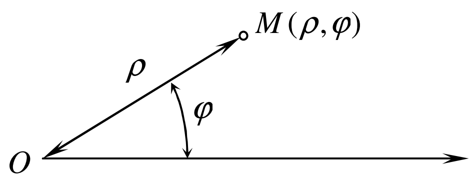
1. Общие сведения

Уравнение множества S *в некоторой системе координат* – это описание элементов множества (точек) S через их координаты. Уравнение может быть сформулировано в форме словесного описания, перечисления, алгебраического выражения,….

Например, окружность с центром в начале декартовой прямоугольной системы координат и радиусом R можно описать, как множество точек равноудалённых от заданной точки – центра окружности, и как множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = R^2$.

Алгебраическое описание множества существенно зависит от выбранной системы координат.

Рассмотрим в качестве примера уравнение окружности в *полярной системе координат*. Полярная система задаётся начальной точкой O (началом системы координат) и *полярной осью* (лучом, выходящим из точки O). Положение произвольной точки M на плоскости в полярной системе координат описывается с помощью двух чисел: ρ – *полярного радиуса* (расстояния от точки M до точки O) и φ – *полярного угла* (угла между отрезком OM и полярной осью).



Уравнение окружности центром в точке O и радиусом R в полярной системе координат имеет вид $\rho = R$.

Чтобы перейти от одной системы координат (старой) к другой (новой) необходимо знать формулы, связывающие координаты произвольной точки в этих системах, и подставить их в уравнение множества.

Пусть, например, начало декартовой прямоугольной совпадает с началом полярной системы координат и пусть направление оси абсцисс совпадает с направлением полярной оси, тогда выражения, связывающие координаты точки в декартовой и полярной системах координат, имеют вид: $x = \rho\cos(\varphi)$ и $y = \rho\sin(\varphi)$. Подставляя их в уравнение окружности, получаем

$$x^2 + y^2 = \rho^2\cos^2(\varphi) + \rho^2\sin^2(\varphi) = \rho^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = \rho^2 = R^2,$$

т.е., действительно, уравнение окружности в полярной системе имеет вид $\rho = R$.

Пусть P_S и P_T – уравнения множеств S и T соответственно, тогда пересечение множеств $S \cap T$ описывается как $P_S \wedge P_T$ (читается P_S и P_T), а объединение множеств $S \cup T$ – как $P_S \vee P_T$ (читается P_S или P_T).

Пусть, например, множества S и T описываются уравнениями $F_S(x, y) = 0$ и $F_T(x, y) = 0$ соответственно, тогда пересечение множеств описывается системой

$$\begin{cases} F_S(x, y) = 0, \\ F_T(x, y) = 0, \end{cases}$$

а объединение множеств – уравнением $F_S(x, y) \cdot F_T(x, y) = 0$.

2. Уравнение линии на плоскости

Пусть на плоскости заданы декартова прямоугольная система координат и линия L. Уравнение $F(x,y)=0$ называется *уравнением линии* L *относительно заданной системы координат*, если ему удовлетворяют координаты всех точек, принадлежащих линии L, и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих линии L.

Например $x+y=0$ и $x^2+y^2=0$ – это уравнения линий, первое уравнение описывает прямую линию, проходящую через начало координат, второе – линию, состоящую из одной единственной точки.

Если координаты точек, принадлежащих линии L, могут быть записаны в виде непрерывных функций, зависящих от некоторой переменной (*параметра*) t, т.е. $x=\varphi(t)$ и $y=\psi(t)$, то говорят, что линия задана *параметрическим способом*.

Алгебраической линией называется линия, уравнение которой в некоторой декартовой прямоугольной системе координат имеет вид $F(x,y)=a_1x^{s_1}y^{t_1}+a_2x^{s_2}y^{t_2}+\ldots+a_kx^{s_k}y^{t_k}=0$. Максимальное из чисел $s_1+t_1,\ s_2+t_2,\ldots,\ s_k+t_k$ называется *порядком* или *степенью алгебраической линии*. Всякая неалгебраическая линия называется *трансцендентной*.

Теорема (о сохранении порядка алгебраической линии при смене системы координат).

Если в некоторой декартовой прямоугольной системе координат линия L описывается алгебраическим уравнением степени n, то и в любой другой декартовой прямоугольной системе координат она будет описываться алгебраическим уравнением степени n.

3. Уравнение поверхности в пространстве

Пусть в пространстве заданы декартовая прямоугольной система координат и поверхность S. Уравнение $F(x,y,z)=0$ называется *уравнением поверхности* S *относительно заданной системы координат*, если ему удовлетворяют координаты всех точек, принадлежащих поверхности S, и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих поверхности S.

Например $x+y+z=0$ и $x^2+y^2+z^2=0$ – это уравнения поверхностей, первое описывает плоскость, второе – поверхность, состоящую из одной единственной точки.

Если координаты точек, принадлежащих поверхности S, могут быть записаны в виде непрерывных функций, зависящих от двух переменных (*параметров*) s и t, т.е. $x=\varphi(s,t)$, $y=\psi(s,t)$ и $z=\chi(s,t)$, то говорят, что поверхность задана *параметрическим способом*.

Поверхность называется *алгебраической*, если в некоторой декартовой прямоугольной системе координат её уравнение имеет вид $F(x,y,z)=a_1x^{r_1}y^{s_1}z^{t_1}+a_2x^{r_2}y^{s_2}z^{t_2}+\ldots+$ $+a_kx^{r_k}y^{s_k}z^{t_k}=0$. Максимальное из чисел $r_1+s_1+t_1,\ r_2+s_2+t_2,\ldots,\ r_k+s_k+t_k$ называется *порядком* или *степенью алгебраической поверхности*. Всякая неалгебраическая поверхность называется *трансцендентной*.

