Задача 1

Пусть $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]^{\mathrm{T}}$ – координатный столбец вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Используя метод Лагранжа, привести квадратичную форму $A(\mathbf{x},\mathbf{x})$ к каноническому виду, найти её ранг, положительный и отрицательный индексы инерции, если в базисе $\{\mathbf{e}\}$ она имеет вид:

1) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 5\xi_1^2 - 4\xi_1\xi_2 - 2\xi_1\xi_3 + \xi_2^2 + \xi_3^2$;
2) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = -\xi_1^2 + 2\xi_1\xi_3 + 2\xi_2^2 - \xi_3^2$;
3) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 + \xi_2^2 - 2\xi_2\xi_3 + \xi_3^2$;
4) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = -5\xi_1^2 - 8\xi_1\xi_2 + 6\xi_1\xi_3 - 5\xi_2^2 + 6\xi_2\xi_3 - 2\xi_3^2$;
5) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 2\xi_1\xi_2 - 2\xi_2\xi_3$.

Ответы:

1) $r = 2$, $i_+ = 2$, $i_- = 0$;
2) $r = 2$, $i_+ = 1$, $i_- = 1$;
3) $r = 1$, $i_+ = 1$, $i_- = 0$;
4) $r = 2$, $i_+ = 0$, $i_- = 2$;
5) $r = 2$, $i_+ = 1$, $i_- = 1$.

Задача 2

Пусть $\xi = [\xi_1, \xi_2, \xi_3]^{\mathrm{T}}$ – координатный столбец вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$. Используя метод Якоби, привести квадратичную форму $A(\mathbf{x},\mathbf{x})$ к каноническому виду и установить её знакоопределённость, если в базисе $\{\mathbf{e}\}$ она имеет вид:

1) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 2\xi_1^2 - 2\xi_1\xi_2 - 2\xi_1\xi_3 + \xi_2^2$;
2) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 5\xi_1^2 - 4\xi_1\xi_2 - 2\xi_1\xi_3 + 2\xi_2^2 - 2\xi_2\xi_3 + 2\xi_3^2$;
3) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 3\xi_1^2 + 2\xi_2^2 - 4\xi_2\xi_3 + 3\xi_2^2$;
4) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = -2\xi_1^2 + 4\xi_1\xi_2 - 7\xi_2^2 + 4\xi_2\xi_3 - 2\xi_3^2$;
5) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 3\xi_1^2 - 4\xi_1\xi_2 + 2\xi_1\xi_3 - 2\xi_2^2 + 2\xi_2\xi_3 - \xi_3^2$.

Ответы:

1) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\xi_1^2 + 2\xi_2^2 - \xi_3^2$, форма не является знакоопределённой;
2) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \frac{1}{5}\xi_1^2 + \frac{5}{6}\xi_2^2 + 6\xi_3^2$, $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) > 0$ для любого вектора $\mathbf{x} \neq \mathbf{O}$;
3) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \frac{1}{3}\xi_1^2 + \frac{1}{2}\xi_2^2 + \xi_3^2$, $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) > 0$ для любого вектора $\mathbf{x} \neq \mathbf{O}$;
4) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\xi_1^2 - \frac{1}{5}\xi_2^2 - \frac{5}{6}\xi_3^2$, $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) < 0$ для любого вектора $\mathbf{x} \neq \mathbf{O}$;
5) $A(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \frac{1}{3}\xi_1^2 - \frac{2}{7}\xi_2^2 - 2\xi_3^2$, форма не является знакоопределённой.

Задача 3

Пусть в некотором базисе $\{\mathbf{e}\}$ квадратичная форма $A(\mathbf{x},\mathbf{x})$ имеет матрицу $\mathbf{A}$. Доказать, что:

1) ранг матрицы $\mathbf{A}$ совпадает с рангом формы и не зависит от выбора базиса;
2) знак определителя матрицы $\mathbf{A}$ не зависит от базиса.

Задача 4

Пусть квадратичная форма $A(\mathbf{x},\mathbf{x})$ в некотором базисе имеет матрицу $\mathbf{A}_{n\times n} = \| a_{ij} \|$ и пусть

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_n = |\mathbf{A}|$$

– главные миноры матрицы $\mathbf{A}$.

Доказать утверждения (критерий Сильвестра):

1) квадратичная форма $A(\mathbf{x},\mathbf{x})$ положительно определена тогда и только тогда, когда все главные миноры её матрицы положительны, т.е. $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0, \ldots$;
2) квадратичная форма $A(\mathbf{x},\mathbf{x})$ отрицательно определена тогда и только тогда, когда главные миноры её матрицы образуют знакопеременную последовательность, т.е. $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, $\Delta_4 > 0, \ldots$.