Задача 1
Найти союзную и обратную матрицу для следующих матриц:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 1 & 1 & 0\\ -2 & 1 & 2\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & -3 & -3\\ -2 & 3 & 3\\ -2 & 2 & 3\end{bmatrix}.$$

Ответы:

$$\mathbf{A}^*=\begin{bmatrix}2 & -2 & -2\\ -2 & 6 & 2\\ 3 & -5 & -1\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{4}\mathbf{A}^*,\quad \mathbf{B}^*=\begin{bmatrix}3 & 3 & 0\\ 0 & 3 & -3\\ 2 & 0 & 3\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}^{-1}=\frac{1}{3}\mathbf{B}^*.$$

Задача 2
Дать геометрическую, векторную и матричную интерпретации следующих систем линейных уравнений:

$$1.\ \begin{cases}-x_1+x_2=1,\\ 2x_1+x_2=4.\end{cases}\quad 2.\ \begin{cases}-3x_1+2x_2=1,\\ 3x_1-2x_2=1.\end{cases}\quad 3.\ \begin{cases}x_1-2x_2=2,\\ -2x_1+4x_2=-4.\end{cases}$$

Ответы:

1. Пересекающиеся прямые линии: вектор-столбцы матрицы системы линейно независимы; разложение вектор-столбца $\mathbf{b}$ по ним определено однозначно; система совместна, т.к. $r(\mathbf{A})=r(\tilde{\mathbf{A}})=2$ и по теореме Крамера имеет единственное решение.
2. Параллельные прямые линии: вектор-столбцы матрицы системы коллинеарны; вектор-столбец $\mathbf{b}$ не коллинеарен им поэтому не может быть представлен в виде их линейной комбинации; система не совместна, т.к. $r(\mathbf{A})=1<r(\tilde{\mathbf{A}})=2$.
3. Совпадающие прямые линии: вектор-столбец $\mathbf{b}$ коллинеарен вектор-столбцам матрицы системы, поэтому существует бесконечно много способов представления вектор-столбца $\mathbf{b}$ в виде их линейной комбинации; система совместна и имеет бесконечно много решений, т.к. $r(\mathbf{A})=r(\tilde{\mathbf{A}})=1<n=2$.

Задача 3
Решить следующие системы линейных уравнений:

$$1.\ \begin{cases}x_1-x_2-5x_3+2x_4=-1,\\ -x_1+2x_2+8x_3-x_4=-2.\end{cases}\qquad 2.\ \begin{cases}3x_1-5x_2+2x_3-x_4=4,\\ 4x_1-7x_2+3x_3-2x_4=5.\end{cases}$$

$$3.\ \begin{cases}2x_1-5x_2+7x_3-8x_4-7x_5=1,\\ 2x_1-2x_2+4x_3-2x_4-4x_5=-2,\\ 4x_1-5x_2+9x_3-6x_4-9x_5=-3.\end{cases}\qquad 3.\ \begin{cases}x_1+x_2+7x_3+x_4+2x_5=-8,\\ x_1-4x_2-3x_3-4x_4-3x_5=2,\\ -2x_1+7x_2+4x_3+7x_4+5x_5=8.\end{cases}$$

Ответы:

1. $x_1=-4+2x_3-3x_4$, $x_2=-3-3x_3-x_4$, x_3 и x_4 выбираются произвольно или $x_1=5+3x_2+11x_3$, $x_4=-3-x_2-3x_3$, x_2 и x_3 выбираются произвольно.
2. $x_3=3-2x_1+3x_2$, $x_4=2-x_1+x_2$, x_1 и x_2 выбираются произвольно.
3. $x_1=-2-x_3-x_4+x_5$, $x_2=-1+x_3-2x_4-x_5$, x_3, x_4 и x_5 выбираются произвольно.
4. Система уравнений несовместная, т.к. $r(\mathbf{A})=2<r(\tilde{\mathbf{A}})=3$.

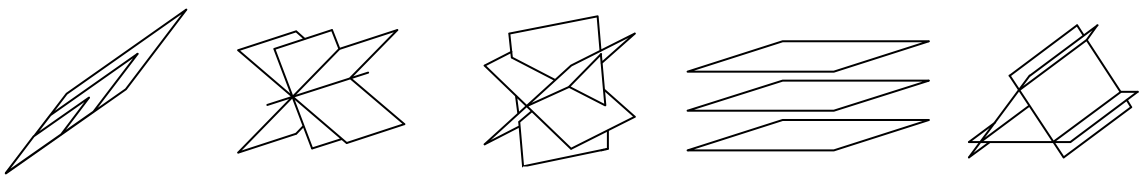
Задача 4

Дать геометрическую интерпретацию всех возможных ситуаций (т.е. когда решение существует и когда не существует), для следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 = D_1, \\ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 = D_2, \\ A_3x_1 + B_3x_2 + C_3x_3 = D_3, \end{cases} \quad \text{где } A_i^2 + B_i^2 + C_i^2 > 0, \text{ для } i = 1, 2, 3.$$

Ответы:

1. $r(\mathbf{A}) = r(\tilde{\mathbf{A}}) = 1$ – три уравнения описывают одну и ту же плоскость; система имеет множество решений; координаты любой точки плоскости удовлетворяют данной системе уравнений.
2. $r(\mathbf{A}) = r(\tilde{\mathbf{A}}) = 2$ – хотя бы одно из уравнений системы является линейной комбинацией двух других; как минимум два уравнения линейно независимы; имеем пучок плоскостей; система имеет множество решений; координаты любой точки, принадлежащей, прямой, вдоль которой пересекаются плоскости, удовлетворяют системе уравнений.
3. $r(\mathbf{A}) = r(\tilde{\mathbf{A}}) = 3$ – система имеет единственное решение – координаты точки пересечения трёх плоскостей.
4. $r(\mathbf{A}) = 1 \neq r(\tilde{\mathbf{A}}) = 2$ – плоскости параллельны и, как минимум две, не совпадают; система не имеет решения.
5. $r(\mathbf{A}) = 2 \neq r(\tilde{\mathbf{A}}) = 3$ – каждая плоскость пересекается с другой, но одной точки пересечения нет, т.е. плоскости образуют призму, система не имеет решения.



1 2 3 4 5