Основные определения

Линейное алгебраическое уравнение или просто *линейное уравнение* относительно неизвестных x_1, $x_2, \ldots,$ x_n – это уравнение вида

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b,$$

где a_j – *коэффициенты уравнения*, b – *свободный член уравнения*.

Система линейных алгебраических уравнений – это совокупность уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Такая запись системы называется *развёрнутой формой записи системы линейных алгебраических уравнений*.

Пусть

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \ldots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Тогда система может быть переписана в *векторной форме*

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b},$$

и в *матричной форме*

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}.$$

Совокупность чисел c_1, $c_2, \ldots,$ c_n – называется *решением системы линейных уравнений*, если подстановка их в систему вместо неизвестных x_1, $x_2, \ldots,$ x_n обращает каждое из уравнений системы в тождество. Решения системы $c = \{ c_1, c_2, ..., c_n \}$ и $d = \{ d_1, d_2, ..., d_n \}$ являются *различными*, если имеет место, хотя бы одно неравенство $c_k \neq d_k$.

Если система имеет решение, то она называется *совместной*, иначе – *несовместной*. Если система имеет единственное решение, то она называется *определённой*, иначе – *неопределённой*. Если все числа $b_i = 0$, то система называется *однородной*, иначе – *неоднородной*.

Матрица $\mathbf{A}$ называется *основной матрицей системы*, матрица $\widetilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{A} \mid \mathbf{b}]$ – *расширенной матрицей системы*.

Элементарными преобразованиями уравнений системы называются операции:

1) умножение уравнения на число $\lambda \neq 0$;
2) прибавления одного уравнения к другому;
3) прибавление к одному уравнению другого уравнения, умноженного на число $\lambda \neq 0$;
4) перестановка уравнений.

Утверждение: элементарные преобразования строк расширенной матрицы системы эквивалентны соответствующим преобразованиям уравнений системы и не меняют множества её решений.

Теорема Кронекера – Капелли

Система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ совместна тогда и только тогда, когда $r(\mathbf{A}) = r(\widetilde{\mathbf{A}})$.

Теорема Крамера (опорный случай m = n)

Если матрица системы линейных уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ является квадратной невырожденной, то система совместна и имеет единственное решение:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, \quad \text{где } \mathbf{A}^{-1} = |\,\mathbf{A}\,|^{-1}\,\mathbf{A}^{*},\ \mathbf{A}^{*} = \|a_{ij}^{*}\| - \textit{союзная матрица}, \text{ где } a_{ij}^{*} = A_{ji};$$

или в явном виде: $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$, где $\Delta = |\,\mathbf{A}\,|$ и $\Delta_j = b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \ldots + b_m A_{mj}$.

Теорема о существовании решения (общий случай m ≠ n)

Пусть имеется совместная система линейных уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ и ранг матрицы системы меньше числа неизвестных, тогда система имеет бесконечно много решений.

Ступенчатый вид матрицы

Матрица имеет *ступенчатый вид* если

1) все нулевые строки расположены ниже ненулевых строк;
2) в каждой ненулевой строке, начиная со второй, первый ненулевой элемент (*главный элемент*) расположен правее ненулевого элемента предыдущей строки.

Пример:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица имеет ступенчатый вид, все её главные элементы равны 2.

Столбцы, содержащие главные элементы, называются *главными*. Матрица имеет *главный ступенчатый вид*, если она имеет ступенчатый вид и

1) все её главные элементы равны 1;
2) в главных столбцах все элементы, кроме главных, равны 0.

Пример:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Метод решения системы линейных алгебраических уравнений путём приведения матрицы системы к главному ступенчатому виду

Пусть система $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ – совместна и $r(\mathbf{A}) = r(\widetilde{\mathbf{A}}) = r$.

1. Строится расширенная матрица системы

$$\widetilde{\mathbf{A}} = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right].$$

2. Элементарными преобразованиями строк расширенная матрица системы приводится к главному ступенчатому виду:

$$\tilde{\mathbf{A}}' = \left[\begin{array}{ccc:ccc|c} 1 & \dots & 0 & a'_{1\,r+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 & a'_{r\,r+1} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ \hdashline 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Если в процессе приведения появляются строки, целиком состоящие из нулей, то такие строки отбрасываются.
Если в процессе приведения возникла ситуация, когда главный элемент расположен в крайнем правом столбце, то система не имеет решения.

3. Переменные, соответствующие главным столбцам, объявляются *базисными*; остальные переменные – *свободными* и переносятся вправо:

$$x_1 = b'_1 - a'_{1\,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{1n}x_n,$$
$$x_2 = b'_2 - a'_{2\,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{2n}x_n,$$
$$\dots$$
$$x_r = b'_r - a'_{r\,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{rn}x_n.$$

Если свободных переменных нет, система имеет единственное решение.
Если свободные переменные есть, то система имеет бесконечно много решений, получить которые можно, присвоив свободным переменным произвольные значения.

Окончательное решение будет иметь вид

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} b'_1 - a'_{1\,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{1n}x_n \\ b'_2 - a'_{2\,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{2n}x_n \\ \dots \\ b'_r - a'_{r\,r+1}x_{r+1} - \dots - a'_{rn}x_n \\ x_{r+1} \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix},$$ где $x_{r+1}, \dots, x_n$ выбираются произвольно.