Teoria kategorii
dla początkujących

Paweł Czyż

9 lipca 2019

Streszczenie

Pewne pojęcia, jak zbiór czy grupa, należą do kanonu matematyki – matematycy korzystają z nich na tyle często, że każdy kiedyś musiał się z nimi spotkać.

Tak samo często matematycy korzystają z pojęć teorii kategorii, choć nie wszyscy o tym wiedzą. W tym tekście próbuję przybliżyć podstawy teorii kategorii, tak by zarówno zwiększyć popularność „kategoryjnego" myślenia jak i zachęcić do dalszych studiów tej dziedziny.

Zakładam trochę obycia z podstawową teorią mnogości i styczność teorią grup, algebrą liniową lub topologią ogólną. Materiał wychodzący poza te oznaczenia oznaczyłem gwiazdką $\star$.

1 Czym są kategorie?

1 Uwaga. Zbiory intuicyjnie rozumiane są jako pewne kolekcje, czyli woreczki, które mogą zawierać różne przedmioty. Taka intuicja czasami jednak prowadzi na manowce – nie istnieje zbiór wszystkich zbiorów. Tymczasem zwrot „kolekcja wszystkich zbiorów" jest intuicyjnie zrozumiały – mimo, że nie może być zbiorem!

Bardzo niefrasobliwie, nie będziemy przejmować się aksjomatyką „kolekcji". Nasze notatki nie będą więc ścisłe w sensie teoriomnogościowym. Nie będziemy się tym przejmować – szczegółów można douczyć się później, na razie wystarczy zrozumieć ideę.

Czytelnik bardzo zainteresowany teorią mnogości, może zainteresować się *uniwersami Grothendiecka* lub teoriami *klas*, jak aksjomatyka NBG. Można też przyjąć, że język teorii kategorii jest „prawdziwy” i w nim zbudować teorię zbiorów [7].

2 Pomysł. Zbiór to kolekcja elementów. *Kategoria* to kolekcja obiektów i strzałek, które łączą różne obiekty – na przykład kolekcja wszystkich zbiorów połączona funkcjami, czy kolekcja wszystkich grup połączona homomorfizmami.

Innymi słowy, zamiast odpowiadać na teoriomnogościowe pytanie o pojedynczy przedmiot: „jakie elementy ma ten zbiór?” kładziemy nacisk na całościowe spojrzenie: „w jaki sposób ten obiekt oddziałuje z innymi?”.

3 Definicja. Będziemy nazywać $\mathcal{C}$ *kategorią* jeśli:

1. Mamy pewną kolekcję *obiektów* $A, B, C, \dots$ Będziemy oznaczać tę kolekcję przez $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$,
2. Mamy pewną kolekcję *strzałek* $f, g, h \dots$ Strzałki będziemy nazywać też *morfizmami*,
3. Każda strzałka f łączy dokładnie dwa określone obiekty – *dziedzinę* z *przeciwdziedziną*. Ten fakt oznaczamy przez $f\colon A \to B$ lub $A \xrightarrow{f} B$,
4. Strzałki można *składać* w następujący sposób:
   (a) Jeśli $A \xrightarrow{f} B$ oraz $B \xrightarrow{g} C$, to istnieje strzałka $A \xrightarrow{g \circ f} C$. Będziemy czasami pisać gf zamiast $g \circ f$,
   (b) Jeśli $A \xrightarrow{f} B$, $B \xrightarrow{g} C$ oraz $C \xrightarrow{h} D$, to zachodzi $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ (złożenie jest *łączne*),
   (c) Dla każdego obiektu A istnieje strzałka $\mathrm{id}_A\colon A \to A$ taka, że dla każdej $f\colon A \to B$ zachodzi $\mathrm{id}_B \circ f = f = f \circ \mathrm{id}_A$ (istnieją *morfizmy identycznościowe*).

4 Przykład. Kategorią **Set** nazywamy kolekcję wszystkich zbiorów, w której strzałka $A \xrightarrow{f} B$ to trójka (A, f, B), gdzie f jest funkcją ze zbioru A w zbiór B. Złożenie strzałek określamy przez złożenie funkcji, a strzałki identycznościowe otrzymujemy z funkcji identycznościowych.

