Линейное пространство E называется *евклидовым пространством*, если для каждой пары векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ определена числовая функция – *скалярное произведение* – такая, что:

1. $(\mathbf{x},\mathbf{y})=(\mathbf{y},\mathbf{x})$ для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.
2. $(\lambda\mathbf{x},\mathbf{y})=\lambda(\mathbf{x},\mathbf{y})$ для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ и числа λ.
3. $(\mathbf{x}+\mathbf{y},\mathbf{z})=(\mathbf{x},\mathbf{z})+(\mathbf{y},\mathbf{z})$ для любых векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$.
4. $(\mathbf{x},\mathbf{x})>0$ для любого ненулевого вектора и $(\mathbf{x},\mathbf{x})=0$, если $\mathbf{x}=\mathbf{O}$.

Для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ евклидова пространства имеет место неравенство:

$$(\mathbf{x},\mathbf{y})^2\le(\mathbf{x},\mathbf{x})(\mathbf{y},\mathbf{y}).$$

Это неравенство в зарубежной литературе обычно называют неравенством *Коши-Шварца*, а в отечественной литературе – неравенством *Коши-Буняковского*.

Числовая функция $\|\mathbf{x}\|$ называется *нормой или длинной вектора* $\mathbf{x}$, если:

1. $\|\mathbf{x}\|>0$ для любого ненулевого вектора и $\|\mathbf{x}\|=0$, если $x=\mathbf{O}$.
2. $\|\lambda\mathbf{x}\|=|\lambda|\|\mathbf{x}\|$ для любого вектора $\mathbf{x}$ и числа λ.
3. $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|\le\|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|$ для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ (*неравенство треугольника*).

Числовая функция $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})$ называется *расстоянием между векторами* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$, если:

1. $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})=\rho(\mathbf{y},\mathbf{x})$ для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.
2. $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})>0$ для любых векторов $\mathbf{x}\ne\mathbf{y}$, и $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$, если $\mathbf{x}=\mathbf{y}$.
3. $\rho(\mathbf{x},\mathbf{z})\le\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})+\rho(\mathbf{y},\mathbf{z})$ для любых векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$.

Пространство называется *нормированным*, если в нём определена норма для каждого вектора, и *метрическим*, если в нём определено расстояние для каждой пары векторов.

Утверждение. Евклидово пространство является нормированным и метрическим, если норма вектора и расстояние между векторами определены следующим образом:

$$\|\mathbf{x}\|=\sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}\quad\text{и}\quad\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})=\|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|.$$

Используя неравенство Коши-Буняковского и введённое определение нормы, можно показать, что отношение

$$\left|\frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}\right|\le1,$$

причём равенство достигается только, если $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{y}$, т.е. когда векторы коллинеарны. Поэтому данное отношение можно использовать для определение угла между векторами в произвольном линейном пространстве:

$$\cos(\varphi)=\frac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}.$$

Ненулевые векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ называются *ортогональными*, если $(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$.

Совокупность векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2,\ldots$, $\mathbf{x}_n$ называется *ортогональной*, если:

1) среди векторов совокупности нет нулевого вектора,
2) все векторы совокупности попарно ортогональны, т.е. $(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)=0$ при $i\ne j$.

Теорема (об ортогональной системе векторов)
Пусть векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2,\dots,$ $\mathbf{x}_n$ ортогональные, тогда справедливы следующие утверждения:

1. Векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2,\dots,$ $\mathbf{x}_n$ линейно независимые.
2. $\|\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2+\dots+\mathbf{x}_n\|^2=\|\mathbf{x}_1\|^2+\|\mathbf{x}_2\|^2+\dots+\|\mathbf{x}_n\|^2$

Пусть $\mathbf{x}$ – произвольный ненулевой вектор и $\mathbf{z}=\dfrac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$, тогда можно показать, что $\|\mathbf{z}\|=1$.

Вектор единичной длины называется *нормированным* или *ортом*.

Операция умножения вектора на величину обратную его длине называется *нормализацией* или *нормированием вектора*; результатом операции является вектор того же направления единичной длины.

