Линейное пространство

Линейное пространство L – множество элементов, называемых *векторами*, для которых определены операции *сложения векторов* и *умножения вектора на число* такие, что:

1. Операция сложения векторов каждой паре векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ пространства L ставит в соответствие вектор $\mathbf{z}$, также принадлежащий пространству L, который называется *суммой векторов* $\mathbf{x}$ *и* $\mathbf{y}$ и обозначается $\mathbf{z}=\mathbf{x}+\mathbf{y}$.
2. Операция умножения вектора на число λ каждому вектору $\mathbf{x}$ пространства L ставит в соответствие вектор $\mathbf{z}$, также принадлежащий пространству L, который называется *произведением вектора* $\mathbf{x}$ *на число* λ и обозначается $\mathbf{z}=\lambda\mathbf{x}$.
3. Операции сложения векторов и умножения вектора на число удовлетворяют следующим требованиям (*аксиомам линейного пространства*):
   a) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ пространства L;
   b) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$ для любых векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ пространства L;
   c) в пространстве L существует *нулевой вектор* $\mathbf{O}$ такой, что $\mathbf{x}+\mathbf{O}=\mathbf{O}+\mathbf{x}$ для любого вектора $\mathbf{x}$ пространства L;
   d) в пространстве L для любого вектора $\mathbf{x}$ существует *противоположный вектор* $\mathbf{x}'$ такой, что $\mathbf{x}+\mathbf{x}'=\mathbf{O}$;
   e) $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$ для любого вектора $\mathbf{x}$ пространства L;
   f) $\lambda(\mu\mathbf{x})=(\lambda\mu)\mathbf{x}$ для любого вектора $\mathbf{x}$ из L и чисел λ и μ;
   g) $(\lambda+\mu)\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x}$ для любого вектора $\mathbf{x}$ из L и чисел λ и μ;
   h) $\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y}$ для любых векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ из L и числа λ.

Простейшие следствия из аксиом линейного пространства:

1. В линейном пространстве имеется единственный нулевой вектор.
2. У каждого вектора имеется единственный противоположный вектор.
3. Нулевой вектор $\mathbf{O}=0\cdot\mathbf{x}$, для любого вектора $\mathbf{x}$ из линейного пространства L.
4. Для любого вектора $\mathbf{x}$ противоположный вектор $\mathbf{x}'=(-1)\cdot\mathbf{x}$.

Линейная зависимость векторов

Выражение $\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+...+\lambda_n\mathbf{x}_n$ называется *линейной комбинацией векторов* $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_n$, числа λ_1, λ_2, …, λ_n называются *коэффициентами линейной комбинации*.

Векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_n$ являются *линейно зависимыми*, если существуют не равные одновременно нулю числа λ_1, λ_2, …, λ_n такие, что $\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+...+\lambda_n\mathbf{x}_n=\mathbf{O}$.

Векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_n$ являются *линейно независимыми*, если их линейная комбинация $\lambda_1\mathbf{x}_1+\lambda_2\mathbf{x}_2+...+\lambda_n\mathbf{x}_n=\mathbf{O}$ только, если $\lambda_1=\lambda_2=...=\lambda_n=0$.

Элементарными преобразованиями совокупности векторов $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_n$ называются:

1) умножение одного из векторов совокупности на число $\lambda\neq 0$,
2) прибавление одного вектора совокупности к другому.

Замечание: требование $\lambda\neq 0$ гарантирует обратимость элементарных преобразований.

Теорема (о линейной зависимости)

Справедливы следующие утверждения:

1. Векторы $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_n$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них может быть представлен в виде линейной комбинации других векторов.
2. Если среди векторов $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_n$ имеется нулевой вектор, то они линейно зависимы.
3. Если какая-то часть из совокупности векторов $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_n$ линейно зависима, то и вся совокупность векторов линейно зависима.
4. Если совокупность векторов $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_n$ линейно независима, то и любая её часть линейно независима.

5. В результате элементарных преобразований линейно (не)зависимая совокупность векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_n$ остаётся линейно (не)зависимой.

Базис линейного пространства

Упорядоченная совокупность линейно независимых векторов $\{\mathbf{e}\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, ..., \mathbf{e}_n\}$ называется *базисом линейного пространства* L, если любой вектор $\mathbf{x}$ из L может быть представлен в виде $\mathbf{x} = \xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2 + ... + \xi_n \mathbf{e}_n$.

Числа ξ_i в этом разложении называются *координатами вектора* $\mathbf{x}$ *в базисе* $\{\mathbf{e}\}$.

Теорема (о единственности разложения вектора по базису)

Коэффициенты разложения вектора $\mathbf{x}$ по базису определены однозначно.

Теорема (о выражении линейных операций над векторами через линейные операции над их координатами)

Справедливы следующие утверждения:

1. При сложении векторов их координаты складываются.
2. При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.

Теорема (о необходимых и достаточных условиях линейной зависимости векторов в координатной форме)

Векторы $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, …, $\mathbf{x}_k$ линейного пространства L линейно зависимы тогда и только тогда, когда линейно зависимы вектор-столбцы, составленные из координат этих векторов.

Размерность линейного пространства

Если в линейном пространстве L имеется n линейно независимых векторов, а всякие $n+1$ векторы линейно зависимы, то говорят, что пространство L имеет *размерность* n и записывают $\dim(L) = n$.

Теорема (о размерности линейного пространства)

Справедливы следующие утверждения:

1. Если размерность линейного пространства равна n, то в пространстве существует базис, состоящий из n векторов.
2. Если в линейном пространстве существует базис, состоящий из n векторов, то размерность линейного пространства равна n.

Изоморфизм линейных пространств

Линейные пространства L' и L'' *изоморфны* (обозначается $L' \sim L''$), если существует правило, позволяющее каждому вектору $\mathbf{x}'$ из пространства L' поставить во взаимно однозначное соответствие вектор $\mathbf{x}''$ пространства L'' (обозначается $\mathbf{x}' \leftrightarrow \mathbf{x}''$) такое, что:

1) если $x' \leftrightarrow x''$ и $y' \leftrightarrow y''$, то $x' + y' \leftrightarrow x'' + y''$, где $x', y' \in L'$ и $x'', y'' \in L''$;
2) если $x' \leftrightarrow x''$, то $\lambda x' \leftrightarrow \lambda x''$, где $x' \in L'$ и $x'' \in L''$.

Теорема (об изоморфизме линейных пространств)

Линейные пространства L' и L'' изоморфны тогда и только тогда, когда $\dim(L') = \dim(L'')$.