Задача 1
Пусть $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 2$ и угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен $\varphi = \pi/3$.
Найти скалярное и векторное произведения векторов $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ если
1) $\mathbf{c} = \mathbf{a} - 2\mathbf{b}$ и $\mathbf{d} = \mathbf{a} + 2\mathbf{b}$;
2) $\mathbf{c} = 2\mathbf{b} - 2\mathbf{a}$ и $\mathbf{d} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Ответ:
1) $(\mathbf{c},\mathbf{d}) = 0$ и $[\mathbf{c},\mathbf{d}] = 4[\mathbf{a},\mathbf{b}]$;
2) $(\mathbf{c},\mathbf{d}) = -24$ и $[\mathbf{c},\mathbf{d}] = \mathbf{O}$.

Задача 2
Найти скалярное и векторное произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, имеющих в декартовой прямоугольной системе координат следующие координаты:
1) $\mathbf{a} = \{1,2,0\}$ и $\mathbf{b} = \{0,1,2\}$;
2) $\mathbf{a} = \{1,-2,1\}$ и $\mathbf{b} = \{2,1,2\}$.

Ответ:
1) $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 2$ и $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \{4,-2,1\}$;
2) $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 2$ и $[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \{-5,0,5\}$.

Задача 3
Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{b}$ на вектор $\mathbf{a}$ и угол между ними, если в декартовой прямоугольной системе координат $\mathbf{a} = \{1,2\}$, $\mathbf{b} = \{-3,4\}$.

Ответ: $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b}) = \sqrt{5}$ и $\cos(\varphi) = 1/\sqrt{5}$.

Задача 4
Найти площадь треугольника ABC, координаты вершин которого в декартовой прямоугольной системе координат равны $A(1,1,1)$, $B(2,2,1)$ и $C(0,1,3)$.

Ответ: $S_{ABC} = 3/2$.

Задача 5
Векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ в декартовой прямоугольной системе координат имеют координаты: $\mathbf{a} = \{1,2,3\}$, $\mathbf{b} = \{4,5,6\}$ и $\mathbf{c} = \{7,8,9\}$. Определить ориентацию тройки векторов $\mathbf{abc}$ и вычислить V – объём параллелепипеда, построенного на приведённых к общему началу векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Ответ: $V = 0$, векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны, поэтому ориентация тройки векторов $\mathbf{abc}$ не определена.

Задача 6
Доказать свойства скалярного, векторного и смешанного произведений векторов:
1) $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны;
2) $(\mathbf{a},\mathbf{b}) > 0$ тогда и только тогда, когда угол φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ острый;
$(\mathbf{a},\mathbf{b}) < 0$ тогда и только тогда, когда угол φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ тупой;
3) $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (\mathbf{b},\mathbf{a})$;
4) $(\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a},\mathbf{b})$ и $(\mathbf{a},\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a},\mathbf{b})$;
5) $(\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{c}) + (\mathbf{b},\mathbf{c})$ и $(\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c}) = (\mathbf{a},\mathbf{b}) + (\mathbf{a},\mathbf{c})$;
6) Для $\forall\mathbf{a} \neq \mathbf{O}$ $(\mathbf{a},\mathbf{a}) > 0$ и $(\mathbf{a},\mathbf{a}) = \mathbf{O}$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} = \mathbf{O}$;
7) $[\mathbf{a},\mathbf{a}] = \mathbf{O}$ для любого вектора $\mathbf{a}$;
8) $[\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}] = \lambda[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ и $[\mathbf{a},\lambda\mathbf{b}] = \lambda[\mathbf{a},\mathbf{b}]$;
9) $[\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}] = [\mathbf{a},\mathbf{c}] + [\mathbf{b},\mathbf{c}]$ и $[\mathbf{a},\mathbf{b}+\mathbf{c}] = [\mathbf{a},\mathbf{b}] + [\mathbf{a},\mathbf{c}]$;
10) $([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c}) = 0$ тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны.

Задача 7 (*)
Доказать, что площадь треугольника с вершинами $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$ и $C(x_C, y_C)$ может быть вычислена по формуле $S_{ABC} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A \end{vmatrix}$.

Задача 8 (*)
Доказать, что каковы бы ни были три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и числа α, β и γ, векторы $\mathbf{f} = \alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{b}$, $\mathbf{g} = \gamma\mathbf{b} - \alpha\mathbf{c}$ и $\mathbf{h} = \beta\mathbf{c} - \gamma\mathbf{a}$ являются линейно зависимыми.