Задача 1

Найти длины векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, их скалярное произведение и угол между ними, если их координаты в некотором ортонормированном базисе имеют вид:

1. $\mathbf{x}=\{1,2,3,4\}$, $\mathbf{y}=\{-1,1,1,-1\}$.
2. $\mathbf{x}=\{2,-1,1,-2\}$, $\mathbf{y}=\{-2,1,-2,1\}$.

Ответ:

1. $\|\mathbf{x}\|=\sqrt{30}$, $\|\mathbf{y}\|=\sqrt{4}$, $(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$, векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ ортогональны.
2. $\|\mathbf{x}\|=\sqrt{10}$, $\|\mathbf{y}\|=\sqrt{10}$, $(\mathbf{x},\mathbf{y})=-9$, $\cos(\varphi)=-\dfrac{9}{10}$.

Задача 2 (*)

Пусть $\{\mathbf{f}\}=\{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,\mathbf{f}_3\}$ – некоторый базис евклидова пространства.

Используя процедуру ортогонализации Грама-Шмидта, построить ортонормированный базис, если координаты векторов $\{\mathbf{f}\}$ в некотором ортонормированном базисе имеют вид:

1. $\mathbf{f}_1=\{1,0,0\}$, $\mathbf{f}_2=\{1,1,0\}$ и $\mathbf{f}_3=\{1,1,1\}$.
2. $\mathbf{f}_1=\{0,1,2\}$, $\mathbf{f}_2=\{1,2,0\}$ и $\mathbf{f}_3=\{2,0,1\}$.
3. $\mathbf{f}_1=\{-1,1,0\}$, $\mathbf{f}_2=\{1,-1,1\}$ и $\mathbf{f}_3=\{0,1,-1\}$.

Ответ:

1. $\mathbf{e}_1=\{1,0,0\}$, $\mathbf{e}_2=\{0,1,0\}$ и $\mathbf{e}_3=\{0,0,1\}$.
2. $\mathbf{e}_1=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\{0,1,2\}$, $\mathbf{e}_2=\dfrac{1}{\sqrt{105}}\{5,8,-4\}$ и $\mathbf{e}_3=\dfrac{1}{\sqrt{21}}\{4,-2,1\}$.
3. $\mathbf{e}_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\{-1,1,0\}$, $\mathbf{e}_2=\{0,0,1\}$ и $\mathbf{e}_3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\{1,1,0\}$.

Задача 3 (*)

Пусть $\{\mathbf{f}\}=\{\mathbf{f}_1,\mathbf{f}_2,...,\mathbf{f}_n\}$ – ортогональный базис евклидова пространства.

Доказать, что любой вектор x евклидова пространства может быть представлен в виде

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\mathbf{f}_i,\ \text{где}\ \xi_i=\frac{(\mathbf{x},\mathbf{f}_i)}{\|\mathbf{f}_i\|^2},\ i=1,2,...,n.$$

Задача 4 (*)

Пусть $\mathbf{S}$ – матрица перехода от ортонормированного базиса $\{\mathbf{e}\}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,...,\mathbf{e}_n\}$ к базису $\{\mathbf{e}'\}=\{\mathbf{e}'_1,\mathbf{e}'_2,...,\mathbf{e}'_n\}$.

Доказать, что базис $\{\mathbf{e}'\}$ – ортонормированный тогда и только тогда, когда матрица $\mathbf{S}$ – *ортогональная*, т.е. $\mathbf{S}^{-1}=\mathbf{S}^{\mathrm{T}}$.

Задача 5

Доказать, что модуль определителя ортогональной матрицы равен единице.