Teoria kategorii
dla początkujących

Paweł Czyż

30 kwietnia 2019

Streszczenie

Pewne pojęcia, jak zbiór czy grupa, tworzą kanon matematyki - są na tyle często wykorzystywane, że każdy matematyk się z nimi spotkał.

Tak samo często matematycy korzystają z pojęć teorii kategorii, choć nie wszyscy o tym wiedzą. W tym tekście próbuję przybliżyć podstawy teorii kategorii, tak by zarówno zwiększyć popularność „kategoryjnego" myślenia jak i zachęcić do dalszych studiów tej dziedziny.

Zakładam trochę obycia z podstawową teorią mnogości i styczność teorią grup, algebrą liniową lub topologią ogólną. Materiał wychodzący poza te oznaczenia oznaczyłem gwiazdką $\star$.

1 Czym są kategorie?

1 Uwaga. Zbiory intuicyjnie rozumiane są jako pewne kolekcje czy też woreczki, które mogą zawierać jakieś przedmioty. Taka intuicja może jednak prowadzić na manowce - nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów. Tymczasem zwrot „kolekcja wszystkich zbiorów" jest intuicyjnie zrozumiały, mimo, że nie może być zbiorem.

Bardzo niefrasobliwie, nie będziemy przejmować się aksjomatyką „kolekcji", nasze notatki nie będą więc ścisłe w sensie teoriomnogościowym. Sugerujemy przymknąć na to oko - zamiast koncentrować się na technikaliach, zajmiemy się tym co jest pojęciowo ważne. Niektorzy też badają aksjomatyki, w której wychodzi się od pojęcia kategorii zamiast od zbioru. (Czytelnika o teoriomnogościowym nastawieniu do życia, zachęcamy do konsultacji z *uniwersami Grothendiecka* lub teoriami *klas*, np. aksjomatyką NBG)

2 Pomysł. *Zbiór to kolekcja elementów.* Kategoria *to kolekcja obiektów i strzałek, które łączą różne obiekty. (Np. kolekcja wszystkich zbiorów połączona funkcjami.) Innymi słowy, zamiast odpowiadać na teoriomnogościowe pytanie o pojedynczy przedmiot: „jakie elementy ma ten zbiór?” kładziemy nacisk na całościowe spojrzenie: „w jaki sposób ten obiekt jest oddziałuje z innymi?”.*

3 Definicja. Będziemy nazywać $\mathcal{C}$ *kategorią* jeśli:

- mamy pewną kolekcję *obiektów* $A, B, C, \dots$. Będziemy oznaczać tę kolekcję przez $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$,
- mamy pewną kolekcję *strzałek* $f, g, h \dots$. Strzałki będziemy nazywać też *morfizmami*,
- każda strzałka f łączy dokładnie dwa określone obiekty - *dziedzinę* z *przeciwdziedziną*. Ten fakt oznaczamy przez $f\colon A \to B$ lub $A \xrightarrow{f} B$,
- strzałki można *składać* w następujący sposób:
  - jeśli $A \xrightarrow{f} B$ oraz $B \xrightarrow{g} C$, to istnieje strzałka $A \xrightarrow{g \circ f} C$. Będziemy czasami pisać gf zamiast $g \circ f$,
  - jeśli $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ oraz $C \xrightarrow{h} D$, to zachodzi $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (złożenie jest *łączne*),
  - dla każdego obiektu A istnieje strzałka $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ taka, że dla każdej $f\colon A \to B$ to $\mathrm{id}_B \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_A$ (istnieją *morfizmy identycznościowe*).

4 Przykład. Kategorią **Set** nazywamy kolekcję wszystkich zbiorów, w której strzałka $A \xrightarrow{f} B$ to po prostu trójka (A, f, B), gdzie f jest funkcją ze zbioru A w zbiór B. Złożenie strzałek określamy przez złożenie funkcji, a strzałki identycznościowe otrzymujemy z funkcji identycznościowych.

Pojawia się pytanie - dlaczego definiujemy strzałkę jako *trójkę* zamiast po prostu funkcję? Teoriomnogościowo funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ zadane wzorem $x \mapsto 1$ są tym samym - relacją $\mathbb{R} \times \{1\}$. W teorii kategorii jednak chcemy rozróżniać f i f', dlatego ręcznie dodajemy informację o dziedzinie i przeciwdziedzinie.

Jako, że ręczne dodanie informacji jest proste, to popularnie (i nie do końca ściśle) mówi się, że **Set** to kategoria w której obiektami są zbiory, a morfizmami są funkcje.

5 Przykład (Inne „standardowe” kategorie). Podobnie jak w powyższym przykładzie, mamy kategorie (uwaga - tak teoriomnogościowo to morfizmami są trójki, a nie funkcje):

1. **FinSet** - obiektami są zbiory skończone, a morfizmami - funkcje,
2. **Grp** - obiektami są grupy, a morfizmami homomomorfizmy grup (składanie homomomorfizmów jest łączne, identycznością jest homomomorfizm identycznościowy),
3. **Top** - obiektami są przestrzenie topologiczne, a morfizmami funkcje ciągłe,
4. R-**Mod** - obiektami są lewostronne moduły nad pierścieniem R, a morfizmami funkcje R-liniowe (analogicznie prawe moduły tworzą kategorię),
5. k-**Vect** - obiektami są przestrzenie wektorowe nad ciałem k, a morfizmami są funkcje liniowe (jest to szczególny przypadek kategorii modułów - $R = k$),
6. **Ab** - obiektami są grupy abelowe, a morfizmami homomomorfizmy grup (to też szczególny przypadek kategorii modułów - $R = \mathbb{Z}$),
7. k-**FinVect** - obiektami są przestrzenie wektorowe skończonego wymiaru nad ciałem k, a morfizmami są funkcje liniowe.

Podobnych przykładów można wymieniać bez liku (monoidy, pierścienie, ciała, rozmaitości różniczkowe...). Często obiekty to po prostu zbiory wyposażone w dodatkową strukturę, a morfizmami są funkcje zachowującą tę strukturę. Warto pamiętać, że *kategorie obejmują także inne przykłady.*

6 Notacja. $\mathrm{Hom}(A, B)$ to kolekcja wszystkich strzałek $A \xrightarrow{f} B$. W literaturze popularne są także oznaczenia[1] $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ lub $\mathrm{Mor}(A, B)$.

7 Definicja. Przyjmujemy oznaczenia:

1. kategoria, w których zarówno kolekcja obiektów jak i kolekcja strzałek są zbiorami, nazywana jest *małą*,

[1] Dlaczego Hom, a nie Mor? Zapewne dlatego, że np. w teorii grup czy pierścieni, na strzałki mówi się *homomorfizmy.*

2. kategoria, w której wszystkie kolekcje $\mathrm{Hom}(A, B)$ są zbiorami jest nazywana *lokalnie małą*.

8 Przykład. Kategorie z przykładu 5 są lokalnie małe, lecz nie są małe.

9 Uwaga (Uwaga techniczna, można pominąć)*.* Warto zauważyć, że $\mathrm{Hom}(A, B)$ oraz $\mathrm{Hom}(A', B')$ są albo identyczne (gdy $A = A'$ i $B = B'$) albo rozłączne (w przeciwnym przypadku). To wymaganie jest czysto techniczne (każda strzałka musi łączyć dokładnie dwa obiekty) - mając zbiory $\mathrm{Hom}'(A, B)$, które nie są parami rozłączne możemy zastąpić je przez $\mathrm{Hom}(A, B) = \{A\} \times \mathrm{Hom}'(A, B) \times \{B\}$, to znaczy zamiast rozpatrywać $f\colon A \to B$ wystarczy rozpatrywać trójki uporządkowane (A, f, B), tak samo jak w przykładzie 4 o kategorii **Set**.

10 Przykład. Nie każda kategoria wygląda jak „zbiory wzbogacone o jakąś strukturę" i „pewne funkcje". Jako kolekcję obiektów weźmy liczby naturalne. Będziemy rysować strzałkę z m do n wtedy i tylko wtedy gdy $m \leqslant n$. Nietrudno zauważyć, że jest to kategoria:

- jeśli $m \leqslant n$ oraz $n \leqslant p$, to $m \leqslant p$, więc określamy złożenie strzałek $m \to n$ i $n \to p$ jako unikalną strzałkę $m \to p$,
- między każdymi dwiema liczbami istnieje co najwyżej jedna strzałka, więc o problemach z łącznością nie ma mowy,
- strzałkami identycznościowymi są $\mathrm{id}_n = (n \leqslant n)$, które składają się poprawnie.

