Задача 1
Вычислить определитель произведения следующих матриц:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\1&2&3\end{bmatrix}.$$

Ответ:

$|\mathbf{ABC}|=36$.

Задача 2
Доказать, что $|\mathbf{A}^{-1}|=|\mathbf{A}|^{-1}$.

Задача 3
Найти ранг, базисный минор, базисные строки и столбцы следующих матриц:

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_3=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_4=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_5=\begin{bmatrix}1&2\\1&2\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_6=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_7=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&9\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_8=\begin{bmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_9=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},\ \mathbf{A}_{10}=\begin{bmatrix}1&-3&1\\-2&6&-2\\3&-9&1\end{bmatrix}.$$

Ответы:

$r(\mathbf{A}_1)=0$, $r(\mathbf{A}_2)=2$, $r(\mathbf{A}_3)=2$, $r(\mathbf{A}_4)=1$, $r(\mathbf{A}_5)=1$, $r(\mathbf{A}_6)=2$,

$r(\mathbf{A}_7)=1$, $r(\mathbf{A}_8)=2$, $r(\mathbf{A}_9)=3$, $r(\mathbf{A}_{10})=2$.

Задача 4
Оценить ранг матрицы $\mathbf{A}$, если известно, что:
1) матрица $\mathbf{A}$ является квадратной невырожденной матрицей размера $n\times n$;
2) матрица $\mathbf{A}$ является диагональной размера $n\times n$;
3) матрица $\mathbf{A}$ содержит подматрицу ранга r;
4) все миноры k-го порядка матрицы $\mathbf{A}$ равны нулю.

Ответы:
1) $r(\mathbf{A})=n$;
2) ранг матрицы $\mathbf{A}$ равен количеству ненулевых диагональных элементов;
3) $r(\mathbf{A})\ge r$;
4) $r(\mathbf{A})<k$.

Задача 5
Оценить ранг матрицы $\mathbf{C}=[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{B}]$, состоящей из всех столбцов матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, привести примеры матриц, для которых оценка сверху имеет вид (не)равенства.

Ответ: $r(\mathbf{C})\ge r(\mathbf{A})$, $r(\mathbf{C})\ge r(\mathbf{B})$, $r(\mathbf{C})\le r(\mathbf{A})+r(\mathbf{B})$;

равенство:

пусть $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$ и $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$;

неравенство:

пусть $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{bmatrix}$ и $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$.

Задача 6

Оценить ранг матрицы $\mathbf{B}_{m\times n}$, строки которой являются линейными комбинациями строк матрицы $\mathbf{A}_{m\times n}$, привести примеры матриц, для которых оценка имеет вид (не)равенства.

Ответ: $r(\mathbf{B}) \le r(\mathbf{A})$;

равенство:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix};$$

неравенство:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача 7

Доказать, что для матрицы $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$ имеет место оценка ранга $r(\mathbf{C}) \le \min\{ r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B})\}$, привести примеры матриц, для которых оценка имеет вид (не)равенства.

Ответ:

равенство:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

неравенство:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задача 8

Определить ранги следующих матриц:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 3 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ -3 & 7 & -3 & -7 \\ -1 & 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & -5 \\ 1 & -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 7 & 2 & 0 \\ 8 & -4 & 3 & 8 \end{bmatrix}.$$

Ответы:

$r(\mathbf{A}_1) = 2$, $r(\mathbf{A}_2) = 3$, $r(\mathbf{A}_3) = 4$.