

**Задача 1**

Описать элементарные преобразования, выполняемые следующими матрицами:

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ответы:

- 1) умножение матрицы  $\mathbf{L}_1$  на матрицу  $\mathbf{A}$  слева приводит к перестановке второй и третьей строк матрицы  $\mathbf{A}$ , а при умножении справа – к перестановке второго и третьего столбцов матрицы  $\mathbf{A}$ ;
- 2) умножение матрицы  $\mathbf{L}_2$  на матрицу  $\mathbf{A}$  слева приводит к прибавлению к первой строке матрицы  $\mathbf{A}$  её удвоенной второй строки, а при умножении справа – к прибавлению её удвоенного первого столбца ко второму.
- 3) умножение матрицы  $\mathbf{L}_3$  на матрицу  $\mathbf{A}$  слева приводит к следующей перестановке строк: вторая строка становится на место первой, третья строка – на место второй, первая строка – на место третьей; при умножении матрицы  $\mathbf{L}_3$  на матрицу  $\mathbf{A}$  справа первый столбец матрицы  $\mathbf{A}$  становится на место второго столбца, второй столбец – на место третьего, третий столбец – на место первого.

**Задача 2**

Записать матрицы размера  $3 \times 3$  следующих элементарных преобразований:

- 1) перестановка первой и третьей строк;
- 2) прибавление к первой строке третьей строки, умноженной на число  $\lambda \neq 0$ .

Ответы:

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Задача 3**

Записать матрицу  $\mathbf{L}_{3 \times 3}$  следующей последовательности элементарных преобразований:

- 1) прибавление третьей строки к первой,
- 2) прибавление удвоенной второй строки к первой,
- 3) прибавление первой строки к третьей.

Ответ:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Задача 4**

Записать матрицы обратных преобразований для элементарных преобразований, заданных следующими матрицами:

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ответы:

$$\mathbf{L}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Задача 5**

Определить, какие из следующих матриц являются матрицами последовательности элементарных преобразований:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 6 & 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Ответ: матрицей последовательности элементарных преобразований является матрица  $\mathbf{A}$ .

**Задача 6**

Представить каждую из следующих матриц в виде произведения  $\mathbf{LU}$ , где  $\mathbf{L}$  – нижняя треугольная матрица,  $\mathbf{U}$  – верхняя треугольная матрица:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 5 \\ 3 & 5 & 8 & 7 \\ 2 & 4 & 7 & 9 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 6 & 9 \\ 1 & 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}.$$

Ответ:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Задача 8 (\*)**

Определить, какие из следующих утверждений являются истинными:

- 1) если в матрице  $\mathbf{A}$  к столбцу с номером  $i$  прибавить столбец с номером  $j$ , то в матрице  $\mathbf{AB}$  произойдёт такое же преобразование;
- 2) если в матрице  $\mathbf{A}$  к строке с номером  $i$  прибавить строку с номером  $j$ , то в матрице  $\mathbf{AB}$  произойдёт такое же преобразование;
- 3) если в матрице  $\mathbf{B}$  к столбцу с номером  $i$  прибавить столбец с номером  $j$ , то в матрице  $\mathbf{AB}$  произойдёт такое же преобразование;
- 4) если в матрице  $\mathbf{B}$  к строке с номером  $i$  прибавить строку с номером  $j$ , то в матрице  $\mathbf{AB}$  произойдёт такое же преобразование.

**Задача 9 (\*)**

Доказать следующие утверждения:

1. Если матрицу с помощью элементарных преобразований можно преобразовать в матрицу, содержащую нулевую строку, то она является вырожденной.
2. Если матрицу с помощью элементарных преобразований можно преобразовать в единичную матрицу, то она является невырожденной.