(Jeśli takie określenie kategorii budzi dyskomfort, warto przyjąć:

$$\mathrm{Hom}(m, n) = \begin{cases} \{(m, n)\} \text{ jeśli } m \leqslant n \\ \varnothing \text{ w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

wraz z działaniem $(n, p) \circ (m, n) = (m, p)$.) Taką kategorię można też narysować:

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[rrr, bend left=50] & 2 \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & 3 \arrow[r] & \dots
\end{tikzcd}$$

Na obrazku pominięto morfizmy identycznościowe (które wyglądają jak pętelki).

11 Przykład ($\star$ Dla topologów). Można też definiować tak zwaną *naiwną kategorię homotopii* **hTop**, w której obiektami są przestrzenie topologiczne, ale morfizmami są klasy abstrakcji homotopijnych funkcji (złożenie można określić przez reprezentantów, a morfizmem identycznościowym jest klasa abstrakcji funkcji identycznościowej). Tutaj też morfizmami nie są funkcje, lecz klasy abstrakcji funkcji.

12 Przykład. Każdą kolekcję (w tym każdy zbiór) można traktować jak kategorię - obiektami są elementy kolekcji i wprowadzamy wyłącznie morfizmy identycznościowe. Często się rysuje taką kategorię jako:

$$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \ldots$$

Obiekty są symbolizowane przez kropki i nie ma żadnych morfizmów poza identycznościowymi (pominięte na rysunku). Taką kategorię nazywamy *dyskretną*. Oczywiście jest lokalnie mała (a jeśli kolekcja obiektów jest zbiorem, to jest także mała).

13 Przykład. Kategorią **2** nazywamy kategorię, która ma dwa obiekty i jeden morfizm nieidentycznościowy. Rysujemy ją jako:

$$\bullet \to \bullet$$

(ponownie pominęliśmy na obrazku morfizmy identycznościowe). Jest mała, a więc także lokalnie mała.

14 Ćwiczenie (Kategoria $\mathbf{Set}_*$)**.** *Zbiorem z wyróżnionym punktem* nazywamy parę (X, x_0), gdzie $x_0 \in X$. Morfizmem $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ nazywamy funkcję $f\colon X \to Y$ taką, że $f(x_0) = y_0$. Przekonaj się, że jest to kategoria. (Czym jest złożenie morfizmów? Czy jest łączne? istnieją morfizmy identycznościowe?)

1.1 Zbiór częściowo uporządkowany jako kategoria

15 Pomysł. *Podobnie jak ze zbioru można zrobić w oczywisty sposób kategorię dyskretną (dodając identyczności), tak każdy zbiór częściowo uporządkowany można zamienić w pewną kategorię (podobnie jak w przykładzie 10 o liczbach naturalnych). Takie kategorie zarówno stanowią bogate źródło kontrprzykładów (jak i przydają się do zdefiniowania presnopów i ich źdźbeł).*

16 Przykład. Rozważmy zbiór dodatnich liczb całkowitych $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$. Definiujemy zbiory:

$$\mathrm{Hom}(k, m) = \begin{cases} \{\iota_k^m\} \text{ jeśli } k \text{ jest dzielnikiem } m, \\ \varnothing \text{ w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

gdzie przyjęliśmy zapis $\iota_k^m = (k, m)$. Definiujemy złożenie jako $\iota_m^n \circ \iota_k^m = \iota_k^n$. Sprawdźmy czy wszystkie własności są spełnione:

- weźmy dowolny element $\mathrm{Hom}(k, m)$ (czyli ι_k^m) oraz dowolny element $\mathrm{Hom}(m, n)$ (czyli ι_m^n). Chcemy pokazać, że złożenie $\iota_m^n \circ \iota_k^m = \iota_k^n$ jest dobrze określone, to znaczy, że $\iota_k^n \in \mathrm{Hom}(k, n)$. Tłumaczenie: jeśli k dzieli m oraz m dzieli n, to k dzieli n.

- $\mathrm{id}_n = \iota_n^n$ jest dobrze określone bo n dzieli n. Chcemy pokazać, że mnożenie przez identyczność niczego nie zmienia, to znaczy:

  $$\iota_k^m \circ \iota_k^k = \iota_k^m = \iota_m^m \circ \iota_k^m$$

  Co jest oczywiste z naszej definicji złożenia.

- łączność jest podobnie trywialna:

  $$(\iota_m^n \circ \iota_l^m) \circ \iota_k^l = \iota_l^n \circ \iota_k^l = \iota_k^n = \iota_m^n \circ \iota_k^m = \iota_m^n \circ (\iota_l^m \circ \iota_k^l)$$

17 Ćwiczenie. Przypomnijmy, że zbiór częściowo uporządkowany $(S, \leqslant)$ ma następujące własności dla dowolnych $a, b, c \in S$:

- $a \leqslant a$,

- jeśli $a \leqslant b$ oraz $b \leqslant a$, to $b = a$,

- jeśli $a \leqslant b$ oraz $b \leqslant c$, to $a \leqslant c$,

Posiłkując się powyższym przykładem 16, pokaż, że *każdy zbiór częściowo uporządkowany jest kategorią* jeśli wprowadzimy strzałki $a \to b$ dla $a \leqslant b$.

18 Przykład. Kategoria **2** z przykładu 13 jest szczególnym przypadkiem zbioru częściowo uporządkowanego.

1.2 Diagramy przemienne

19 Definicja (Intuicyjna definicja diagramu)**.** Podstawowym narzędziem teorii kategorii są *diagramy.* Będąc niezbyt precyzyjnym, możemy powiedzieć, że są to multigrafy, których wierzchołkami są obiekty, a krawędziami morfizmy. Mówimy, że diagram jest *przemienny* jeśli mając dowolne dwa wierzchołki A i B oraz dwie dowolne ścieżki $A \xrightarrow{f_1} X_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} B$ i $A \xrightarrow{g_1} Y_1 \xrightarrow{g_2} \dots \xrightarrow{g_m} B$, zachodzi równość $f_n \circ \cdots \circ f_1 = g_m \circ \cdots \circ g_1$. (Gdy ustalimy początek i koniec, nieważne jaką ścieżką pójdziemy, a wynikowy morfizm będzie taki sam.)

20 Przykład. Ten diagram jest przemienny wtedy i tylko wtedy gdy $g \circ f = i \circ h$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & B \arrow[d, "g"] \\
C \arrow[r, "i"] & D
\end{tikzcd}$$

21 Ćwiczenie. Jaki aksjomat kategorii wyraża przemienność tego diagramu?

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right] & C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}$$

22 Notacja. Będziemy korzystać z przerywanej strzałki $\bullet \dashrightarrow \bullet$ postulując istnienie danego morfizmu.

23 Przykład. Diagram przemienny

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, dotted] \arrow[d, "f"] & C \\
B \arrow[ur, "g"] &
\end{tikzcd}$$

postuluje istnienie strzałki $g \circ f$.

24 Notacja. Mówiąc, że *istnieje dokładnie jedna* strzałka, która sprawia, że diagram jest przemienny, będziemy używać wykrzyknika $\bullet \overset{!}{\dashrightarrow} \bullet$.

25 Ćwiczenie (**Set**$_*$ dla bystrzaków)**.** Aby nabrać więcej praktyki z diagramami przemiennymi, obejrzymy kategorię zbiorów z wyróżnionym punktem raz jeszcze, ale z nieco innego punktu widzenia.

Wybierzmy dowolny jednopunktowy zbiór i oznaczmy go przez $\{\bullet\}$. Jeśli X jest niepustym zbiorem, to funkcja $x\colon \{\bullet\} \to X$ wyznacza nam parę (X, x_0), gdzie $x_0 = x(\bullet)$. Innymi słowy obiektami są *funkcje* ze zbioru $\{\bullet\}$ w dowolne zbiory.

Czym może być morfizm między funkcjami? Rozważmy $x\colon \{\bullet\} \to X$ oraz $y\colon \{\bullet\} \to Y$. Morfizmem $x \xrightarrow{f} y$ nazywamy *diagram przemienny*:

$$\begin{tikzcd} & \{\bullet\} \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \end{tikzcd}$$

Jego przemienność oznacza $f(x_0) = (f \circ x)(\bullet) = y(\bullet) = y_0$! Alternatywnie, możemy myśleć o tym jak o funkcji $f\colon X \to Y$ takiej, że $f(x_0) = y_0$.

