Задача 1

Столбцы матриц $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}$ – это координатные столбцы векторов базисов $\{\mathbf{f}\}$ и $\{\mathbf{g}\}$ относительно некоторого базиса $\{\mathbf{e}\}$. Требуется найти матрицы $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{S}_2$ – матрицы переходов от базиса $\{\mathbf{f}\}$ к базису $\{\mathbf{g}\}$ и от базиса $\{\mathbf{g}\}$ к базису $\{\mathbf{f}\}$ соответственно, если

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ответ:

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{S}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Задача 2

Найти координатный столбец ξ вектора $\mathbf{x}$ в базисе $\{\mathbf{e}\}$ по его координатному столбцу ξ' в базисе $\{\mathbf{e}'\}$ и координатный столбец ζ' вектора $\mathbf{z}$ в базисе $\{\mathbf{e}'\}$ по его координатному столбцу ζ в базисе $\{\mathbf{e}\}$, если

1) матрица перехода от базиса $\{\mathbf{e}\}$ к базису $\{\mathbf{e}'\}$ имеет вид $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,

   координатные вектор-столбцы $\xi' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $\zeta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$;

2) матрица перехода от базиса $\{\mathbf{e}\}$ к базису $\{\mathbf{e}'\}$ имеет вид $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$,

   координатные вектор-столбцы $\xi' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ и $\zeta = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Ответы:

1) $\xi = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\zeta' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$;

2) $\xi = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ и $\zeta' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Задача 3

В столбцах матрицы $\mathbf{X}$ записаны координаты векторов $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2,\ldots,$ $\mathbf{x}_5$ относительного некоторого базиса. Требуется определить размерность линейной оболочки $L(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_5)$, её базис и координаты остальных векторов в этом базисе.

1) $\mathbf{X}=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 & -2 \\ 2 & -5 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 2 & -4 & 4 & 2 \\ -2 & 6 & -4 & 6 & 4 \end{bmatrix}$;

2) $\mathbf{X}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ответы:

1) $\dim(L(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_5))=2$, в качестве базиса можно взять векторы $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\}$, остальные векторы в данном базисе имеют координаты: $\mathbf{x}_3=\{-4,-2\}$, $\mathbf{x}_4=\{3,2\}$, $\mathbf{x}_5=\{1,1\}$;
2) $\dim(L(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_5))=3$, в качестве базиса можно взять векторы $\{\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,\mathbf{x}_3\}$, остальные векторы в данном базисе имеют координаты: $\mathbf{x}_4=\{1,2,0\}$, $\mathbf{x}_5=\{1,1,-1\}$.