Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Национальный исследовательский Университет ИТМО»

Факультет информационных технологий и программирования

Лабораторная работа № 3

Выполнили студенты группы M3435:

Дорохов Ярослав Юрьевич

Бизяев Илья Владимирович

Пономарев Павел Николаевич

Санкт-Петербург

2021

Ход работы

Описание реализации:

1. Принимаем на вход матрицу системы A, вектор b, функцию c. Ищем максимум функции c.
2. Если система в стандартной форме, то приводим в каноническую форму, добавляя переменные.
3. Находим начальное решение с помощью метода искусственного базиса.
4. Строим симплекс таблицу, ищем ведущие элементы, и пока они есть, вводим и выводим соответствующие переменные в базис.
5. Возвращаем максимальное значение функции и значения переменных.

Ссылка на реализацию:
https://github.com/pavponn/optimization-methods/tree/master/lab3

Ответы на вопросы

1. Общая и каноническая форма задачи линейного программирования.

Общая форма:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \to max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = 1..m_1$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i,\ i = m_1 + 1 \ldots m_2$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = m_2 + 1 \ldots m$$

Стандартная форма:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \to max;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i,\ i = 1 \ldots m_1$$
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\ i = m_1 + 1 \ldots m$$
$$x_1 \ge 0,\ \ldots,\ x_n \ge 0$$

Каноническая форма:

$\sum_{j=1}^{n} c_j\ x_j \to max;$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\ = b_i,\ i\ =\ 1 \dots\ m$

$x_1 \geq\ 0,\ \dots,\ x_n\ \geq\ 0$

2. Метод естественного базиса. Метод искусственного базиса.

Методы получения начальной допустимой базы

- Методы естественного базиса
  - ЗЛП сформулировано в канонической форме
  - матрица системы уравнений должна содержать единичную подматрицу размером m x m. В этом случае очевиден начальный опорный план ($b_1 \dots b_m$, 0…0)
- Метод искусственного базиса
  - Не уменьшая общности, будем считать, что в канонической ЗЛП справедливо b ≥ 0. Рассмотрим ЗЛП:

$$\max(-x_{n+1} - x_{n+2} - \ldots - x_{n+m})$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ a_{12}x_2 + \ldots + \ a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1, \\ a_{21}x_1 + \ a_{22}x_2 + \ldots + \ a_{2n}x_n \qquad + x_{n+2} & = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad \ddots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \qquad\qquad + x_{n+m} & = b_m, \\ x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m+n). & \end{cases}$$

    Неизвестные x_{n+1}, …, x_{n+m} называются искусственными переменными. Так как b_i ≥ 0 (i = 1, 2, …, m), то база B=〈n+1, …, n+m〉 допустима.
  -

3. Доказать, что ОДР (область допустимых решений) является выпуклым множеством.

Множество называется выпуклым, если вместе с любыми двумя своими точками целиком содержит отрезок, их соединяющий.

Пусть задача дана в канонической форме.

x_1: $Ax_1\ =\ b,\ \forall i$: $x_{1i} \geq\ 0$

x_2: $Ax_2\ =\ b,\ \forall i$: $x_{2i} \geq\ 0$

Рассмотрим точку x':

$x' = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$, где $\alpha \in [0; 1]$

$Ax' = \alpha Ax_1 + (1 - \alpha)Ax_2 = \alpha b + (1 - \alpha)b = b$

$x' = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \Rightarrow \forall i\colon x_i' \geq 0$

Следовательно, x' лежит в множестве (области допустимых решений), а значит, ОДР является выпуклым множеством.

4. Может ли ОДР в задаче линейного программирования состоять из одной единственной точки? Если да, то привести пример.