Zastanówmy się czym jest złożenie diagramów. Mając diagramy

$$\begin{tikzcd} & \{\bullet\} \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \{\bullet\} \arrow[dl, "y"'] \arrow[dr, "z"] & \\ Y \arrow[rr, "g"] & & Z \end{tikzcd}$$

określamy ich złożenie jako sklejenie wzdłuż wspólnej krawędzi:

$$\begin{tikzcd} & \{\bullet\} \arrow[dl, "x"'] \arrow[d, "y"] \arrow[dr, "z"] & \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \{\bullet\} \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "z"] & \\ X \arrow[rr, "g \circ f"] & & Z \end{tikzcd}$$

W ramach ćwiczenia:

1. Upewnij się, że $(g \circ f)(x_0) = z_0$.

2. Narysuj diagram przedstawiający morfizm identycznościowy id_x. Czy identyczności „dobrze” się składają?

3. Pokaż, że składanie diagramów jest łączne.

2 Proste konstrukcje uniwersalne

2.1 Izomorfizmy

26 Pomysł. *W teorii mnogości zbiory są równe gdy mają równe elementy. Tymczasem, teoria kategorii kładzie nacisk na obiekty i morfizmy między nimi - często będziemy uznawali za „równe" obiekty, które po prostu „zachowują się tak samo".*

27 Przykład. Ile jest grup dwuelementowych? Nieskończenie wiele:

- $\{0, 1\}$ z dodawaniem modulo 2,
- $\{0, 2\}$ z dodawaniem modulo 4,
- $\{-1, 1\}$ z mnożeniem,
- $\{\square, \blacksquare\}$ z operacją $\square \times \square = \blacksquare \times \blacksquare = \square$ i $\square \times \blacksquare = \blacksquare \times \square = \blacksquare$,
- ... (wiele, wiele „innych", izomorficznych grup)

Tak naprawdę „inność" bierze się wyłącznie z użycia innych elementów - mając twierdzenie o dowolnej z tych grup, bez problemu da się je przetłumaczyć na twierdzenie o dowolnej innej. Stąd właśnie pomysł na przymykanie oka na różnice między izomorficznymi obiektami - czym jest jednak izomorfizm poza teorią grup?

28 Definicja. Morfizm $f\colon A \to B$ nazywamy *izomorfizmem* jeśli istnieje $g\colon B \to A$ takie, że $g \circ f = \mathrm{id}_A$ oraz $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

29 Przykład. Izomorfizmami w **Set** są bijekcje. Tak samo w **FinSet**. W **Grp** są to bijektywne homomomorfizmy grup. W k-**Vect** i k-**FinVect** - bijektywne przekształcenia liniowe. W **Top** izomorfizmami są homeomorfizmy.

30 Ćwiczenie. Pokaż, że w zbiorze częściowo uporządkowanym jedynymi izomorfizmami są identyczności.

31 Ćwiczenie. Pokaż, że g występujące w definicji 28 jest unikatowe. Motywuje to pojęcie *morfizmu odwrotnego do* f i oznaczanego przez f^{-1}.

32 Przykład. Niech G będzie grupą. Możemy stworzyć kategorię o jednym obiekcie $\bullet$, której morfizmami są elementy grupy $g, h, \ldots$ traktowane jak strzałki $\bullet \xrightarrow{g} \bullet, \bullet \xrightarrow{h} \bullet, \ldots$ - w tej kategorii każdy morfizm jest izomorfizmem.

33 Ćwiczenie. Pokaż, że:

1. id_A jest izomorfizmem dla dowolnego obiektu A,
2. jeśli $f\colon A \to B$ jest izomorfizmem, to $f^{-1}\colon B \to A$ też jest izomorfizmem,
3. jeśli $f\colon A \to B$ oraz $g\colon B \to C$ są izomorfizmami, to $g \circ f$ też jest izomorfizmem.

34 Definicja. Jeśli istnieje izomorfizm z A do B, to będziemy mówili, że A *i B są izomorficzne* i pisali $A \simeq B$ lub rysowali na diagramie $A \xrightarrow{\simeq} B$.

35 Uwaga. Nietrudno zauważyć, że „bycie obiektem izomorficznym” to relacja równoważności[2]. Dlatego w teorii kategorii często przymykamy oko na różnice między izomorficznymi obiektami - „zachowują się tak samo”.

36 Ćwiczenie („Zachowują się tak samo”)**.** Dla ścisłości teoriomnogościowej, pracujemy w kategorii lokalnie małej (wszystkie $\mathrm{Hom}(A,B)$ są zbiorami). Załóżmy, że mamy zadany izomorfizm $f\colon A \to A'$. Wykaż, że:

1. dla dowolnego B, mamy bijekcję $f^*\colon \mathrm{Hom}(A',B) \to \mathrm{Hom}(A,B)$ zadaną wzorem $f^*(\psi) = \psi \circ f$ (co jest jej odwrotnością?),
2. ponadto jeśli diagram:

$$\begin{tikzcd}
 & A' \arrow[d, "\psi"] \arrow[dl, bend right, "\varphi"'] \\
B \arrow[r, "k"'] & C
\end{tikzcd}$$

   jest przemienny, to:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi\circ f"'] \arrow[dr, bend left, "\psi\circ f"'] & A' \arrow[d, "\psi"] \arrow[dl, bend right, "\varphi"'] \\
B \arrow[r, "k"'] & C
\end{tikzcd}$$

   też jest przemienny.

[2] Po prawdzie to klasy abstrakcji mogą być kolekcjami, a nie zbiorami, więc formalnie *nie* jest to relacja równoważności...

Innymi słowy mamy bijekcję między morfizmami zaczynającymi się w A oraz zaczynającymi się w A'. Podobnie definiując $f_*\colon \mathrm{Hom}(B, A) \to \mathrm{Hom}(B, A')$ przez $f_*(\psi) = f \circ \psi$ mamy bijekcję między morfizmami o końcu w A oraz morfizmami o końcu w A'.

37 Uwaga. Całkiem naturalne jest by nasze konstrukcje nie rozróżniały między izomorficznymi obiektami. Dobrą intuicją może być tutaj topologia - definiujemy niezmienniki topologiczne (np. spójność, zwartość) tak, że są takie same dla homeomorficznych przestrzeni. Podobnie, jeśli $G \simeq G'$ oraz $H \simeq H'$ są grupami (lub przestrzeniami topologicznymi), to $G \times H \simeq G' \times H'$ - nie jest to przypadek i zazwyczaj widząc taką zależność należy się spodziewać konstrukcji kategoryjnej.

2.2 Obiekt początkowy i końcowy

38 Definicja. Obiekt P nazywamy *początkowym* jeśli dla każdego obiektu A *istnieje dokładnie jeden* morfizm $P \to A$. Obiekt początkowy wygląda na diagramie jak $P \overset{!}{\dashrightarrow} A$.

39 Przykład. W **Set** obiektem początkowym jest tylko zbiór pusty $\varnothing$. Z kolei w **Grp** obiektem początkowym jest każda grupa trywialna (z jednym elementem) - czyli jest ich bardzo dużo. Wszystkie jednak są izomorficzne. Podobnie w kategoriach k-**Vect** i k-**FinVect**.

40 Ćwiczenie. Znajdź kategorię, w której *nie istnieje* obiekt początkowy.

41 Ćwiczenie. Widzimy, że obiekty początkowe zazwyczaj nie są unikatowe w sensie teoriomnogościowym. Na szczęście są „prawie unikatowe” to znaczy - „z dokładnością do izomorfizmu”. Wykaż, że:

- jeśli P i P' są obiektami początkowymi, to *istnieje dokładnie jeden izomorfizm* $P \to P'$,
- jeśli P jest obiektem początkowym i $A \simeq P$, to A też jest obiektem początkowym.

42 Uwaga. Zazwyczaj jeśli $A \simeq B$, to istnieje całkiem dużo izomorfizmów $A \to B$ (ile istnieje bijekcji między dwoma zbiorami pięcioelementowymi?!). Widzimy jednak, że mając dwa obiekty początkowe, izomorfizm między nimi jest *unikatowy.* (Jeśli masz własny ulubiony obiekt początkowy i jakieś twierdzenie o nim, oraz ja mam swój ulubiony obiekt początkowy, to nie musimy się dogadać którego izomorfizmu użyć do przeniesienia rezultatu twierdzenia na mój obiekt.)

