Рассматривается неоднородная система линейных уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, где матрица системы $\mathbf{A}$ имеет размер $m \times n$ ($m$ строк, $n$ столбцов) и имеет ранг $r$.

**Теорема (об условиях несовместности системы Ax = b)**
Справедливы следующие утверждения:

1. Система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ несовместная тогда и только тогда, когда противоречивое уравнение $0x_1 + 0x_2 + ... + 0x_n = 1$ является следствием уравнений системы (т.е. вектор-строка $[\,0\;\;0\;\;...\;\;0\;|\;1\,]$ является линейной комбинацией строк расширенной матрицы системы $\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A}\,|\,\mathbf{b}]$.
2. Если $r(\mathbf{A}) < m$, то существует вектор-столбец $\mathbf{b}$ такой, что система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ является несовместной.

**Теорема (об условиях совместности системы Ax = b при произвольном b)**
Система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ совместная при любом вектор-столбце $\mathbf{b}$ тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен количеству уравнений системы, т.е. $r(\mathbf{A}) = m$.

**Теорема (об условиях существования не более одного решения системы Ax = b)**
Если ранг матрицы системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ равен количеству неизвестных, т.е. $r(\mathbf{A}) = n$, то система имеет не более одного решения.

**Альтернатива Фредгольма**
Либо система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ совместна при любом вектор-столбце $\mathbf{b}$,
либо *сопряжённая система* $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{z} = \mathbf{O}$ имеет нетривиальное решение.

**Теорема Фредгольма**
Система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ совместна при любом вектор-столбце $\mathbf{b}$, тогда и только тогда, когда для любого вектор-столбца $\mathbf{z}$ такого, что $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{z} = \mathbf{O}$, имеет место $\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{b} = 0$.

**Теорема (о совместности системы $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$)**
Система $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}$ всегда совместна.