Pojawia się pytanie – dlaczego definiujemy strzałkę jako *trójkę* zamiast po prostu funkcję? Teoriomnogościowo funkcje $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oraz $f'\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

zadane wzorem $x \mapsto 1$ są tym samym – zbiorem $\mathbb{R} \times \{1\}$. W teorii kategorii jednak chcemy rozróżniać f i f', bo łączą różne zbiory. Dlatego ręcznie dodajemy informację o dziedzinie i przeciwdziedzinie.

Jako, że ręczne dodanie informacji jest proste, to popularnie (i nie do końca ściśle) mówi się, że **Set** to kategoria w której obiektami są zbiory, a morfizmami są funkcje.

5 Przykład (Inne „standardowe" kategorie)**.** Podobnie jak w powyższym przykładzie, mamy kategorie (uwaga – tak teoriomnogościowo to morfizmami są trójki, a nie funkcje):

1. **Grp** – obiektami są grupy, a morfizmami homomomorfizmy grup (składanie homomomorfizmów jest łączne, identycznościami są homomomorfizmy identycznościowe),
2. **Top** – obiektami są przestrzenie topologiczne, a morfizmami są funkcje ciągłe,
3. k-**Vect** – obiektami są przestrzenie wektorowe nad ciałem k, a morfizmami są funkcje liniowe,
4. k-**FinVect** – obiektami są przestrzenie wektorowe skończonego wymiaru nad ciałem k, a morfizmami są funkcje liniowe.

Podobnych przykładów można wymieniać bez liku (monoidy, pierścienie, moduły nad ustalonym pierścieniem, rozmaitości różniczkowe...) – często obiekty to po prostu zbiory wyposażone w dodatkową strukturę, a morfizmami są funkcje zachowujące tę strukturę. Należy jednak pamiętać, że *kategorie obejmują także inne przykłady.*

6 Przykład. Rozważmy kategorię, której obiektami są grupy, a morfizmami funkcje, niezależnie czy są homomorfizmami czy nie. To też jest kategoria, choć niezbyt użyteczna – we wszystkich powyższych, popularnych kategoriach morfizmy w pewien sposób zachowują zadaną stukturę (jak działanie grupowe czy topologia).

7 Przykład. Każdą kolekcję (w tym każdy zbiór) można traktować jak kategorię - obiektami są elementy kolekcji oraz wprowadzamy wyłącznie morfizmy identycznościowe. Często się rysuje taką kategorię jako:

$$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \ldots$$

Obiekty są symbolizowane przez kropki i nie ma żadnych morfizmów poza identycznościowymi (pominiętymi na rysunku). Taką kategorię nazywamy *dyskretną*.

8 Przykład. Kategorią $\mathbf{2}$ nazywamy kategorię, która ma dwa obiekty i jeden morfizm nieidentycznościowy. Rysujemy ją jako:

$$\bullet \rightarrow \bullet$$

Ponownie pominęliśmy na obrazku morfizmy identycznościowe.

9 Notacja. $\mathrm{Hom}(A, B)$ to kolekcja wszystkich strzałek $A \xrightarrow{f} B$. W literaturze popularne są także oznaczenia[1] $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ lub $\mathrm{Mor}(A, B)$.

10 Definicja. Kategorię nazywamy *małą* jeśli kolekcje strzałek i obiektów są zbiorami. Nazywamy ją *lokalnie małą* jeśli wszystkie kolekcje $\mathrm{Hom}(A, B)$ są zbiorami.

11 Ćwiczenie. Zastanów się:

1. Czy możliwe jest aby kolekcja strzałek nie była zbiorem, a kolekcja obiektów już tak?

2. Czy możliwe jest aby kolekcja obiektów nie była zbiorem, a kolekcja strzałek już tak? Czyli – czy obiektów może być „więcej" niż strzałek?

3. Dlaczego każda kategoria mała jest też lokalnie mała, ale nie na odwrót?

12 Ćwiczenie (Kategoria $\mathbf{Set}_*$)**.** *Zbiorem z wyróżnionym punktem* nazywamy parę (X, x_0), gdzie $x_0 \in X$. Morfizmem $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ nazywamy funkcję $f\colon X \to Y$ taką, że $f(x_0) = y_0$. Przekonaj się, że jest to kategoria. (Czym jest złożenie morfizmów? Czy jest łączne? Czym są morfizmy identycznościowe?)