43 Definicja. Odwróćmy teraz kierunek strzałki - obiekt K nazywamy *końcowym* jeśli dla każdego obiektu A *istnieje dokładnie jeden* morfizm $A \to K$. Zapisując obrazkiem: $A \overset{!}{\dashrightarrow} K$

44 Przykład. W **Set** obiektem końcowym jest dowolny singleton $\{\bullet\}$. W **Grp** obiektem końcowym jest każda grupa trywialna. W k-**Vect** i k-**FinVect** obiektem końcowym jest każda trywialna przestrzeń wektorowa.

45 Ćwiczenie. Wykaż twierdzenie:

1. jeśli K i K' są obiektami końcowymi to istnieje dokładnie jeden izomorfizm $K \to K'$,

2. jeśli $A \simeq K$, to A też jest obiektem końcowym.

46 Definicja. Jeśli obiekt Z jest jednocześnie obiektem początkowym i końcowym, to nazywamy go obiektem *zerowym*. Często jest też oznaczany przez 0.

47 Przykład. W **Set** *nie ma* obiektu zerowego.

48 Przykład. W **Grp** obiektem zerowym jest grupa trywialna. Podobnie w **Ab**. Analogicznie w k-**Vect**, k-**FinVect** i R-**Mod** jest to przestrzeń trywialna.

49 Ćwiczenie. Jeśli istnieje obiekt zerowy, to wszystkie obiekty początkowe są zerowe. Podobnie wszystkie obiekty końcowe są wtedy zerowe.

2.3 Kategoria dualna

50 Definicja. *Kategorią dualną* $\mathcal{C}^{op}$ nazywamy kategorię z tymi samymi obiektami i odwróconymi strzałkami. (Czyli $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C} = \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}^{op}$ oraz jeśli mamy $A \xrightarrow{f} B$ w $\mathcal{C}$, to definiujemy strzałkę $B \xrightarrow{f} A$ w $\mathcal{C}^{op}$.)

51 Przykład. Obiekt P jest początkowy w $\mathcal{C}$ wtedy i tylko wtedy gdy jest końcowy w $\mathcal{C}^{op}$. Mówimy, że obiekty końcowe i początkowe są *pojęciami dualnymi*.

52 Definicja. Rozważmy dowolną konstrukcję wyrażoną przy pomocy diagramów. Odwracając wszystkie strzałki otrzymujemy konstrukcję *dualną*. Często dodaje się przedrostek „ko-” do konstrukcji dualnej.

53 Żart. Obiekt początkowy zwany jest też „ńcowym”.

54 Ćwiczenie. Uzasadnij dlaczego izomorfizm jest pojęciem dualnym sam do siebie. (Pokaż, że jeśli f jest izomorfizmem w $\mathcal{C}$, to jest też w $\mathcal{C}^{op}$.)

2.4 Produkt

55 Definicja. *Produktem* obiektów A i B nazywamy obiekt P i morfizmy $P \xrightarrow{\pi_A} A$ oraz $P \xrightarrow{\pi_B} B$ takie, że jeśli X jest dowolnym obiektem[3] oraz $X \xrightarrow{f_A} A$ i $X \xrightarrow{f_B} B$, to *istnieje dokładnie jeden* morfizm $f\colon X \to P$ taki, że $f_A = \pi_A \circ f$ oraz $f_B = \pi_B \circ f$. Jest to przedstawione na poniższym diagramie:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, bend right, "f_A"'] \arrow[d, dotted, "!f"] \arrow[dr, bend left, "f_B"] & \\
A & P \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B
\end{tikzcd}$$

Często będziemy oznaczać obiekt produktu P przez $A \times B$.

56 Przykład. Czym są produkty w **Set**? Twierdzę, że jednym[4] z dobrych produktów A i B jest

$$(A \times B, A \times B \xrightarrow{\pi_A} A, A \times B \xrightarrow{\pi_B} B)$$

czyli iloczyn kartezjański wraz z rzutami $\pi_A\colon (a, b) \mapsto a$ i analogicznie $\pi_B\colon (a, b) \mapsto b$.

Weźmy teraz konkurenta do miana produktu - dowolny zbiór X i funkcje $f_A\colon X \to A$ i $f_B\colon X \to B$. Zdefiniujmy:

$$f\colon X \to A \times B, \quad f\colon x \mapsto (f_A(x), f_B(x))$$

Wówczas:

$$f_A(x) = \pi_A(f_A(x), f_B(x)) = \pi_A(f(x)) = \pi_A \circ f(x),$$

[3] Możemy o tym myśleć jak o konkurencie do miana produktu.

[4] Być może jest więcej, podobnie jak obiektów końcowych... Ciekawe czy wszystkie okażą się izomorficzne?

czyli $f_A = \pi_A \circ f$ i analogicznie $f_B = \pi_B \circ f$.

Pozostaje wykazać unikatowość f - weźmy dowolną funkcję $g\colon X \to A \times B$ taką, że $f_A = \pi_A \circ g$ oraz $f_B = \pi_B \circ g$. Rozpatrzmy dowolne x i napiszmy dla niego $g(x) = (y, z)$. Wówczas $y = (\pi_A \circ g)(x) = f_A(x)$ i analogicznie $z = f_B(x)$. Czyli $g = f$.

57 Uwaga. Zupełnie dobrymi produktami zbiorów A i B są też:

- $B \times A$ z morfizmami $B \times A \ni (b, a) \mapsto a \in A$ i analogicznym $(b, a) \mapsto b$,
- $A \times B \times \{1\}$ z morfizmami $(a, b, 1) \mapsto a$ i $(a, b, 1) \mapsto b$,
- dowolny zbiór bijektywny z $A \times B$ gdy wyposaży się go w odpowiednie morfizmy.

58 Twierdzenie. *Rozpatrzmy dwa obiekty A i B i przypuśćmy, że istnieje produkt (P, π_A, π_B). Wówczas:*

1. *jeśli (T, p_A, p_B) jest produktem, to* istnieje unikatowy izomorfizm $i\colon T \to P$ *taki, że $p_A = \pi_A \circ i$ oraz $p_B = \pi_B \circ i$,*
2. *jeśli mamy izomorfizm $f : Q \xrightarrow{\simeq} P$ to $(Q, \pi_A \circ f, \pi_B \circ f)$ też jest produktem,*
3. *jeśli $A' \simeq A$ oraz $B' \simeq B$, to produkty $A' \times B'$ i $A \times B$ są izomorficzne.*

59 Dowód. Druga i trzecia część są proste (szczególnie jeśli zrobiło się ćwiczenie 36), więc pokażemy tylko dowód pierwszej części:

1. weźmy produkt (P, π_A, π_B) i potraktujmy jako jego konkurenta (T, p_A, p_B). Mamy unikatowy morfizm $i\colon T \to P$ taki, że $p_A = \pi_A \circ i$ oraz $p_B = \pi_B \circ i$,

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[dl, bend right, "p_A"'] \arrow[d, dotted, "!i"] \arrow[dr, bend left, "p_B"] & \\ A & P \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B \end{tikzcd}$$

2. teraz weźmy (T, p_A, p_B) jako produkt oraz (P, π_A, π_B) jako jego konkurencję. Mamy unikatowy morfizm $j\colon P \to T$ taki, że $\pi_A = p_A \circ j$ oraz $\pi_B = p_B \circ j$,

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, bend right, "\pi_A"'] \arrow[dr, bend left, "\pi_B"] \arrow[d, dotted, "!j"] & \\
A & T \arrow[l, "p_A"'] \arrow[r, "p_B"] & B
\end{tikzcd}$$

3. teraz weźmy (P, π_A, π_B) zarówno jako produkt i współzawodnika. Istnieje unikatowy morfizm $m \colon P \to P$ taki, że $\pi_A = \pi_A \circ m$ oraz $\pi_B = \pi_B \circ m$.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, bend right, "\pi_A"'] \arrow[dr, bend left, "\pi_B"] \arrow[d, dotted, "!m"] & \\
A & P \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B
\end{tikzcd}$$

4. nietrudno zauważyć, że za m możemy wstawić id_P,

5. teraz popatrzmy na morfizm $i \circ j$. Mamy $\pi_A \circ i \circ j = p_A \circ j = \pi_A$ i analogicznie $\pi_B \circ i \circ j = \pi_B$. Czyli za m możemy wstawić $i \circ j$,

6. m jest unikatowe! Czyli $i \circ j = \mathrm{id}_P$. Analogicznie $j \circ i = \mathrm{id}_T$, czyli i jest izomorfizmem. A skoro jest unikatową strzałką taką, że $p_A = \pi_A \circ i$ oraz $p_B = \pi_B \circ i$, to i jest unikatowym izomorfizmem o zadanej własności.

