Будем рассматривать систему линейных уравнений $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ с матрицей $\mathbf{A}$, состоящей из m строк и n столбцов и имеющей ранг r.

Однородная система $\mathbf{Ax} = \mathbf{O}$, полученная из неоднородной системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ заменой вектор-столбца $\mathbf{b}$ на нулевой вектор-столбец, называется *приведённой*.

Однородная система линейных уравнений всегда совместна, т.к. всегда имеет тривиальное решение $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, поэтому представляет интерес ответ на вопрос: при каких условиях однородная система имеет нетривиальное решение?

Теорема (об условиях существования нетривиального решения системы Ax = O)
Однородная система линейных уравнений имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы меньше числа неизвестных, т.е. $r(\mathbf{A}) < n$.

Заметим, что если $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$ – два различных решения системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{O}$, тогда для любых чисел λ и μ вектор-столбец $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}_1 + \mu \mathbf{x}_2$ также является решением этой системы. Таким образом, если у однородной системы линейных уравнений имеется нетривиальное решение, то таких решений бесконечно много.

Рассмотрим задачу описания множества всех возможных решений системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{O}$ в виде линейной комбинации некоторого количества её базисных решений.

Матрица $\mathbf{F}_{n\times ?} = [\mathbf{f}_1 \,|\, \mathbf{f}_2 \,|\, ... \,|\, \mathbf{f}_?]$, число столбцов которой будет определено далее, называется *фундаментальной матрицей системы* $\mathbf{Ax} = \mathbf{O}$, если

1) каждый столбец этой матрицы является решением системы, т.е. $\mathbf{Af}_k \equiv \mathbf{O}$;
2) матрица имеет максимально возможный ранг.

Теорема (о фундаментальной матрице однородной системы уравнений)

1. Ранг фундаментальной матрицы не превосходит $n-r$, т.е. $r(\mathbf{F}) \le n-r$.
2. Ранг фундаментальной матрицы равен $n-r$, т.е. $r(\mathbf{F}) = n-r$.

Теорема (об общем решении системы Ax = O)
Вектор-столбец $\mathbf{x}$ является решением системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{O}$ тогда и только тогда, когда существует вектор-столбец $\mathbf{c}$ такой, что $\mathbf{x} = \mathbf{Fc}$, где $\mathbf{F}$ – фундаментальная матрица системы.

Теорема (об общем решении системы Ax = b)
Вектор-столбец $\mathbf{x}$ является решением системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ тогда и только тогда, когда он представим в виде $\mathbf{x} = \mathbf{x}_b + \mathbf{x}_o$, где $\mathbf{x}_b$ – произвольное (*частное*) решение неоднородной системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{x}_o$ – общее решение однородной системы $\mathbf{Ax} = \mathbf{O}$, т.е. $\mathbf{x}_o = \mathbf{Fc}$, где $\mathbf{F}$ – фундаментальная матрица однородной системы, $\mathbf{c}$ – произвольный вектор-столбец.