1.1 Zbiór częściowo uporządkowany jako kategoria

13 Pomysł. Każdy zbiór w naturalny sposób jest kategorią dyskretną – morfizmami są wyłącznie identyczności. Nieco ciekawszą strukturę, z większą ilością strzałek, możemy uzyskać ze zbioru częściowo uporządkowanego.

[1]Dlaczego Hom, a nie Mor? Zapewne dlatego, że np. w teorii grup czy pierścieni, na strzałki mówi się *homomorfizmy*.

Takie kategorie zarówno stanowią bogate źródło kontrprzykładów jak i przydają się do zdefiniowania bardziej zaawansowanych konstrukcji, jak granica odwrotna czy źdźbło presnopa.

14 Przykład. Rozważmy zbiór dodatnich liczb całkowitych $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, \dots\}$. Definiujemy zbiory:

$$\mathrm{Hom}(k, m) = \begin{cases} \{\iota_k^m\} & \text{jeśli } k \text{ jest dzielnikiem } m \\ \varnothing & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

gdzie przyjęliśmy zapis $\iota_k^m = (k, m)$. Definiujemy złożenie jako $\iota_m^n \circ \iota_k^m = \iota_k^n$. Sprawdźmy czy wszystkie własności są spełnione:

1. *Złożenie jest określone.* Weźmy dowolny element $\mathrm{Hom}(k, m)$ (dużego wyboru nie mamy – ι_k^m) oraz dowolny element $\mathrm{Hom}(m, n)$ (czyli ι_m^n). Chcemy pokazać, że złożenie $\iota_m^n \circ \iota_k^m = \iota_k^n$ jest dobrze określone, to znaczy, że $\iota_k^n \in \mathrm{Hom}(k, n)$. Czytamy to jako: „jeśli k dzieli m oraz m dzieli n, to k dzieli n".

2. *Istnieją funkcje identycznościowe.* $\mathrm{id}_n = \iota_n^n$ jest dobrze określone bo n dzieli n. Chcemy pokazać, że mnożenie przez identyczność niczego nie zmienia, to znaczy:
$$\iota_k^m \circ \iota_k^k = \iota_k^m = \iota_m^m \circ \iota_k^m$$
Co jest oczywiste z naszej definicji złożenia.

3. *Złożenie jest łączne.*
$$(\iota_m^n \circ \iota_l^m) \circ \iota_k^l = \iota_l^n \circ \iota_k^l = \iota_k^n = \iota_m^n \circ \iota_k^m = \iota_m^n \circ (\iota_l^m \circ \iota_k^l)$$

15 Ćwiczenie. Przypomnijmy, że zbiór częściowo uporządkowany $(S, \leqslant)$ ma następujące własności dla dowolnych $a, b, c \in S$:

1. $a \leqslant a$,

2. Jeśli $a \leqslant b$ oraz $b \leqslant a$, to $b = a$,

3. Jeśli $a \leqslant b$ oraz $b \leqslant c$, to $a \leqslant c$.

Posiłkując się przykładem 14 pokaż, że *każdy zbiór częściowo uporządkowany jest kategorią* jeśli wprowadzimy strzałki $a \to b$ dla $a \leqslant b$.

16 Przykład. Kategoria **2** z przykładu 8 jest szczególnym przypadkiem zbioru częściowo uporządkowanego.

17 Przykład. Liczby naturalne ze standardowym porządkiem są kategorią:

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r] \arrow[rr, bend left] \arrow[rrr, bend left] & 2 \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & 3 \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

Tradycyjnie na obrazku brakuje morfizmów identycznościowych (które wyglądają jak pętelki).

1.2 Diagramy przemienne

18 Definicja (Intuicyjna definicja diagramu)**.** *Diagram* to multigraf, którego wierzchołkami są obiekty, a krawędziami morfizmy.