60 Ćwiczenie. Udowodnij drugą i trzecią część twierdzenia 58.

61 Ćwiczenie. Czym jest produkt dwóch grup? A przestrzeni topologicznych?

62 Ćwiczenie. Podaj przykład pokazujący, że produkt nie zawsze istnieje.

63 Ćwiczenie (Pozornie inna definicja produktu)**.** Rozpatrzmy obiekty A i B kategorii $\mathcal{C}$. Definiujemy kategorię „obiektów produktopodobnych" $\mathrm{Prod}(A, B)$ w następujący sposób:

- obiektami są trójki (X, f, g) gdzie X jest obiektem $\mathcal{C}$, a $X \xrightarrow{f} A$ i $X \xrightarrow{g} B$ są morfizmami $\mathcal{C}$,

- morfizmem między obiektami (X, f, g) oraz (Y, p, q) będziemy nazywać morfizm $X \xrightarrow{m} Y$ taki, że $f = p \circ m$ oraz $g = q \circ m$.

1. Po pierwsze upewnij się, że to jest kategoria. (Czym jest składanie morfizmów? Czym są morfizmy identycznościowe? Warto narysować diagram.)

2. Pokaż, że dowolny produkt $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ jest obiektem końcowym w $\mathrm{Prod}(A, B)$.

Innymi słowy *produkty to obiekty końcowe* (pewnego rodzaju).

64 Ćwiczenie. Zdefiniuj produkt dowolnej rodziny obiektów $(A_i)_{i \in I}$.

65 Ćwiczenie (Zabawy ze zbiorami częściowo uporządkowanymi)**.** 1. Pokaż, że w $\mathbb{Z}^+$ uporządkowanym przez podzielność (przykład 16) produktem liczb n i m jest $\mathrm{nwd}(n, m)$.

2. Niech $\mathcal{P}(S)$ będzie zbiorem potęgowym S. Pokaż, że produktem zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq S$ jest $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$.

3. Pokaż ogólniejszy fakt - w zbiorze częściowo uporządkowanym S, produktem elementów w podzbiorze $X \subseteq X$ jest infimum X (jeśli istnieje). (Element $\inf X$ jest zdefiniowany jako największe ograniczenie dolne X, to znaczy $\inf X \leqslant x$ dla wszystkich $x \in X$ oraz jeśli $i \leqslant x$ dla wszystkich $x \in X$, to $i \leqslant \inf X$.)

66 Uwaga (O łączności). Nie jest trudno wykazać (choć to dość żmudne), że jeśli $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ jest produktem A i B, a $((A \times B) \times C, p_{A \times B}, p_C)$ jest produktem $A \times B$ i C, to obiekt $(A \times B) \times C$ wraz z morfizmami $\pi_A \circ p_{A \times B}$, $\pi_B \circ p_{A \times B}$, p_C jest produktem A, B i C. Ma to dwie istotne konsekwencje:

1. jeśli wiemy, że w danej kategorii istnieje produkt każdych dwóch obiektów, to istnieje też produkt każdej ich skończonej liczby,

2. chociaż często produkt nie jest łączny (np. w teorii mnogości $(A \times B) \times C \neq A \times (B \times C)$), to jednak istnieją unikatowe „ładne" izomorfizmy, utożsamiające różne produkty (jak $((a, b), c) \mapsto (a, (b, c))$). Za pojęciem „obiekty są prawie takie same" stoją izomorfizmy naturalne (pomysł 104).

2.5 Koprodukt

67 Definicja. *Koprodukt* jest pojęciem dualnym do produktu, to znaczy - weźmy obiekty A i B. Koproduktem nazywamy obiekt $A + B$ oraz morfizmy $\sigma_A \colon A \to A + B$ i $\sigma_B \colon B \to A + B$, takie, że jeśli $(K, A \xrightarrow{k_A} K, B \xrightarrow{k_B} K)$, to istnieje unikatowy morfizm $A + B \xrightarrow{k} K$ taki, że $k_A = k \circ \sigma_A$ i $k_B = k \circ \sigma_B$.

68 Ćwiczenie (Własności koproduktu)**.** Znając własności produktu i odwracając strzałki, dostajemy analogiczne własności koproduktu:

1. narysuj diagram definiujący koprodukt (wystarczy odwrócić strzałki w definicji produktu),
2. zauważ, że jeśli mamy dwa koprodukty $(A+B, \sigma_A, \sigma_B)$ oraz (K, k_A, k_B), to istnieje unikatowy izomorfizm $i\colon A + B \to K$ taki, że $k_A = i \circ \sigma_A$ oraz $k_B = i \circ \sigma_B$,
3. zinterpretuj koprodukt jako obiekt początkowy w jakiejś kategorii (pomocne może być ćwiczenie 63).

69 Przykład. Koproduktem dwóch zbiorów A i B (lub przestrzeni topologicznych) jest ich suma rozłączna $A \coprod B$, wraz z inkluzjami $A \hookrightarrow A \coprod B$, $B \hookrightarrow A \coprod B$.

70 Przykład. Koproduktem dwóch przestrzeni wektorowych (ogólniej - modułów, czyli także grup abelowych) jest ich suma prosta. Jako, że koprodukt i produkt w tym wypadku są tym samym, nazywamy je czasami *biproduktem.* Natomiast koprodukt nieskończonej rodziny przestrzeni wektorowych (czy modułów) już nie jest tym samym co produkt.

71 Przykład. Koproduktem dwóch grup jest iloczyn wolny (ta konstrukcja nie jest podstawowa, mogła być pominięta na kursie algebry).

72 Ćwiczenie. Czym jest koprodukt w $\mathbb{Z}^+$ uporządkowanym przez podzielność? A w zbiorze potęgowym uporządkowanym przez inkluzję?

2.6 Ekwalizator

73 Definicja. Rozważmy równoległe strzałki $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ (to jest - dwie strzałki o wspólnej dziedzinie i przeciwdziedzinie. Niekoniecznie $f = g$, więc diagram nie jest do końca przemienny...). *Ekwalizatorem* nazywamy obiekt E i morfizm $e\colon E \to X$ taki, że:

- $f \circ e = g \circ e$,
- jeśli Q i $q\colon E \to X$ spełniają warunek $f \circ q = g \circ q$, to istnieje unikatowy morfizm $k\colon Q \to E$ taki, że $q = e \circ k$.

Definicję tę przedstawia poniższy diagram prawie (nie wymagamy $f = g$) przemienny:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "e"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\ Q \arrow[u, dotted, "!k"] \arrow[ur, "q"] & & \end{tikzcd}$$

74 Ćwiczenie. Zinterpretuj stwierdzenie „ekwalizator jest unikatowy z dokładnością do unikatowego izomorfizmu”.

75 Ćwiczenie (Ale dlaczego „ekwalizator”?)**.** Pokaż, że w **Set** ekwalizatorem $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ jest zbiór:

$$E = \{e \in X : f(x) = g(x)\}$$

wraz z inkluzją $E \hookrightarrow X$.

76 Ćwiczenie. Wybierz swoją ulubioną kategorię spośród k-**Vect**, R-**Mod**, **Ab** i pokaż, że ekwalizatorem morfizmów $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ jest jądro ich różnicy (to jest $\ker(f - g)$) wraz z inkluzją.

77 Uwaga ($\star$)*.* W R-**Mod** (czyli też k-**Vect** i **Ab**) istnieje obiekt zerowy 0. Czyli istnieją morfizmy $X \to 0$ i $0 \to Y$. Składając je otrzymujemy morfizm zerowy $X \xrightarrow{0} Y$. W ten sposób otrzymujemy kategoryjną własność jądra f jako ekwalizatora $X \underset{0}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$.

78 Uwaga ($\star$)*.* Ekwalizator (i powyższa interpretacja jako jądro różnicy) są przydatne do zdefiniowania tzw. snopów.

