbf{S}_1 и \mathbf{S}_2 – матрицы переходов от базиса $\{\mathbf{f}\}$ к базису $\{\mathbf{g}\}$ и от базиса $\{\mathbf{g}\}$ к базису $\{\mathbf{f}\}$ соответственно, если

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{G} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ответ:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задача 2

Найти координатный столбец ξ вектора \mathbf{x} в базисе $\{\mathbf{e}\}$ по его координатному столбцу ξ' в базисе $\{\mathbf{e}'\}$ и координатный столбец ζ' вектора \mathbf{z} в базисе $\{\mathbf{e}'\}$ по его координатному столбцу ζ в базисе $\{\mathbf{e}\}$, если

$$1) \text{ матрица перехода от базиса } \{\mathbf{e}\} \text{ к базису } \{\mathbf{e}'\} \text{ имеет вид } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{координатные вектор-столбцы } \xi' = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ и } \zeta = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix};$$

$$2) \text{ матрица перехода от базиса } \{\mathbf{e}\} \text{ к базису } \{\mathbf{e}'\} \text{ имеет вид } \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\text{координатные вектор-столбцы } \xi' = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \text{ и } \zeta = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Ответы:

$$1) \xi = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \text{ и } \zeta' = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -2 \end{bmatrix};$$

$$2) \xi = \begin{bmatrix} -5 \\ 4 \\ -4 \end{bmatrix} \text{ и } \zeta' = \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Задача 3

В столбцах матрицы \mathbf{X} записаны координаты векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_5$ относительно некоторого базиса. Требуется определить размерность линейной оболочки $L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_5)$, её базис и координаты остальных векторов в этом базисе.

$$1) \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -5 & -4 \\ -3 & 1 & 0 & 7 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix};$$

$$2) \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ответы:

- 1) $\dim(L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_5)) = 2$, в качестве базиса можно взять векторы $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$, остальные векторы в данном базисе имеют координаты: $\mathbf{x}_4 = \{-2, 1, -2\}$, $\mathbf{x}_5 = \{-1, 1, -2\}$;
- 2) $\dim(L(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_5)) = 4$, в качестве базиса можно взять векторы $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4\}$, остальные векторы в данном базисе имеют координаты: $\mathbf{x}_5 = \{-1, 1, -2, 0\}$.