Mówimy, że diagram jest *przemienny* jeśli mając dowolne dwa wierzchołki A i B oraz dwie dowolne ścieżki (niekoniecznie tej samej długości):

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[r, "f_2"] & X_2 \arrow[r, "f_3"] & \dots \arrow[r, "f_n"] & X_n \arrow[dr, "f_{n+1}"] & \\
A \arrow[ur, "f_1"] \arrow[dr, "g_1"'] & & & & & B \\
 & Y_1 \arrow[r, "g_2"] & Y_2 \arrow[r, "g_3"] & \dots \arrow[r, "g_m"] & Y_m \arrow[ur, "g_{m+1}"'] &
\end{tikzcd}$$

zachodzi równość $f_{n+1} \circ \dots \circ f_1 = g_{m+1} \circ \dots \circ g_1$.

Innymi słowy – gdy ustalimy początek i koniec, to nieważne jaką ścieżką pójdziemy, a wypadkowy morfizm będzie taki sam.

19 Przykład. Ten diagram jest przemienny wtedy i tylko wtedy gdy $g \circ f = i \circ h$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "i"] & D \end{tikzcd}$$

20 Ćwiczenie. Jaki aksjomat kategorii wyraża przemienność tego diagramu?

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right] & C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

21 Notacja. Będziemy korzystać z przerywanej strzałki $\bullet \dashrightarrow \bullet$ postulując istnienie danego morfizmu.

22 Przykład. Diagram przemienny

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, dotted] \arrow[d, "f"'] & C \\ B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

postuluje istnienie strzałki $g \circ f$.

23 Notacja. Mówiąc, że *istnieje dokładnie jedna* strzałka, która sprawia, że diagram jest przemienny, będziemy używać wykrzyknika $\bullet \overset{!}{\dashrightarrow} \bullet$.

24 Ćwiczenie (**Set**$_*$ dla bystrzaków)**.** Aby nabrać więcej praktyki z diagramami przemiennymi, obejrzymy kategorię zbiorów z wyróżnionym punktem raz jeszcze, ale z nieco innego punktu widzenia.

Wybierzmy dowolny jednopunktowy zbiór i oznaczmy go przez $\{\bullet\}$. Jeśli X jest niepustym zbiorem, to funkcja $x\colon \{\bullet\} \to X$ wyznacza nam parę (X, x_0), gdzie $x_0 = x(\bullet)$. Innymi słowy obiektami są *funkcje* ze zbioru $\{\bullet\}$ w dowolne zbiory.

Czym może być morfizm między funkcjami? Rozważmy $x\colon \{\bullet\} \to X$ oraz $y\colon \{\bullet\} \to Y$. Morfizmem $x \xrightarrow{f} y$ nazywamy *diagram przemienny*:

$$\begin{tikzcd} & \{\bullet\} \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \end{tikzcd}$$

Jego przemienność oznacza $f(x_0) = (f \circ x)(\bullet) = y(\bullet) = y_0$. Alternatywnie, możemy myśleć o tym diagramie jak o funkcji $f\colon X \to Y$ takiej, że $f(x_0) = y_0$.

Zastanówmy się czym jest złożenie diagramów. Mając diagramy

$$\begin{tikzcd} & \{\bullet\} \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "y"] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \{\bullet\} \arrow[dl, "y"'] \arrow[dr, "z"] & \\ Y \arrow[rr, "g"] & & Z \end{tikzcd}$$

określamy ich złożenie jako sklejenie wzdłuż wspólnej krawędzi:

$$\begin{tikzcd} & \{\bullet\} \arrow[dl, "x"'] \arrow[d, "y"] \arrow[dr, "z"] & \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \{\bullet\} \arrow[dl, "x"'] \arrow[dr, "z"] & \\ X \arrow[rr, "g \circ f"] & & Z \end{tikzcd}$$

W ramach ćwiczenia:

1. Upewnij się, że $(g \circ f)(x_0) = z_0$.
2. Narysuj diagram przedstawiający morfizm identycznościowy id_x. Czy identyczności „dobrze” się składają?
3. Pokaż, że składanie diagramów jest łączne.

2 Proste konstrukcje uniwersalne

2.1 Izomorfizmy

25 Pomysł. W teorii mnogości zbiory są równe gdy mają równe elementy. Tymczasem, teoria kategorii kładzie nacisk na obiekty i morfizmy między nimi – często będziemy uznawali za „równe” obiekty, które po prostu „zachowują się tak samo”.

