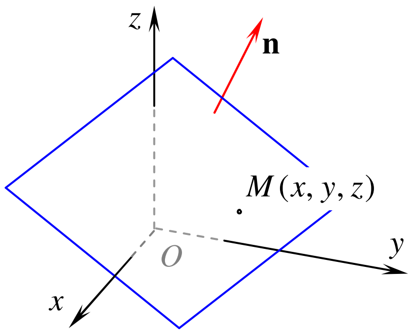
Плоскость в пространстве

Теорема (об общем уравнении плоскости)
Поверхность S является плоскостью тогда и только тогда, когда она описывается уравнением первой степени $Ax+By+Cz+D=0$, где коэффициенты A, B и C не равны нулю одновременно.



Уравнение $Ax+By+Cz+D=0$ называется *общим уравнением плоскости*; если все коэффициенты уравнения не равны нулю, то оно называется *полным общим уравнением плоскости*.
Вектор $\mathbf{n}=\{A,B,C\}$ ортогонален плоскости S и называется *нормальным вектором плоскости*.

Замечание
Если уравнения $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ описывают одну и ту же плоскость S, то существует число λ такое, что $A_1=\lambda A_2$, $B_1=\lambda B_2$, $C_1=\lambda C_2$ и $D_1=\lambda D_2$.

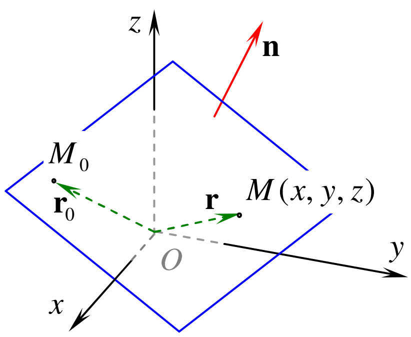
Другие способы описания плоскости

Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ *ортогонально вектору* $n=\{A,B,C\}$, имеет вид

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Векторное уравнение плоскости имеет вид

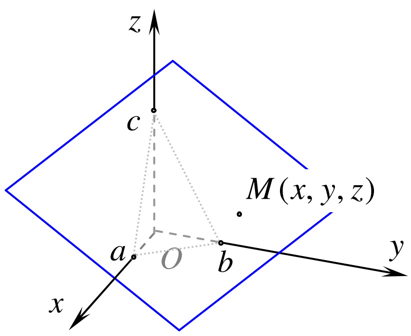
$$(\mathbf{n},\overline{M_0M})=0 \quad \text{или} \quad (\mathbf{n},\mathbf{r})=(\mathbf{n},\mathbf{r}_0).$$



Уравнение плоскости в отрезках имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

где коэффициенты a, b и c – величины отрезков, которые плоскость S отсекает на осях координат Ox, Oy и Oz соответственно.

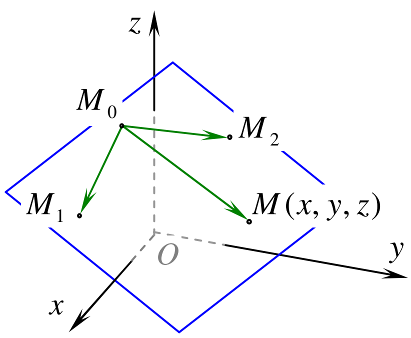


Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$, $M_1(x_1,y_1,z_1)$ *и* $M_2(x_2,y_2,z_2)$, имеет вид

$$([\overline{M_0M_1},\overline{M_0M_2}],\overline{M_0M})=0$$

или

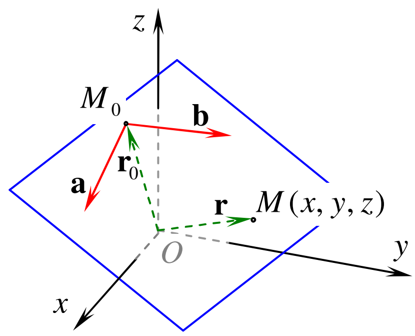
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0.$$



Параметрическое уравнение плоскости имеет вид

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t_1 + \mathbf{b}t_2 \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = x_0 + a_x t_1 + b_x t_2 \\ y = y_0 + a_y t_1 + b_y t_2 \\ z = z_0 + a_z t_1 + b_z t_2 \end{cases},$$