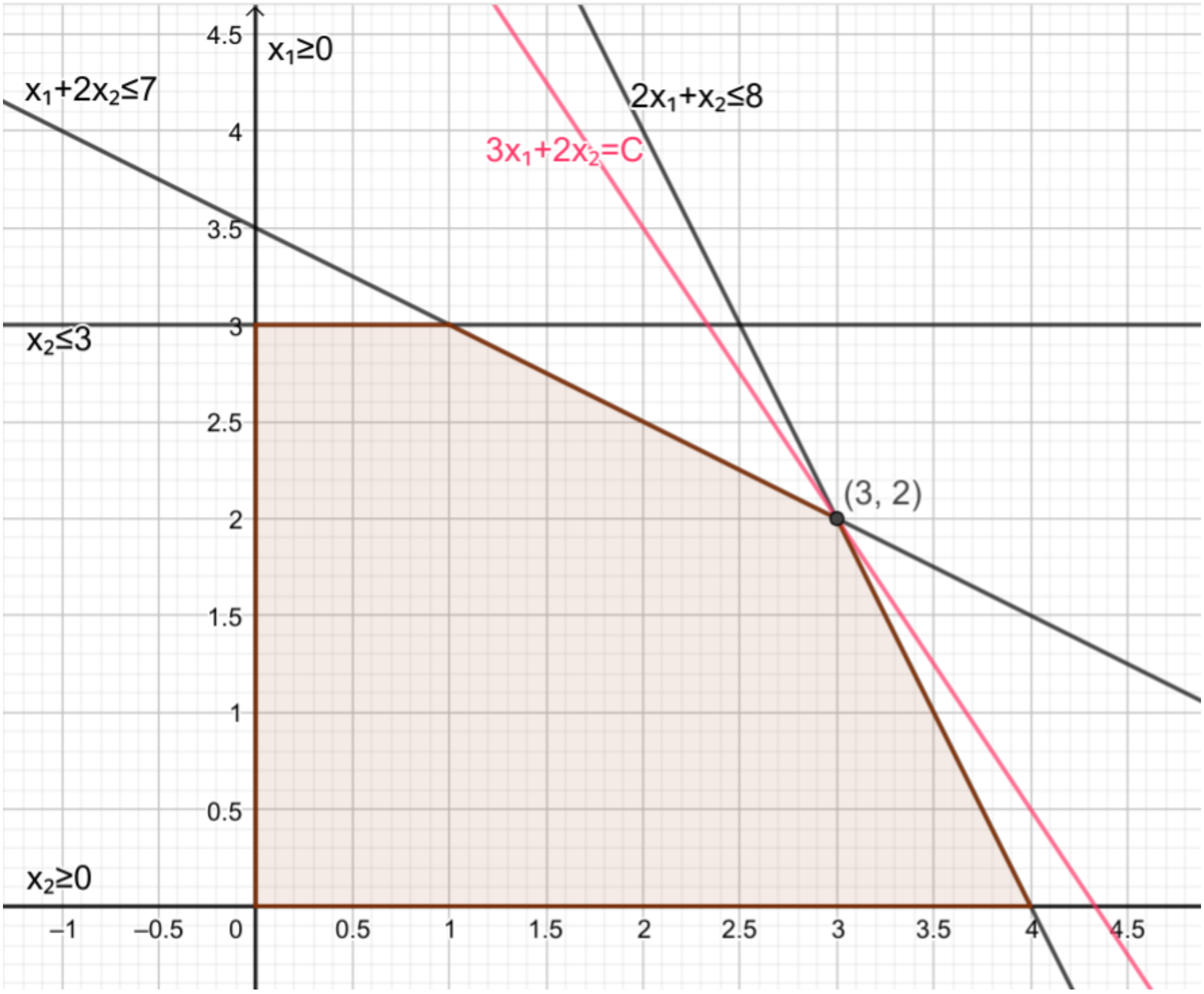
Очевидно, может

$x_1 + x_2 \to max;$
$x_1 = 1$
$x_2 = 1$
$x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$

5. Графический метод решения задачи линейного программирования. Используя графический метод, найти решение задачи линейного программирования:

$$f(x) = -3x_1 - 2x_2 \to min$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 7, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_2 \leq 3, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases}$$



6. Найти все базисы системы равенств и соответствующие им базисные решения:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

$C_4^2 =$ 6 возможных базисов

(x_1, x_2): $x_3 = 1 - x_1$, $x_4 = -x_2$; $(1, 0, 0, 0)$

(x_2, x_3): $x_1 = 1 - x_3$, $x_4 = -x_2$; $(0, 0, 1, 0)$

(x_1, x_3), (x_2, x_4) — коллинеарные

(x_1, x_4): $x_3 = 1 - x_1$, $x_2 = -x_4$; $(1, 0, 0, 0)$

(x_3, x_4): $x_1 = 1 - x_3$, $x_2 = -x_4$; $(0, 0, 1, 0)$

7. В данной системе ограничений выразить базисные переменные указанного базисного допустимого решения $\overline{x} = (1, 2, 0)^T$ через небазисные:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 3, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

$A_b = [[1,\ 1],\ [-\ 2,\ 3]]$

$A_b^{-1} = \ [[3/5,\ \ -\ 1/5],\ [2/5,\ 1/5]]$

$b\ =\ [3,\ 4]$

$A_s =\ [2,\ 1]$

$x\ =\ \left(x_b,\ x_s\right)$

$x_b\ =\ (1,\ 2)$

$x_s\ =\ (0)$

$x_b\ =\ A_b^{-1}(b\ -\ A_s x_s)\ =\ \ldots\ \text{т. к.}\ x_s\ =\ 0\ \ldots\ = A_b^{-1}b$

$x_1\ =\ 1 - x_3$

$x_2\ =\ 2 - x_3$

8. Исследовать на оптимальность решение $\overline{x} = (0, 0, 1, 1)^T$ задачи:

$$f(x) = x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 \to min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 = 1, \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{cases}$$

Можно аналитически показать, что это минимум путем подстановки.

Также, можно посмотреть соответствующую таблицу.

Это минимум функции f(x) на ОДР.

Список литературы

1. http://www.itlab.unn.ru/uploads/opt/optBook1.pdf
2. Васильев, Ф.П. Методы оптимизации: учебное пособие. Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. URL: https://e.lanbook.com/book/9304
3. Струченков, В.И. Методы оптимизации в прикладных задачах: учебное пособие. Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. URL: https://e.lanbook.com/book/13781