26 Przykład. Ile jest grup dwuelementowych? Nieskończenie wiele:

- $\{0, 1\}$ z dodawaniem modulo 2,
- $\{-1, 1\}$ z mnożeniem,
- $\{\square, \blacksquare\}$ z operacją $\square \times \square = \blacksquare \times \blacksquare = \square$ i $\square \times \blacksquare = \blacksquare \times \square = \blacksquare$,
- ...

„Inność” bierze się wyłącznie z użycia innych elementów – mając ciekawe twierdzenie[2] o dowolnej z tych grup, bez problemu da się je przetłumaczyć na twierdzenie o dowolnej innej. Stąd właśnie pomysł na przymykanie oka na różnice między izomorficznymi obiektami.

27 Definicja. Morfizm $f\colon A \to B$ nazywamy *izomorfizmem* jeśli istnieje $g\colon B \to A$ takie, że $g \circ f = \mathrm{id}_A$ oraz $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

28 Przykład. Izomorfizmami w **Set** są bijekcje. W **Grp** są to bijektywne homomomorfizmy grup. W k**-Vect** – bijektywne przekształcenia liniowe. W **Top** – homeomorfizmy[3].

29 Ćwiczenie. Pokaż, że g występujące w definicji 27 jest unikatowe. Motywuje to pojęcie *morfizmu odwrotnego do izomorfizmu* f i oznaczanego przez f^{-1}.

30 Ćwiczenie. Pokaż, że w zbiorze częściowo uporządkowanym jedynymi izomorfizmami są identyczności.

31 Przykład. Niech G będzie grupą. Możemy stworzyć kategorię o jednym obiekcie $\bullet$, której morfizmami są elementy grupy $g, h, \dots$ traktowane jak strzałki $\bullet \xrightarrow{g} \bullet, \bullet \xrightarrow{h} \bullet, \dots$ – w tej kategorii każdy morfizm jest izomorfizmem.

32 Ćwiczenie. Pokaż, że:

1. id_A jest izomorfizmem dla dowolnego obiektu A,
2. Jeśli $f\colon A \to B$ jest izomorfizmem, to $f^{-1}\colon B \to A$ też jest izomorfizmem,
3. Jeśli $f\colon A \to B$ oraz $g\colon B \to C$ są izomorfizmami, to $g \circ f$ też jest izomorfizmem.

33 Definicja. Jeśli istnieje izomorfizm z A do B, to będziemy mówili, że *A i B są izomorficzne* i pisali $A \simeq B$ lub rysowali na diagramie $A \xrightarrow{\simeq} B$.

[2] Tutaj pojawia się pytanie co oznacza „ciekawe twierdzenie”. Umówmy się, że twierdzenia „grupa składa się wyłącznie z czworokątów” (prawdziwe dla $\{\square, \blacksquare\}$ i fałszywe dla $\{0, 1\}$) nie uznajemy za ciekawe.

W zasadzie to „ciekawe” będzie dla nas synonimem „mając zadany izomorfizm, można je przetłumaczyć na twierdzenie o tym izomorficznym obiekcie”.

[3] Przypomnienie – ciągła bijekcja nie musi być homeomorfizmem. Warto pamiętać o prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$ wyposażonej w topologię zwykłą i dyskretną i funkcji identycznościowej.

34 Uwaga. Nietrudno zauważyć, że „bycie obiektem izomorficznym” to relacja równoważności[4]. W teorii kategorii często przymykamy oko na różnice między izomorficznymi obiektami – *jeśli mamy zadany izomorfizm*, to zachowują się tak samo. (Oczywiście jeśli mamy więcej niż jeden izomorfizm, pojawia się problem, który z nich należy wybrać).

35 Ćwiczenie („Zachowują się tak samo”)**.** Dla ścisłości teoriomnogościowej, pracujemy w kategorii lokalnie małej – wszystkie $\mathrm{Hom}(A, B)$ są zbiorami.