79 Ćwiczenie. Zdefiniuj obiekt dualny - koekwalizator. (Jest rzadziej spotykany - w **Set** odpowiada dzieleniu przez pewną relację równoważności, a w R-**Mod** staje się *kojądrem* przekształcenia.)

80 Uwaga. Konstrukcje, które wykonywaliśmy nazywane są konstrukcjami uniwersalnymi - zadajemy za pomocą diagramu pewną własność i otrzymujemy obiekt (i morfizmy) odpowiadające obiektowi końcowemu (produkt, ekwalizator) pewnej kategorii lub początkowemu (koprodukt, koekwalizator). W przypadku obiektów końcowych konstrukcje takie nazywamy *granicami*, w przypadku początkowych - *kogranicami*. Dają one zunifikowany pogląd na wiele konstrukcji popularnych w algebrze czy geometrii.

3 Funktory

81 Pomysł. *Tak jak morfizmy są odwzorowaniami między obiektami, tak* funktory *są* odwzorowaniami między kategoriami. *Pozwala to na przenoszenie twierdzeń i problemów z jednej kategorii do innej.*

82 Definicja (Funktor kowariantny)**.** Niech $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ będą kategoriami. *Funktorem kowariantnym* $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ nazywamy przyporządkowanie:

- dla każdego obiektu $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ mamy pewien $F(A) \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$,
- podobnie dla każdego morfizmu $A \xrightarrow{f} B$, mamy morfizm $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$.

Przy czym wymagamy aby:

- $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ (złożenia są zachowywane),
- $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ (identyczności są zachowywane).

Często funktory kowariantne po prostu są nazywane funktorami.

83 Przykład (Funktor stały). Niech $D \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ będzie ustalonym obiektem. Definiujemy:

- $S(A) = D$
- $S(A \xrightarrow{f} B) = \mathrm{id}_D$

Po kolei sprawdźmy wszystkie własności:

- strzałka $f\colon A \to B$ przechodzi na strzałkę $\mathrm{id}_D\colon S(A) \to S(B)$,
- oczywiście $S(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_D = \mathrm{id}_{S(A)}$,
- $S(g) \circ S(f) = \mathrm{id}_D \circ \mathrm{id}_D = \mathrm{id}_D = S(g \circ f)$.

Czyli jest to funktor.

84 Przykład (Funktor identycznościowy). Funktor identycznościowy $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ to następujące przekształcenie:

- $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(A) = A$,

- $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}(A \xrightarrow{f} B) = A \xrightarrow{f} B$

W oczywisty sposób zachowuje złożenia i identyczności, więc jest funktorem.

85 Ćwiczenie. Pokaż, że odwzorowanie „zapominalskie”, które:

- grupie G przyporządkowuje jej nośnik (zbiór elementów),
- homomomorfizmowi $G \to H$ przyporządkowuje siebie (homomomorfizmy to przecież funkcje!),

jest funktorem[5].

86 Ćwiczenie. Pokaż, że odwzorowanie $\mathcal{P}\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ jest funktorem, gdzie:

- $\mathcal{P}(A) =$ zbiór potęgowy A,
- $\mathcal{P}(f) = \operatorname{Im} f = f(A) \subseteq B$, jeśli $f\colon A \to B$.

87 Przykład ($\star$ Iloczyn tensorowy)*.* Jeśli V jest ustaloną przestrzenią wektorową nad ciałem k, to odwzorowanie $W \mapsto W \otimes_k V$, $f \mapsto f \otimes \mathrm{id}_V$ jest funktorem $\bullet \otimes_k V\colon k\text{-}\mathbf{Vect} \to k\text{-}\mathbf{Vect}$.

88 Przykład ($\star$ Dla topologów algebraicznych)*.* W topologii algebraicznej bierzemy przestrzeń topologiczną X oraz punkt x_0 i przypisujemy tzw. grupę fundamentalną $\pi_1(X, x_0)$ w punkcie x_0. Funkcjom ciągłym przenoszącym wyróżniony punkt na inny wyróżniony punkt, mamy ponadto odpowiadający homomomorfizm grup fundamentalnych, zachowujący złożenia i identyczności. Czyli grupa fundamentalna to tak naprawdę funktor $\pi_1\colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$ (z kategorii przestrzeni topologicznych z wyróżnionym punktem do kategorii grup).

89 Przykład ($\star$ Dla geometrów różniczkowych)*.* Funktor styczny przypisuje rozmaitości M jej wiązkę styczną TM. Funkcji gładkiej $f\colon M \to N$ przypisuje odwzorowanie styczne: $Tf(v_p) = df|_p v_p \in T_{f(p)}N$. Pochodną funkcji identycznościowej jest oczywiście odwzorowanie identycznościowe $((T\mathrm{id}_M)(v_p) = d(\mathrm{id}_M)|_p v_p = \mathrm{id}_{T_pM} v_p)$. Podobnie twierdzenie o pochodnej funkcji złożonej $(T(g \circ f)v_p = d(g \circ f)_p v_p = dg|_{f(p)} \circ df_p v_p = (Tg \circ Tf)v_p)$ pokazuje, że złożenie się dobrze przenosi.

[5] Aby być w pełni poprawnym, to zgodnie z uwagą 9 o rozłączności zbiorów morfizmów, trzeba by „rozpakować” homomorfizm z trójki (G, f, H) i „zapakować” go w zbiory, ale nie przejmowałbym się tym szczegółem zanadto. Analogicznym szczegółem jest to, że piszemy G zamiast $(G, \circ)$, bo teoriomnogościowo grupa to zbiór *z działaniem*.

90 Przykład ($\star$ Dla koneserów teorii Liego)*.* Jeśli G jest grupą Liego, to możemy przyporządkować jej algebrę Liego $\mathfrak{g}$ (przestrzeń lewoniezmienniczych pól wektorowych, izomorficzną z przestrzenią styczną obliczoną w identyczności $e \in G$). Ponadto jeśli $\varphi \colon G \to H$ jest homomomorfizmem grup Liego, to pochodna $d\varphi|_e$ jest homomorfizmem algebr Liego $\mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$. Nietrudno pokazać, że odwzorowanie to przenosi identyczności na identyczności i zachowuje złożenia.

91 Uwaga. Funktor *nie musi* „dobrze” przenosić konstrukcji uniwersalnych - na przykład „zapominalski” funktor $U \colon k\text{-}\mathbf{Vect} \to \mathbf{Set}$ zamieniający przestrzenie wektorowe na ich nośniki (zbiory wektorów) psuje koprodukt - jeśli V i W są przestrzeniami wektorowymi, to nośnikiem ich koproduktu (sumy) jest iloczyn kartezjański: $U(V+W) = U(V) \times U(W)$, a koproduktem zbiorów jest suma rozłączna $U(V) \coprod U(W)$, czyli coś zupełnie innego!

92 Ćwiczenie. Pokaż, że funktory zachowują izomorfizmy - jeśli $f \colon A \to B$ jest izomorfizmem, to $F(f) \colon F(A) \to F(B)$ też jest izomorfizmem.

Innymi słowy jeśli chcemy wykazać, że obiekty A i B nie są izomorficzne, to wystarczy znaleźć funktor F taki, że $F(A)$ i $F(B)$ nie są izomorficzne. (Przykładami takiego podejścia jest grupa fundamentalna czy teorie homologii.)

93 Definicja (Funktor kontrawariantny)**.** *Funktorem kontrawariantnym* $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ nazywamy funktor kowariantny $F \colon \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$. Innymi słowy:

- dla każdego obiektu $A \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ mamy pewien $F(A) \in \operatorname{Ob} \mathcal{D}$,
- podobnie dla morfizmu $A \xrightarrow{f} B$, mamy morfizm $F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A)$.

Przy czym wymagamy aby:

- $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ (złożenia są odwracane),
- $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ (identyczności są zachowywane).

94 Ćwiczenie ($\star$ Dla topologów)**.** Pokaż, że odwzorowanie $\mathcal{P} \colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ jest funktorem kontrawariantnym, gdzie:

- $\mathcal{P}(A) =$ zbiór potęgowy A,
- $\mathcal{P}(f) = f^{-1}(A) \subseteq B$, jeśli $f \colon A \to B$.