Ортогональная совокупность векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2,\dots,$ $\mathbf{x}_n$ называется *ортонормированной*, если $(\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_j)=\delta_{ij}$ для всех $i\neq j$, где δ_{ij} – символ Кронекера, равный 1 при $i=j$ и равный 0 при $i\neq j$.

Теорема (процедура ортогонализации Грама-Шмидта)
В евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Свойства ортонормированного базиса
Пусть $\{\mathbf{e}\}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\dots,\mathbf{e}_n\}$ – ортонормированный базис, и векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в этом базисе имеют координаты $\mathbf{x}=\{\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n\}$ и $y=\{\eta_1,\eta_2,\dots,\eta_n\}$, тогда:

1. $(\mathbf{x},\mathbf{e}_i)=\xi_i$.
2. $(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i$.
3. $\|\mathbf{x}\|=\sqrt{(\mathbf{x},\mathbf{x})}=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i}=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+\dots+\xi_n^2}$.
4. $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})=\|\mathbf{x}-y\|=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(\xi_i-\eta_i)^2}=\sqrt{(\xi_1-\eta_1)^2+(\xi_2-\eta_2)^2+\dots+(\xi_n-\eta_n)^2}$.
5. $\cos(\varphi)=\dfrac{(\mathbf{x},\mathbf{y})}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\eta_i^2}}$, где φ – угол между векторами $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.
6. $\cos(\alpha_i)=\dfrac{(\mathbf{x},\mathbf{e}_i)}{\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{e}_i\|}=\dfrac{\xi_i}{\|\mathbf{x}\|}=\dfrac{\xi_i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i^2}}$, где α_i – направляющий угол – угол между

   вектором $\mathbf{x}$ и базисным вектором $\mathbf{e}_i$.

Замечание. Простейшим ортонормированным базисом является канонический базис.
Пусть F – подмножество евклидова пространства E.
Вектор $\mathbf{x}$ *ортогонален подпространству* F ($\mathbf{x}\perp F$), если он ортогонален каждому вектору F, т.е. для любого вектора $\mathbf{f}\in F$ скалярное произведение $(\mathbf{x},\mathbf{f})=0$.

Пусть F и G – подмножества евклидова пространства E.
Подпространство F ортогонально подпространству G ($F \perp G$), если каждый вектор F ортогонален каждому вектору G, т.е. для любых векторов $\mathbf{f} \in F$ и $\mathbf{g} \in G$ $(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = 0$.

Теорема (об условиях ортогональности линейных подпространств)
Пусть F и G – линейные подпространства пространства E и $\{\mathbf{f}\} = \{\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, ..., \mathbf{f}_p\}$ и $\{\mathbf{g}\} = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, ..., \mathbf{g}_q\}$ – их базисы, тогда справедливы следующие утверждения:

1. Вектор x ортогонален F тогда и только тогда, когда он ортогонален каждому из базисных векторов F, т.е. $(\mathbf{x}, \mathbf{f}_i) = 0$ для всех $i = 1, 2, ..., p$.
2. Подпространства F и G ортогональны тогда и только тогда, когда каждый базисный вектор базиса $\{\mathbf{f}\}$ ортогонален каждому базисному вектору $\{\mathbf{g}\}$, т.е. $(\mathbf{f}_i, \mathbf{g}_j) = 0$ для всех $i = 1, 2, ..., p$ и $j = 1, 2, ..., q$.

Пусть F – линейное подпространство евклидова пространства E, тогда множество $F^{\perp} = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in E, \mathbf{x} \perp F\}$, т.е. множество векторов пространства E ортогональных F, называется *ортогональным дополнением подпространства F до пространства E*. Можно показать, что множество $F^{\perp}$ является линейным подпространством.

Теорема (о разложении евклидова пространства)
Евклидово пространство E может быть представлено в виде прямой суммы некоторого линейного подпространства и его ортогонального дополнения, т.е.

$$E = F \oplus F^{\perp},$$

где F произвольное линейное подпространство евклидова пространства E.