Załóżmy, że mamy zadany izomorfizm $f\colon A \to A'$. Wykaż, że:

1. Dla dowolnego B, mamy bijekcję $f^*\colon \mathrm{Hom}(A', B) \to \mathrm{Hom}(A, B)$ zadaną wzorem $f^*(\psi) = \psi \circ f$ (co jest jej odwrotnością?),

2. Ponadto jeśli diagram:

$$\begin{tikzcd} & A' \arrow[dl, bend right, "\varphi"'] \arrow[d, "\psi"] \\ B \arrow[r, "k"'] & C \end{tikzcd}$$

   jest przemienny, to diagram:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi\circ f"'] \arrow[dr, bend left, "\psi\circ f"] & A' \arrow[dl, bend right, "\varphi"'] \arrow[d, "\psi"] \\ B \arrow[r, "k"'] & C \end{tikzcd}$$

   też jest przemienny.

Innymi słowy mamy bijekcję między morfizmami zaczynającymi się w A oraz zaczynającymi się w A'. Podobnie definiując $f_*\colon \mathrm{Hom}(B, A) \to \mathrm{Hom}(B, A')$ przez $f_*(\psi) = f \circ \psi$ mamy bijekcję między morfizmami o końcu w A oraz morfizmami o końcu w A'.

36 Uwaga. Całkiem naturalne jest by nasze konstrukcje nie rozróżniały między izomorficznymi obiektami. Dobrą intuicją może być tutaj topologia

[4]Będąc bardziej formalnym – klasy abstrakcji izomorficznych obiektów mogą być kolekcjami, a nie zbiorami. Formalnie więc *nie* jest to relacja równoważności, podobnie jak „relacja równoliczności zbiorów”.

– definiujemy niezmienniki topologiczne (np. spójność, zwartość) tak, że są takie same dla homeomorficznych przestrzeni. Podobnie, jeśli $G \simeq G'$ oraz $H \simeq H'$ są grupami (lub przestrzeniami topologicznymi), to $G \times H \simeq G' \times H'$ – nie jest to przypadek i zazwyczaj widząc taką zależność należy się spodziewać konstrukcji kategoryjnej.

2.2 Obiekt początkowy i końcowy

37 Definicja. Obiekt P nazywamy *początkowym* jeśli dla każdego obiektu A *istnieje dokładnie jeden* morfizm $P \to A$. Obiekt początkowy wygląda na diagramie jak:

$$P \overset{!}{\dashrightarrow} A$$

38 Przykład. W **Set** obiektem początkowym jest tylko zbiór pusty $\varnothing$. Z kolei w **Grp** obiektem początkowym jest każda grupa trywialna (z jednym elementem) – czyli jest ich bardzo dużo. Wszystkie jednak są izomorficzne. Podobnie w kategorii k-**Vect**, obiektem początkowym jest dowolna przestrzeń trywialna.

39 Ćwiczenie. Znajdź kategorię, w której *nie istnieje* obiekt początkowy.

40 Ćwiczenie. Obiekty początkowe zazwyczaj nie są unikatowe w sensie teoriomnogościowym. Na szczęście są „prawie unikatowe". Wykaż, że:

1. Jeśli P i P' są obiektami początkowymi, to *istnieje dokładnie jeden izomorfizm* $P \to P'$,

2. Jeśli P jest obiektem początkowym i $A \simeq P$, to A też jest obiektem początkowym.

41 Uwaga. Zazwyczaj jeśli $A \simeq B$, to istnieje całkiem dużo izomorfizmów $A \to B$ (ile istnieje bijekcji między dwoma zbiorami pięcioelementowymi?!), których można użyć do utożsamienia A z B. Widzimy jednak, że mając dwa obiekty początkowe, izomorfizm między nimi jest *tylko jeden.*

Jeśli masz własny ulubiony obiekt początkowy i jakieś twierdzenie o nim, oraz ja mam swój ulubiony obiekt początkowy, to nie musimy się dogadać którego izomorfizmu użyć do przeniesienia rezultatu Twojego twierdzenia na mój obiekt.

42 Definicja. Odwróćmy teraz kierunek strzałki – obiekt K nazywamy *końcowym* jeśli dla każdego obiektu A *istnieje dokładnie jeden* morfizm $A \to K$. Zapisując obrazkiem:

$$A \overset{!}{\dashrightarrow} K$$

43 Przykład. W **Set** obiektem końcowym jest dowolny singleton $\{\bullet\}$. W **Grp** obiektem końcowym jest każda grupa trywialna. W k-**Vect** obiektem końcowym jest każda trywialna przestrzeń wektorowa.

