Задача 1
Найти общее решение следующих систем линейных уравнений:

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 - 5x_3 + 2x_4 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 + 8x_3 - x_4 = -2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -4, \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 - 4x_5 = 4, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 - x_5 = 1. \end{cases}$ 4. $\begin{cases} x_2 - 4x_3 - x_4 - 3x_5 = -2, \\ -2x_1 + 2x_2 - 6x_3 - x_4 - 4x_5 = -3, \\ 2x_2 - 8x_3 - 2x_4 - 6x_5 = -4. \end{cases}$

Ответы:

1. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$ или $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$. 2. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$.

3. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$. 4. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$.

Задача 2
Найти матрицу $\mathbf{A}$ системы линейных уравнений

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix},$$

если общее решение системы имеет вид:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ответ:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задача 3

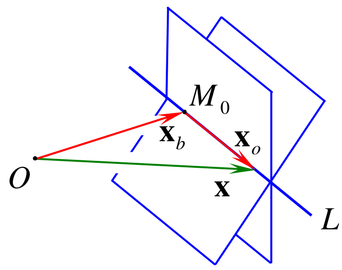
Дать геометрическую интерпретацию для следующих систем и их общих решений:

1. $\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 6. \end{cases}$

Ответы:

1. Имеем уравнения двух плоскостей, пересекающихся вдоль прямой линии; система имеет решение

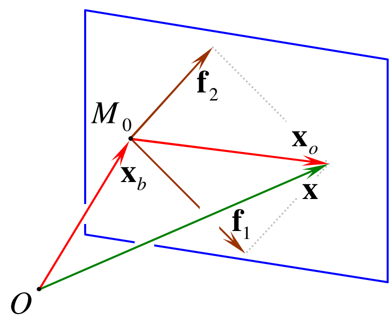
$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} t,$$



которое имеет вид параметрического уравнения прямой линии, вдоль которой пересекаются плоскости; частное решение системы – это координаты начальной точки прямой (её радиус вектора); общее решение системы содержит координаты направляющего вектора прямой.

2. Имеем два уравнения с пропорциональными коэффициентами, т.е. уравнения описывают одну и ту же плоскость; система имеет решение

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} t_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t_2,$$



которое имеет вид параметрического уравнения плоскости; частное решение системы – это координаты начальной точки плоскости (её радиус вектора); общее решение системы содержит координаты двух направляющих векторов плоскости.