Теорема (о сохранении порядка алгебраической поверхности при смене системы координат).

Если в некоторой декартовой прямоугольной системе координат поверхность S описывается алгебраическим уравнением степени n, то и в любой другой декартовой прямоугольной системе координат она будет описываться алгебраическим уравнением степени n.

4. Линия в пространстве

Линия в пространстве может быть задана двумя способами:

1. Как пересечение двух поверхностей, т.е. системой
$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0, \\ F_2(x,y,z)=0, \end{cases}$$
где $F_1(x,y,z)=0$ и $F_2(x,y,z)=0$ – уравнения этих поверхностей.

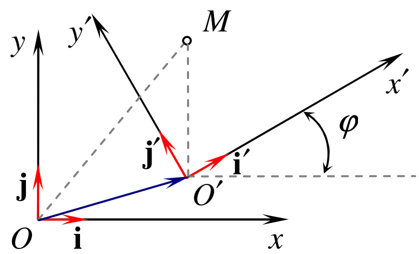
2. Параметрическим способом, т.е. в виде $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ и $z=\chi(t)$, где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $\chi(t)$ – функции, непрерывно зависящие от параметра t.

5. Преобразование координат на плоскости

Пусть на плоскости имеется две декартовых прямоугольных системы координат:

1) первая (старая) с центром в точке O и базисом $\{\mathbf{i},\mathbf{j}\}$;
2) вторая (новая) с центром в точке O', координаты которой в старой системе равны (a,b), и базисом $\{\mathbf{i}',\mathbf{j}'\}$.

Рассмотрим произвольную точку M, координаты которой в старой системе координат равны (x,y), а в новой системе координат – (x',y').



Требуется записать уравнения, связывающие координаты точки M в старой системе координат с её координатами в новой системе координат.

Вывод искомых уравнений

Будем считать, что
$$\mathbf{i}'=a_{11}\,\mathbf{i}+a_{21}\,\mathbf{j},$$
$$\mathbf{j}'=a_{12}\,\mathbf{i}+a_{22}\,\mathbf{j}.$$

Тогда, можно показать, что
$$x=a+a_{11}\,x'+a_{12}\,y',$$
$$y=b+a_{21}\,x'+a_{22}\,y'.$$

Коэффициенты a_{pq} имеют следующую геометрическую интерпретацию
$$a_{11}=\cos(\mathbf{i}'\wedge\mathbf{i}),\ a_{12}=\cos(\mathbf{j}'\wedge\mathbf{i}),$$
$$a_{21}=\cos(\mathbf{i}'\wedge\mathbf{j}),\ a_{22}=\cos(\mathbf{j}'\wedge\mathbf{j}),$$
где символ ^ означает угол между векторами.

Если через φ обозначить угол между векторами $\mathbf{i}$ и $\mathbf{i}'$, то можно показать, что
$$x=a+x'\cos(\varphi)-y'\sin(\varphi),$$
$$y=b+x'\sin(\varphi)+y'\cos(\varphi).$$

Замечание: последний результат получен в предположении, что поворот от вектора $\mathbf{i}$ к вектору $\mathbf{i}'$ осуществляется против часовой стрелки и система координат прямоугольная.

6. Преобразование координат в пространстве

Пусть в пространстве имеется две декартовых прямоугольных системы координат:

1) первая (старая) с центром в точке O и базисом $\{\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}\}$;
2) вторая (новая) с центром в точке O', координаты которой в старой системе равны (a,b,c), и базисом $\{\mathbf{i}',\mathbf{j}',\mathbf{k}'\}$.

Рассмотрим произвольную точку M, координаты которой в старой системе координат равны (x,y,z), а в новой системе координат – (x',y',z').

Требуется записать уравнения, связывающие координаты точки M в старой системе с её координатами в новой системе координат.

Вывод искомых уравнений

Будем считать, что

$$\mathbf{i}' = a_{11}\,\mathbf{i} + a_{21}\,\mathbf{j} + a_{31}\,\mathbf{k}\,,$$
$$\mathbf{j}' = a_{12}\,\mathbf{i} + a_{22}\,\mathbf{j} + a_{32}\,\mathbf{k}\,,$$
$$\mathbf{k}' = a_{13}\,\mathbf{i} + a_{23}\,\mathbf{j} + a_{33}\,\mathbf{k}\,.$$

Тогда, можно показать, что

$$x = a + a_{11}\,x' + a_{12}\,y' + a_{13}\,z'\,,$$
$$y = b + a_{21}\,x' + a_{22}\,y' + a_{23}\,z'\,,$$
$$z = c + a_{31}\,x' + a_{32}\,y' + a_{33}\,z'\,.$$

Коэффициенты a_{pq} имеют следующую геометрическую интерпретацию:

$$a_{11} = \cos(\mathbf{i}' \wedge \mathbf{i}),\ a_{12} = \cos(\mathbf{j}' \wedge \mathbf{i}),\ a_{13} = \cos(\mathbf{k}' \wedge \mathbf{i}),$$
$$a_{21} = \cos(\mathbf{i}' \wedge \mathbf{j}),\ a_{22} = \cos(\mathbf{j}' \wedge \mathbf{j}),\ a_{23} = \cos(\mathbf{k}' \wedge \mathbf{j}),$$
$$a_{31} = \cos(\mathbf{i}' \wedge \mathbf{k}),\ a_{32} = \cos(\mathbf{j}' \wedge \mathbf{k}),\ a_{33} = \cos(\mathbf{k}' \wedge \mathbf{k}),$$

где символ ^ означает угол между векторами.