Обратная матрица

Квадратная матрица $\mathbf{B}$ называется *обратной матрицей* по отношению к квадратной матрице $\mathbf{A}$, если $\mathbf{BA} = \mathbf{AB} = \mathbf{E}$. Обратную матрицу обычно обозначают $\mathbf{A}^{-1}$.

Теорема (об обратной матрице)

1. Обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда матрица $\mathbf{A}$ является невырожденной.
2. Если обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$ существует, то она единственна.

Свойства обратной матрицы

Обратная матрица обладает следующими свойствами:

1) $\mathbf{E}^{-1} = \mathbf{E}$,
2) $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$,
3) $(\lambda\mathbf{A})^{-1} = (1/\lambda)\mathbf{A}^{-1}$,
4) $(\mathbf{A}^{\mathrm{T}})^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^{\mathrm{T}}$,
5) $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

Нахождение обратной матрицы методом элементарных преобразований

Пусть требуется найти обратную матрицу невырожденной матрицы $\mathbf{A}$. Так как матрица $\mathbf{A}$ невырожденная, то по теореме об элементарных преобразованиях матриц существует последовательность элементарных преобразований строк такая, что в результате их применения к матрице $\mathbf{A}$ получается единичная матрица $\mathbf{E}$, т.е., если $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2,\ldots$, $\mathbf{L}_N$ – матрицы этих преобразований, то $\mathbf{L}_N \ldots \mathbf{L}_2\,\mathbf{L}_1\,\mathbf{A} = \mathbf{E}$, откуда следует, что искомая обратная матрица $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{L}_N \ldots \mathbf{L}_2\,\mathbf{L}_1$.

Избежать трудоёмкого процесса построения матриц $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2,\ldots$, $\mathbf{L}_N$ с их последующим перемножением можно следующим образом:

1) записать расширенную матрицу $[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{E}]$ – матрицу $\mathbf{A}$ с приписанной к ней справа единичной матрицей $\mathbf{E}$;
2) следуя доказательству третьей части теоремы об элементарных преобразованиях матриц, выполнять преобразования строк расширенной матрицы до тех пора, пока расположенная слева матрица $\mathbf{A}$ не будет преобразована в единичную матрицу $\mathbf{E}$.

Когда процесс преобразования матрицы $\mathbf{A}$ в единичную матрицу $\mathbf{E}$ будет завершён, в расширенной матрице справа на месте расположенной единичной матрицы будет находиться обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$.

Математическое обоснование описанного выше процесса выглядит следующим образом:

$$\mathbf{L}_N \ldots \mathbf{L}_2\,\mathbf{L}_1\,[\mathbf{A}\,|\,\mathbf{E}] = [\mathbf{L}_N \ldots \mathbf{L}_2\,\mathbf{L}_1\,\mathbf{A}\,|\,\mathbf{L}_N \ldots \mathbf{L}_2\,\mathbf{L}_1\,\mathbf{E}] = [\mathbf{E}\,|\,\mathbf{L}_N \ldots \mathbf{L}_2\,\mathbf{L}_1\,] = [\mathbf{E}\,|\,\mathbf{A}^{-1}].$$

Определитель

Определителем квадратной матрицы $\mathbf{A}$ называется число

$$|\,\mathbf{A}\,| = \sum_{\{\alpha\}} N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)\, a_{1\alpha_1}\, a_{2\alpha_2} \ldots a_{n\alpha_n},$$

где суммирование ведётся по всем возможным перестановкам последовательности $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$, а множитель $N(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ равен (+1), если количество беспорядков в последовательности $\{\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n\}$ чётное, и равен (-1) в противном случае.

Если в формуле вычисления определителя сгруппировать все слагаемые, содержащие элементы из i-й строки, то получится выражение, состоящее из n слагаемых:

$$|\,\mathbf{A}\,| = a_{i1}\,(\ldots) + a_{i2}\,(\ldots) + \ldots + a_{in}\,(\ldots).$$

Величина в скобках, на которую умножается элемент a_{ij}, обозначается A_{ij} и называется *алгебраическим дополнением элемента* a_{ij}. Таким образом, формула для вычисления определителя принимает вид

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} .$$

Эта формула называется *разложением определителя по элементам* i *-й строки*.
Рассуждая аналогично, можно получить *формулу разложения определителя по элементам* j *-го столбца*

$$|\mathbf{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} .$$

Свойства определителя

Определитель матрицы обладает следующими свойствами:

1) $|\mathbf{A}^{\mathrm{T}}| = |\mathbf{A}|$;
2) если элементы i-й строки матрицы $\mathbf{A}$ имеют вид $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, то определитель матрицы $|\mathbf{A}| = |\mathbf{A}_b| + |\mathbf{A}_c|$, где $\mathbf{A}_b$ и $\mathbf{A}_c$ – матрицы, совпадающие с матрицей $\mathbf{A}$, за исключением i-й строки, элементы которой равны b_{ij} и c_{ij} соответственно;
3) $|\ell^{\mathrm{I}}(\mathbf{A})| = \lambda |\mathbf{A}|$, $|\ell^{\mathrm{II}}(\mathbf{A})| = |\mathbf{A}|$, $|\ell^{\mathrm{III}}(\mathbf{A})| = |\mathbf{A}|$, $|\ell^{\mathrm{IV}}(\mathbf{A})| = -|\mathbf{A}|$;
4) если в матрице $\mathbf{A}$ имеется нулевая строка, то $|\mathbf{A}| = 0$;
5) если в матрице $\mathbf{A}$ имеются две одинаковые строки, то $|\mathbf{A}| = 0$;
6) $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$ при $i \neq k$;
7) $|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}$, т.е. $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$,

   где величина M_{ij} называется *минором элемента* a_{ij} и равна определителю матрицы, получающейся из исходной матрицы $\mathbf{A}$ вычёркиванием i-й строки и j-го столбца.