95 Ćwiczenie (Hom-funktory)**.** Rozważmy kategorię $\mathcal{C}$ i obiekt $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$. Stwórzmy odwzorowanie $\operatorname{Hom}(A, \bullet)\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ dane wzorem:

- $\operatorname{Hom}(A, \bullet)(B) = \operatorname{Hom}(A, B)$ (i tak też będziemy pisać - kropeczka ma symbolizować puste miejsce na argument),
- $\operatorname{Hom}(A, f) = f_*$, gdzie jeśli $f\colon B \to B'$, to $f_*\colon \operatorname{Hom}(A, B) \to \operatorname{Hom}(A, B')$ jest dane wzorem $f_*(\varphi) = f \circ \varphi$.

W ramach zadania:

- pokaż, że jest to funktor kowariantny,
- oraz zdefiniuj *kontrawariantny* funktor $\operatorname{Hom}(\bullet, A)$. (Podpowiedź: już się z nim spotkaliśmy - możesz motywować się ćwiczeniem 36.)

Te funktory są szczególnie ważne w algebrze homologicznej oraz w ważnym rezultacie teorii kategorii, tzw. lemacie Yonedy.

96 Przykład ($\star$Spektrum pierścienia[1])*.* W tym przykładzie zajmujemy się **CRing**, czyli kategorią pierścieni przemiennych z jedynką. Niech A będzie takowym pierścieniem. Możemy mu przypisać zbiór ideałów pierwszych $\operatorname{Spec} A$. Jeśli $\mathfrak{p} \subseteq B$ jest ideałem pierwszym i $\varphi\colon A \to B$ jest homomorfizmem, to $\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$ jest ideałem pierwszym w A. Można więc zdefiniować funkcję $\varphi^*\colon \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$. Można pokazać, że tak zdefiniowane odwzorowanie jest funktorem kontrawariantnym z **CRing** do **Set**. (A tak naprawdę to w **Top**, gdy wyposaży się spektrum w topologię Zariskiego.)

4 Transformacje naturalne

97 Pomysł. *Tak jak funktory to odwzorowania między kategoriami, tak* transformacje naturalne *są odwzorowaniami między funktorami. Innymi słowy mając zadane kategorie $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$:*

- *utworzymy*[6] *kolekcję funktorów kowariantnych $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$,*
- *mając dwa funktory z tej kolekcji (równoległe) F i G określimy odwzorowanie między nimi.*

[6]Modulo problemy teoriomnogościowe - często wymaga się by dziedzina była mała, to znaczy kolekcje strzałek i obiektów były zbiorami.

98 Definicja. Niech $\mathcal{C}$ oraz $\mathcal{D}$ będą kategoriami. Przez $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ będziemy rozumieć kolekcję funktorów kowariantnych z $\mathcal{C}$ do $\mathcal{D}$. Niech $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ oraz $G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ będą takimi funktorami. *Transformacją naturalną* z F do G nazywamy rodzinę morfizmów $\eta_X\colon F(X) \to G(X)$, gdzie $X \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ taką, że dla każdego morfizmu $X \xrightarrow{f} Y$ w $\mathcal{C}$ następujący diagram kategorii $\mathcal{D}$ jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Często piszemy $\eta\colon F \Rightarrow G$ oraz przedstawiamy to na obrazku jako:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

99 Przykład. Dla każdego funktora F istnieje transformacja naturalna $\mathrm{id}_F\colon F \Rightarrow F$ o składowych $(\mathrm{id}_F)_X = \mathrm{id}_X$.

100 Uwaga. Możemy też rozpatrywać transformację naturalną między funktorami kontrawariantnymi - jako, że to tak naprawdę funktory z $\mathcal{C}^{op}$ do $\mathcal{D}$, to wystarczy odwrócić poziome strzałki na diagramie.

101 Ćwiczenie (Składanie transformacji naturalnych)**.** Transformacje naturalne mają być morfizmami kategorii $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$, potrzebujemy więc określić ich złożenie.

Niech F, G, H będą funktorami kowariantnymi z $\mathcal{C}$ do $\mathcal{D}$ i niech $\eta\colon F \Rightarrow G$ i $\gamma\colon G \Rightarrow H$ będą transformacjami naturalnymi. Pokaż, że rodzina morfizmów $(\gamma \circ \eta)_X = \gamma_X \circ \eta_X$ jest transformacją naturalną $F \Rightarrow H$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G"'] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3, "\Downarrow\eta"] \arrow[r, phantom, shift right=3, "\Downarrow\gamma"] & \mathcal{D} \end{tikzcd}$$

(Należy sprawdzić przemienność poniższego diagramu. W razie problemów warto wrócić do ćwiczenia 25.)

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\gamma_X \circ \eta_X"] & F(Y) \arrow[d, "\gamma_Y \circ \eta_Y"] \\ H(X) \arrow[r, "H(f)"] & H(Y) \end{tikzcd}$$

102 Ćwiczenie. Dokończ uzasadniać dlaczego $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ jest kategorią, to znaczy:

- pokaż łączność złożeń,
- pokaż istnienie morfizmów identycznościowych (przypomnij sobie przykład 99).

103 Uwaga. Rozważmy (ignorując problemy teoriomnogościowe rodzaju zbioru wszystkich zbiorów) kategorię w której obiektami są kategorie, a morfizmami - funktory. Mamy też 2-morfizmy (transformacje naturalne), które są strzałkami między 1-morfizmami (funktorami). Mamy więc bogatszą strukturę niż zwykłej kategorii, nazywaną *2-kategorią*. Można też rozważać jeszcze bardziej rozbudowane twory, jak 3, 4 czy $\infty-$kategorie, czym zajmuje się *wyższa teoria kategorii.*

104 Pomysł. *Zbiory $A \times B$ i $B \times A$ są „prawie takie same" - oczywiście są izomorficzne, co więcej izomorfizm między nimi jest ładny: $(a, b) \mapsto (b, a)$. Podobnie „prawie takie same" są zbiory $(A \times B) \times C$ i $A \times (B \times C)$.*

W teorii kategorii umawiamy się na utożsamianie izomorficznych obiektów mając zadany izomorfizm między nimi. *Naturalny izomorfizm okazuje się być rodziną izomorfizmów - regułą w jaki sposób należy utożsamiać różne przestrzenie. To znaczy zamiast zadawać jeden izomorfizm między dwoma obiektami, zadajemy naraz izomorfizmy na bardzo wielu parach obiektów!*

105 Ćwiczenie (Naturalny izomorfizm)**.** Pokaż, że $\eta\colon F \Rightarrow G$ jest izomorfizmem w $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie morfizmy η_X są izomorfizmami w $\mathcal{D}$. W takim wypadku η nazywane jest *naturalnym izomorfizmem.*

106 Notacja. Jeśli $f\colon A \to A'$ oraz $g\colon B \to B'$ są funkcjami, to określamy funkcję $f \times g\colon A \times B \to A' \times B'$ daną wzorem $(a, b) \mapsto (f(a), g(b))$.

107 Ćwiczenie. Rozważmy kategorię $\mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$, której obiektami są pary zbiorów (A, B) i morfizmami są pary strzałek $(A \xrightarrow{f} A', B \xrightarrow{g} B')$ oraz dwa równoległe funktory:

- $P_1\colon \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, $P(A,B) = A \times B$, $P(f,g) = f \times g$,
- $P_2\colon \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, $P(A,B) = B \times A$, $P(f,g) = g \times f$.

Pokaż, że transformacja naturalna $\eta_{X,Y}\colon P_1 \Rightarrow P_2$ dana wzorem $\eta_{X,Y}\colon X \times Y \to Y \times X$, $(x,y) \mapsto (y,x)$ jest *naturalnym izomorfizmem*.

4.1 $\star$ Przestrzeń dwukrotnie dualna

108 Pomysł. *Przestrzeń wektorowa skończonego wymiaru V jest izomorficzna do swojej przestrzeni dualnej V^*, jednak dla każdej przestrzeni istnieje „zupełnie inny" izomorfizm. Natomiast istnieje rodzina izomorfizmów utożsamiająca V i V^{**} - tak często stosowany, że często się pisze $V = V^{**}$.*

109 Notacja. Pracujemy w kategorii przestrzeni wektorowych skończonego wymiaru $\mathcal{C} = k$-$\mathbf{FinVect}$.

110 Definicja. Niech $V \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$. Definiujemy *przestrzeń dualną*:

$$V^* = \operatorname{Hom}(V,k)$$

Definiując dodawanie i mnożenie przez skalary nadajemy V^* strukturę przestrzeni wektorowej:

$$(\nu + \omega)(v) := \nu(v) + \omega(v)$$
$$(a \cdot \nu)(v) := a \cdot \nu(v)$$

Elementy V^* nazywamy *kowektorami* lub *jednoformami*.

