Элементарные преобразования матриц

Элементарными называются следующие преобразования матриц:

1) ℓ^{I} – умножение строки матрицы на число $\lambda \neq 0$;
2) ℓ^{II} – прибавление одной строки матрицы к другой;
3) ℓ^{III} – прибавление строки, умноженной на число $\lambda \neq 0$, к другой строке матрицы;
4) ℓ^{IV} – перестановка строк матрицы.

Замечания

1. Можно показать, что элементарные преобразования ℓ^{III} и ℓ^{IV} могут быть выполнены с помощью последовательности элементарных преобразований ℓ^{I} и ℓ^{II}.
2. Требование $\lambda \neq 0$ гарантирует обратимость элементарных преобразований, т.е. для каждого элементарного преобразования ℓ можно найти обратное элементарное преобразование ℓ^{-1} такое, что $\ell^{-1}(\ell(\mathbf{A})) = \mathbf{A}$.
3. Запись $\ell(\mathbf{A})$ будет означать выполнение одного из перечисленных выше элементарных преобразований матрицы $\mathbf{A}$.

Матрицы элементарных преобразований

Применив к единичной матрице $\mathbf{E}$ элементарное преобразование ℓ^{I} (умножение i-й строки на матрицы на число $\lambda \neq 0$), получим матрицу

$$\mathbf{L}^{\mathrm{I}} = \ell^{\mathrm{I}}(\mathbf{E}) = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \lambda & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \textit{строка}\ i \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Применив к единичной матрице $\mathbf{E}$ элементарное преобразование ℓ^{II} (прибавление j-й строки к строке с номером i), получим матрицу

$$\mathbf{L}^{\mathrm{II}} = \ell^{\mathrm{II}}(\mathbf{E}) = \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & 1 & \\ & & & \ddots & & \\ & & 0 & & 1 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \textit{строка}\ i \\ \\ \leftarrow \textit{строка}\ j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Умножение матриц $\mathbf{L}^{\mathrm{I}}$ и $\mathbf{L}^{\mathrm{II}}$ на матрицу $\mathbf{A}_{m\times n}$ даёт следующие результаты:

$$\mathbf{L}^{\mathrm{I}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \hline \cdots \\ \hline \lambda\mathbf{a}_i \\ \hline \cdots \\ \hline \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \leftarrow \textit{строка}\ i \quad \text{и} \quad \mathbf{L}^{\mathrm{II}}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \hline \cdots \\ \hline \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_j \\ \hline \cdots \\ \hline \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \leftarrow \textit{строка}\ i\,.$$

Таким образом, умножение матрицы $\mathbf{L}^{\mathrm{I}}$ на матрицу $\mathbf{A}$ слева приводит к умножению i-й строки матрицы на число λ, а умножение матрицы $\mathbf{L}^{\mathrm{II}}$ на матрицу $\mathbf{A}$ слева приводит к прибавлению j-й строки к строке с номером i, т.е. $\mathbf{L}^{\mathrm{I}}\mathbf{A} = \ell^{\mathrm{I}}(\mathbf{A})$ и $\mathbf{L}^{\mathrm{II}}\mathbf{A} = \ell^{\mathrm{II}}(\mathbf{A})$. Матрицы $\mathbf{L}^{\mathrm{I}}$ и $\mathbf{L}^{\mathrm{II}}$ называются *матрицами элементарных преобразований*.

Замечания

1. Правило построения матрицы элементарного преобразования следующее: *чтобы построить матрицу элементарного преобразования* ℓ *необходимо выполнить это преобразование с единичной матрицей* $\mathbf{E}$, *получившийся результат и будет искомой матрицей*.
2. Если $\mathbf{L}$ – матрица некоторого элементарного преобразования, то $\mathbf{L}^{\mathrm{T}}$ также является матрицей некоторого в общем случае другого элементарного преобразования.
3. Умножение матрицы элементарного преобразования $\mathbf{L}$ на матрицу $\mathbf{A}$ слева приводит к преобразованию строк матрицы $\mathbf{A}$, а умножение матрицы $\mathbf{L}$ на матрицу $\mathbf{A}$ справа приводит к преобразованию столбцов матрицы $\mathbf{A}$.
4. Пусть $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2,\ldots,$ $\mathbf{L}_N$ матрицы элементарных преобразований ℓ_1, $\ell_2,\ldots,$ ℓ_N и пусть матрица $\mathbf{L}=\mathbf{L}_N\,\mathbf{L}_{N-1}\ldots\mathbf{L}_2\,\mathbf{L}_1$, тогда $\mathbf{LA}=\ell_N(\ell_{N-1}(\ldots(\ell_2(\ell_1(\mathbf{A})))\ldots))$, т.е. матрица $\mathbf{L}$ – это *матрица последовательности элементарных преобразований* ℓ_1, $\ell_2,\ldots,$ ℓ_N.

Вырожденные матрицы

Квадратная матрица – (*не*)*вырожденная*, если её строки линейно (не)зависимы.

Примером вырожденной матрицей является квадратная матрица, содержащая нулевую строку, примером невырожденной матрицы является единичная матрица $\mathbf{E}$.

Теорема (о (не)вырожденных матрицах)

1. В результате элементарных преобразований (не)вырожденная матрица преобразуется в (не)вырожденную.
2. Матрица $\mathbf{A}$ – вырожденная тогда и только тогда, когда с помощью элементарных преобразований её можно преобразовать в матрицу, содержащую нулевую строку.
3. Матрица $\mathbf{A}$ – невырожденная тогда и только тогда, когда с помощью элементарных преобразований её можно преобразовать в единичную матрицу.
4. Матрица $\mathbf{A}$ – невырожденная тогда и только тогда, когда она представима в виде произведения матриц элементарных преобразований, т.е. $\mathbf{A}=\mathbf{L}_N\,\mathbf{L}_{N-1}\ldots\mathbf{L}_2\,\mathbf{L}_1$.
5. Матрица $\mathbf{A}$ – невырожденная тогда и только тогда, когда является невырожденной матрица $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$.

Следствия

1. Матрицы элементарных преобразований $\mathbf{L}^{\mathrm{I}}$ и $\mathbf{L}^{\mathrm{II}}$ являются невырожденными, так как получены элементарными преобразованиями невырожденной единичной матрицы $\mathbf{E}$.
2. Все определения и результаты сформулированные в этом разделе в терминах строк могут быть сформулированы в терминах столбцов.

Теорема (о произведении (не)вырожденных матриц)

1. Если одна из матриц $\mathbf{A}$ или $\mathbf{B}$ вырожденная, то матрица $\mathbf{AB}$ также вырожденная.
2. Если матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ невырожденные, то матрица $\mathbf{AB}$ также невырожденная.

Следствие

Матрица последовательности элементарных преобразований $\mathbf{L}=\mathbf{L}_N\,\mathbf{L}_{N-1}\ldots\mathbf{L}_2\,\mathbf{L}_1$ является невырожденной, так как представляет собой произведение невырожденных матриц.