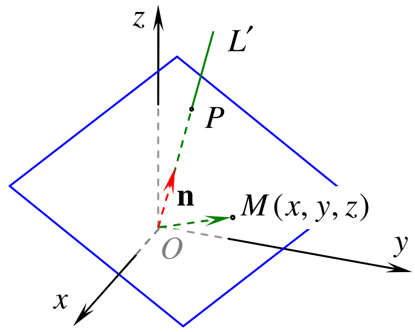
где t_1, t_2 – *параметры*, принимающие любые значения, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – *начальная точка плоскости*, векторы $\mathbf{a} = \{a_x, a_y, a_z\}$ и $\mathbf{b} = \{b_x, b_y, b_z\}$ – *направляющие векторы плоскости*.



Нормированное уравнение плоскости имеет вид

$$x\cos(\alpha) + y\cos(\beta) + z\cos(\gamma) - \rho = 0,$$

где α, β и γ – углы между единичным вектором $\mathbf{n}$, исходящим из начала координат, ортогонально плоскости S, и осями Ox, Oy и Oz соответственно, ρ – расстояние от точки O до точки P – точки пересечения плоскости S с прямой линией L', проходящей через точку O в направлении вектора $\mathbf{n}$.



Пучок плоскостей

Совокупность плоскостей, пересекающихся вдоль одной прямой линии L, называется *пучком плоскостей с центром в* L.

Теорема (о пучке плоскостей)

Пусть $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ – уравнения двух различных плоскостей, пересекающихся вдоль прямой линии L, тогда справедливы утверждения:

1. Для любых не равных одновременно нулю чисел λ_1 и λ_2, уравнение $\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ является уравнением плоскости, проходящей через прямую линию L.
2. Для любой плоскости S, проходящей через прямую линию L, найдутся числа λ_1 и λ_2 такие, что уравнение $\lambda_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$ будет уравнением этой плоскости.

Связка плоскостей

Совокупность плоскостей, пересекающихся в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, называется *связкой плоскостей с центром в точке* M_0.

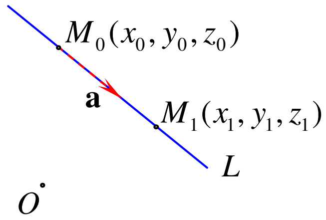
Очевидно, что все плоскости, принадлежащие связке плоскостей с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, могут быть описаны уравнением $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, где A, B и C – произвольные не равные одновременно нулю числа.

Прямая линия в пространстве

Каноническое уравнение прямой линии имеет вид

$$\frac{x-x_0}{a_x}=\frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z},$$

где $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – *начальная точка прямой*, вектор $\mathbf{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ – *направляющий вектор прямой.*



Если одна из координат направляющего вектора, например, a_x равна нулю, то уравнение переписывается в виде

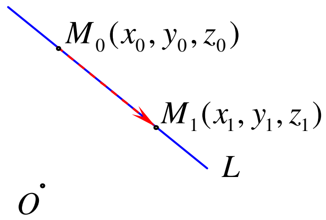
$$x=x_0 \text{ и } \frac{y-y_0}{a_y}=\frac{z-z_0}{a_z}.$$

Если у направляющего вектора две координаты, например, a_x и a_y равны нулю, то уравнение переписывается в виде

$$x=x_0 \text{ и } y=y_0.$$

Уравнение *прямой линии, проходящей через две* заданные *точки* $M_0(x_0,y_0,z_0)$ *и* $M_1(x_1,y_1,z_1)$, имеет вид

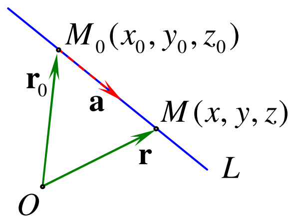
$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}.$$



Параметрическое уравнение прямой линии имеет вид

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{a}t \quad \text{или} \quad \begin{cases} x=x_0+a_xt \\ y=y_0+a_yt \\ z=z_0+a_zt \end{cases},$$

где t – *параметр*, принимающий любые значения, $M_0(x_0,y_0,z_0)$ – *начальная точка прямой*, вектор $\mathbf{a}=\{a_x,a_y,a_z\}$ – *направляющий вектор прямой.*



Прямая линия в пространстве, определяемая двумя пересекающимися плоскостями, описывается системой

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases},$$

где $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ – уравнения этих плоскостей.