111 Twierdzenie. *Przestrzenie V i V^* są izomorficzne.*

112 Dowód. Weźmy dowolną bazę v_1, v_2, …, v_n przestrzeni V. Definiujemy n jednoform wzorami:

$$\nu_i(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_i$$

Nietrudno zauważyć, że są to odwzorowania liniowe, czyli rzeczywiście ν_i są jednoformami. Jeśli $a_1\nu_1 + \cdots + a_n\nu_n = 0$, to $(a_1\nu_1 + \cdots + a_n\nu_n)(v_i) = a_i = 0$ czyli formy te są liniowo niezależne. Weźmy teraz dowolną funkcję liniową $\omega \in V^*$. Skoro jest to funkcja liniowa, jest jednoznacznie wyznaczona przez wartości przyjmowane na bazie $\omega(v_1)$, …, $\omega(v_n)$. Zachodzi $\omega = \omega(v_1) \cdot \nu_1 + \cdots + \omega(v_n) \cdot \nu_n$, co kończy dowód.

113 Uwaga. Jeśli wymiar V jest nieskończony, to $\dim V^* > \dim V$.

114 Definicja. Jeśli $f\colon V \to W$, to definiujemy *odwzorowanie dualne* $f^*\colon W^* \to V^*$ dane wzorem:

$$f^*(\omega) = \omega \circ f$$

Nietrudno zauważyć, że rzeczywiście $f^*(\omega) \in V^*$ oraz, że f^* jest odwzorowaniem liniowym.

115 Uwaga. Mamy do czynienia z funktorem *kontrawariantnym*: $V \mapsto V^*$, $f \mapsto f^*$.

116 Definicja. *Przestrzenią dwukrotnie dualną* V^{**} nazywamy przestrzeń dualną przestrzeni dualnej $(V^*)^*$. Podobnie dla $f\colon V \to W$ definiujemy odwzorowanie dwukrotnie dualne $f^{**}\colon V^{**} \to W^{**}$. Jeśli $\bar{v} \in V^{**}$ oraz $\omega \in W^*$, wyraża się ono wzorem:

$$f^{**}(\bar{v})(\omega) = \bar{v}(f^*(\omega)) = \bar{v}(\omega \circ f)$$

117 Wniosek. *Przekształcenie $V \mapsto V^{**}$, $f \mapsto f^{**}$ jest funktorem kowariantnym (jako złożenie funktorów kontrawariantnych).*

118 Twierdzenie. *Funktor identycznościowy $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ oraz funktor dwukrotnie dualny są naturalnie izomorficzne.*

119 Dowód. Oznaczmy funktor dwukrotnie dualny przez D. Potrzebujemy naturalnego izomorfizmu $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow D$. Spróbujmy więc:

$$\eta_V\colon V \to V^{**},\ \eta_V(v)(\nu) := \nu(v)$$

Nietrudno zauważyć, że η_V jest przekształceniem liniowym. Pozostaje sprawdzić:

1. czy η jest w ogóle transformacją naturalną?

2. czy funkcje η_V są izomorfizmami?

Potrzebujemy sprawdzić czy diagram:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_V"'] & W \arrow[d, "\eta_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "f^{**}"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Niech $v \in V$ oraz $\omega \in W^*$. Mamy:

$$((\eta_W \circ f)(v))(\omega) = \omega(f(v))$$

$$((f^{**} \circ \eta_V)(v))(\omega) = (f^{**}(\eta_V(v)))(\omega) = (\eta_V(v))(\omega \circ f) = (\omega \circ f)(v) = \omega(f(v))$$

Udowodnimy teraz, że η_V są izomorfizmami. Niech $\eta_V(v) = 0$, czyli $\nu(v) = 0$ dla wszystkich $\nu \in V^*$. Stąd $v = 0$ (inaczej możemy uzupełnić v do bazy i rozpatrzyć bazę dualną, której pierwszy wektor da wynik 1 zamiast 0). Jądro η_V jest trywialne, a skoro $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$, to z twierdzenia o rzędzie otrzymujemy tezę.

120 Uwaga. Pokazaliśmy, że η jest naturalnym izomorfizmem. Natomiast funktor przypisujący przestrzeń dualną V^* jest *kontrawariantny*, więc nie może być naturalnie izomorficzny z identycznością. Tego naturalnego izomorfizmu η używa się często niejawnie do identyfikowania V i V^{**} tak, że popularnie pisze się $V = V^{**}$, podobnie jak często identyfikuje się zbiory $(A \times B) \times C$ oraz $A \times (B \times C)$ bez wspominania o tym.

Ten przykład jest szczególnie ważny z powodów historycznych - zapoczątkował teorię kategorii. To właśnie transformacje naturalne były motywacją do stworzenia funktorów i kategorii.

5 Posłowie

Co mam zapamiętać?

- kategoria to kolekcja obiektów powiązanych morfizmami,
- nie interesuje nas *wewnętrzna struktura* obiektu (jak elementy zbioru) - ale to w jaki sposób oddziałuje z innymi obiektami (jakie morfizmy do niego wchodzą i z niego wychodzą),
- jako, że izomorficzne obiekty oddziałują tak samo, staramy się ich nie rozróżniać,
- konstrukcje nowych obiektów (jak iloczyn kartezjański czy suma przestrzeni wektorowych) mają swoje uogólnienia, składające się z obiektu i rodziny morfizmów,

- tak jak w kategorii różne obiekty oddziałują poprzez morfizmy, tak różne *kategorie* oddziałują przez funktory. Wiele konstrukcji znanych z algebry czy geometrii różniczkowej to tak naprawdę funktory,
- transformacje naturalne są morfizmami między funktorami. Notacja „prawie takie same” jest tak naprawdę naturalnym izomorfizmem pewnych funktorów.

Co mam robić teraz?

- widząc nową konstrukcję, zawsze zastanawiaj się czy nie jest ona kategoryjna (np. czy nie jest granicą). Mając relację między różnymi kategoriami (np. do każdej grupy Liego mamy przypisaną algebrę Liego) zastanawiaj się czy nie jest przypadkiem funktorialna,
- zapoznaj się z *granicami, sprzężeniami* i *lematem Yonedy*. Dobrymi książkami dla początkujących są [2, 3, 6].
- jeśli szukasz zastosowań teorii kategorii w innych dziedzinach, możesz zainteresować się algebrą przemienną [1], algebrą homologiczną, topologią algebraiczną [9] czy geometrią algebraiczną [11]. Możesz też przeczytać [4].
- jeśli lubisz logikę, oprócz [4, 2], możesz zacząć czytać o teorii *toposów* [5, 8],
- jeśli czujesz się bardzo pewnie, spójrz na legendarną książkę [7] (autorem jest jeden z twórców teorii kategorii, nie jest to jednak prosta książka!),
- ...i pamiętaj: zawsze możesz sprawdzić nLab [10].

Sugestie i błędy Będę wdzięczny za informację o znalezionych błędach, sugestiach czy wrażeniach z czytania (np. co było za trudne, a co zbyt łatwe, ile czasu pochłonęły te notatki).

Literatura

[1] M. F. Atiyah, I. G MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra.* Addison Wesley, Massachusetts, 1969.

[2] S. Awodey, *Category theory*, Notatki dostępne pod: http://www.andrew.cmu.edu/course/80-413-713/notes/.

[3] J. C. Baez, *Category Theory Course*, Notatki dostępne w internecie: http://math.ucr.edu/home/baez/qg-winter2016/CategoryTheoryNotes.pdf.

[4] J. C. Baez, M. Stay *Physics, Topology, Logic and Computation: A Rosetta Stone*. Notatki dostępne pod: http://math.ucr.edu/home/baez/rosetta.pdf.

[5] M. Barr, C. Wells, *Toposes, Triples and Theories*, Wydanie dostępne w internecie: http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/12/tr12abs.html.

[6] T. Leinster, *Basic Category Theory*, Wydanie dostępne w internecie: https://arxiv.org/pdf/1612.09375.pdf.

[7] S. Maclane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, 1978.

[8] S. MacLane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, Springer, 2012.

[9] J. P. May, *A Concise Course in Algebraic Topology*, Notatki dostępne pod: https://www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf.

[10] nLab, https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage

[11] R. Vakil, *The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry*. Notatki dostępne pod: http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/index.html.