Задача 1

Пусть $|\mathbf{a}|=2$, $|\mathbf{b}|=3$ и угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равен $\varphi=\pi/3$.

Найти скалярное и векторное произведения векторов $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ если

1) $\mathbf{c}=2\mathbf{a}-\mathbf{b}$ и $\mathbf{d}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$;
2) $\mathbf{c}=\mathbf{b}-\mathbf{a}$ и $\mathbf{d}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

Ответ:

1) $(\mathbf{c},\mathbf{d})=-8$ и $[\mathbf{c},\mathbf{d}]=[\mathbf{a},\mathbf{b}]$;
2) $(\mathbf{c},\mathbf{d})=5$ и $[\mathbf{c},\mathbf{d}]=-2[\mathbf{a},\mathbf{b}]$.

Задача 2

Найти скалярное и векторное произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, имеющих в декартовой прямоугольной системе координат следующие координаты:

1) $\mathbf{a}=\{1,-1,0\}$ и $\mathbf{b}=\{0,1,-1\}$;
2) $\mathbf{a}=\{-1,0,1\}$ и $\mathbf{b}=\{1,2,1\}$.

Ответ:

1) $(\mathbf{a},\mathbf{b})=-1$ и $[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\{1,1,1\}$;
2) $(\mathbf{a},\mathbf{b})=0$ и $[\mathbf{a},\mathbf{b}]=\{-2,2,-2\}$.

Задача 3

Найти ортогональную проекцию вектора $\mathbf{b}$ на вектор $\mathbf{a}$ и угол между ними, если их координаты в декартовой прямоугольной системе координат равны $\mathbf{a}=\{8,6\}$ и $\mathbf{b}=\{1,2\}$.

Ответ: $\mathrm{Pr}_{\mathbf{a}}(\mathbf{b})=2$ и $\cos(\varphi)=2/\sqrt{5}$.

Задача 4

Найти площадь треугольника ABC, координаты вершин которого в декартовой прямоугольной системе координат равны $A(1,2,1)$, $B(-1,4,1)$ и $C(1,3,0)$.

Ответ: $S_{ABC}=\sqrt{3}$.

Задача 5

Доказать свойства смешанного произведения векторов:

1) $([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c})=V$, где V – объём параллелепипеда, построенного на приведённых к общему началу векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, взятый со знаком "+", если тройка векторов $\mathbf{abc}$ правая, и со знаком "–", если тройка векторов $\mathbf{abc}$ левая;
2) $([\mathbf{a},\mathbf{b}],\mathbf{c})=(\mathbf{a},[\mathbf{b},\mathbf{c}])$.

Задача 6

Вычислить V – объём параллелепипеда, построенного на приведённых к общему началу векторах $\mathbf{a}=\{-3,2,1\}$, $\mathbf{b}=\{0,-1,-2\}$ и $\mathbf{c}=\{-2,0,-3\}$, определить ориентацию тройки векторов $\mathbf{abc}$.

Ответ: $V=3$, тройка векторов $\mathbf{abc}$ левая.

Задача 7

Доказать, что векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равны тогда и только тогда, когда $(\mathbf{a},\mathbf{c})=(\mathbf{b},\mathbf{c})$ для любого вектора $\mathbf{c}$.

Задача 8

Доказать следующие свойства векторного произведения векторов:

1) $[\mathbf{a},\mathbf{b}]=-[\mathbf{b},\mathbf{a}]$;
2) $[\lambda\mathbf{a},\mathbf{b}]=\lambda[\mathbf{b},\mathbf{a}]$;
3) $[\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{c}]=[\mathbf{a},\mathbf{c}]+[\mathbf{b},\mathbf{c}]$.