Задача 1

Вычислить определитель произведения следующих матриц:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&2&2&1\\0&0&2&1\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}2&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&2\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}.$$

Ответ:

$$|\mathbf{ABC}|=16.$$

Задача 2

Определить ранг матрицы, указать базисный минор, базисные строки и столбцы следующих матриц:

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_3=\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_4=\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_5=\begin{bmatrix}1&2\\2&4\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_6=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&4&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_7=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_8=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&1&1\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_9=\begin{bmatrix}1&2&3\\6&5&4\\7&8&9\end{bmatrix}.$$

Ответы:

$r(\mathbf{A}_1)=1$, $r(\mathbf{A}_2)=1$, $r(\mathbf{A}_3)=1$, $r(\mathbf{A}_4)=2$, $r(\mathbf{A}_5)=1$,

$r(\mathbf{A}_6)=2$, $r(\mathbf{A}_7)=2$, $r(\mathbf{A}_8)=3$, $r(\mathbf{A}_9)=3$.

Задача 3

Оценить ранг квадратной матрицы $\mathbf{A}$ размера $n\times n$, если известно, что она содержит нулевую подматрицу размера $(n-1)\times(n-1)$, привести примеры матриц, для которых имеет место (не)равенство.

Ответ: $r(\mathbf{A})\le 2$;

равенство:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&0&0\end{bmatrix};$$

неравенство:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}.$$

Задача 4

Определить ранг матрицы, указать базисный минор, базисные строки и столбцы следующих матриц:

$$\mathbf{A}_1=\begin{bmatrix}5&-5&5&3&8\\-2&2&-2&-1&-3\\1&-1&1&0&1\\3&-3&3&2&5\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_2=\begin{bmatrix}-2&2&2&-1&5\\-2&0&0&-6&6\\1&-4&-4&-7&-1\\1&-1&-1&1&-3\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_3=\begin{bmatrix}1&2&0&0&3\\-3&-4&1&-2&-7\\1&0&0&3&0\\1&5&6&2&2\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_4=\begin{bmatrix}1&-1&0&1&0\\2&-2&2&4&0\\-3&3&7&0&8\\-2&2&2&-1&2\end{bmatrix}.$$

Ответы:

$r(\mathbf{A}_1)=2$, $r(\mathbf{A}_2)=3$, $r(\mathbf{A}_3)=4$, $r(\mathbf{A}_4)=3$.

Задача 5 (*)
Определить, какие из перечисленных ниже соотношений возможны, и привести примеры матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ четвёртого порядка, для которых эти соотношения выполняются:
1) $r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = r(\mathbf{A})$;
2) $r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) < r(\mathbf{A})$;
3) $r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) > r(\mathbf{A})$;
4) $r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$;
5) $r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) < r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$;
6) $r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) > r(\mathbf{A}) + r(\mathbf{B})$;
7) $r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \min(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B}))$;
8) $r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) < \min(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B}))$;
9) $r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) > \min(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B}))$;
10) $r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \max(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B}))$;
11) $r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) < \max(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B}))$;
12) $r(\mathbf{A}+\mathbf{B}) > \max(r(\mathbf{A}), r(\mathbf{B}))$.

Задача 6 (*)
Дана матрица
$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$
Найти матрицы $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ размера 2×2, не равные единичной и нулевой матрице, такие, что $r(\mathbf{A}_1\mathbf{B}) = 1$ и $r(\mathbf{A}_2\mathbf{B}) = 0$.

Задача 7 (*)
Доказать, что:
1) если ранг матрицы равен единице, то её можно представить в виде произведения вектор-столбца на вектор-строку;
2) если ранг матрицы равен r, то её можно представить в виде суммы r матриц единичного ранга;
3) если ранг матрицы $\mathbf{A}$ размера $m\times n$ равен r, то матрица, составленная из любых s строк этой матрицы, будет иметь ранг не меньше $r+s-m$.

Задача 8 (*)
Доказать или опровергнуть следующие утверждения:
1) $r(\mathbf{AB}) = r(\mathbf{B})$, если $\mathbf{A}$ – невырожденная матрица для любой матрицы $\mathbf{B}$;
2) $r(\mathbf{AB}) < r(\mathbf{B})$, если $\mathbf{A}$ – вырожденная матрица для любой матрицы $\mathbf{B}$.