Задача 1

Дан треугольник ABC и пусть вектор $\mathbf{a} = \overline{AB}$, а вектор $\mathbf{b} = \overline{AC}$.

Построить векторы: $\mathbf{k} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $\mathbf{l} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$, $\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$, $\mathbf{n} = -\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$.

Задача 2

Точки P и Q являются серединами сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$.

Записать векторы $\overline{BC}$ и $\overline{DC}$ через векторы $\mathbf{p} = \overline{AP}$ и $\mathbf{q} = \overline{AQ}$.

Ответ: $\overline{BC} = \frac{2}{3}(2\mathbf{q} - \mathbf{p})$, $\overline{DC} = \frac{2}{3}(2\mathbf{p} - \mathbf{q})$.

Задача 3

В треугольнике ABC проведены медианы AD, BE и CF.

Найти сумму векторов $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ и $\overline{CF}$.

Ответ: $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \mathbf{O}$.

Задача 4 (*)

Доказать, что вектор $\overline{OC}$, идущий из произвольной точки плоскости O в центр C правильного многоугольника $A_1A_2...A_n$ равен среднему арифметическому векторов $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_2}$,…, $\overline{OA_n}$, т.е. $\overline{OC} = \frac{1}{n}(\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + ... + \overline{OA_n})$.

Задача 5 (*)

Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2:1.

Задача 6 (*)

В треугольнике ABC проведена биссектриса AD угла A.

Требуется выразить вектор $\overline{AD}$ через векторы $\mathbf{a} = \overline{AB}$ и $\mathbf{b} = \overline{AC}$.

Задача 7 (*)

Доказать утверждение: для $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}\ \exists! \mathbf{c}:\ \mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, т.е. для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ существует единственный вектор $\mathbf{c}$ такой, что $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$.

Задача 8 (*)

Доказать утверждение: для $\forall \mathbf{a} \neq \mathbf{O}$ и $\forall \mathbf{b} \parallel \mathbf{a}\ \exists \lambda:\ \mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$, т.е. для любого ненулевого вектора $\mathbf{a}$ и коллинеарного ему вектора $\mathbf{b}$ существует число λ такое, что $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$.

Задача 9 (*)

Доказать второе и четвёртое утверждения теоремы о признаках линейной зависимости.

Задача 10

Доказать, что для неколлинеарных векторов из равенства $\lambda_1 \mathbf{a} + \mu_1 \mathbf{b} = \lambda_2 \mathbf{a} + \mu_2 \mathbf{b}$ следует равенство $\lambda_1 = \lambda_2$ и $\mu_1 = \mu_2$.