44 Ćwiczenie. Wykaż twierdzenie:

1. Jeśli K i K' są obiektami końcowymi to istnieje dokładnie jeden izomorfizm $K \to K'$,

2. Jeśli $A \simeq K$, to A też jest obiektem końcowym.

2.3 Kategoria dualna

45 Definicja. *Kategorią dualną* $\mathcal{C}^{op}$ nazywamy kategorię z tymi samymi obiektami i odwróconymi strzałkami – czyli $\operatorname{Ob}\mathcal{C} = \operatorname{Ob}\mathcal{C}^{op}$ oraz jeśli mamy $A \xrightarrow{f} B$ w $\mathcal{C}$, to definiujemy strzałkę $B \xrightarrow{f} A$ w $\mathcal{C}^{op}$.

46 Przykład. Obiekt P jest początkowy w $\mathcal{C}$ wtedy i tylko wtedy gdy jest końcowy w $\mathcal{C}^{op}$. Mówimy, że obiekty końcowe i początkowe są *pojęciami dualnymi*.

47 Definicja. Rozważmy dowolną konstrukcję wyrażoną przy pomocy diagramów. Odwracając wszystkie strzałki otrzymujemy konstrukcję *dualną*. Często dodaje się przedrostek „ko-" do konstrukcji dualnej.

48 Żart. Obiekt początkowy zwany jest też „ńcowym".

49 Ćwiczenie. Uzasadnij dlaczego izomorfizm jest pojęciem dualnym sam do siebie – pokaż, że jeśli f jest izomorfizmem w $\mathcal{C}$, to jest też w $\mathcal{C}^{op}$.

2.4 Produkt

50 Definicja. *Produktem* obiektów A i B nazywamy obiekt P i morfizmy $P \xrightarrow{\pi_A} A$ oraz $P \xrightarrow{\pi_B} B$ takie, że jeśli X jest dowolnym obiektem[5] oraz

[5]Możemy o tym myśleć jak o konkurencie do miana produktu.

$X \xrightarrow{f_A} A$ i $X \xrightarrow{f_B} B$, to *istnieje dokładnie jeden* morfizm $f\colon X \to P$ taki, że $f_A = \pi_A \circ f$ oraz $f_B = \pi_B \circ f$. Jest to przedstawione na poniższym diagramie:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, bend right, "f_A"'] \arrow[dr, bend left, "f_B"] \arrow[d, dotted, "!f"] & \\
A & P \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B
\end{tikzcd}$$

Często będziemy oznaczać obiekt produktu P przez $A \times B$.

51 Przykład. Czym są produkty w **Set**? Twierdzę, że jednym[6] z dobrych produktów A i B jest

$$(A \times B, A \times B \xrightarrow{\pi_A} A, A \times B \xrightarrow{\pi_B} B)$$

czyli iloczyn kartezjański wraz z rzutami $\pi_A\colon (a, b) \mapsto a$ i $\pi_B\colon (a, b) \mapsto b$.

Rozważmy konkurenta do miana produktu – dowolny zbiór X i funkcje $f_A\colon X \to A$ i $f_B\colon X \to B$. Zdefiniujmy:

$$f\colon X \to A \times B,\ x \mapsto (f_A(x), f_B(x))$$

Wówczas:

$$f_A(x) = \pi_A(f_A(x), f_B(x)) = \pi_A(f(x)) = \pi_A \circ f(x),$$

czyli $f_A = \pi_A \circ f$ i analogicznie $f_B = \pi_B \circ f$.

Pozostaje wykazać unikatowość f – weźmy dowolną funkcję $g\colon X \to A \times B$ taką, że $f_A = \pi_A \circ g$ oraz $f_B = \pi_B \circ g$. Rozpatrzmy dowolne x i oznaczmy $g(x) = (y, z)$. Wówczas $y = (\pi_A \circ g)(x) = f_A(x)$ i analogicznie $z = f_B(x)$. Czyli $g = f$.

52 Uwaga. Zupełnie dobrymi produktami zbiorów A i B są też:

1. $B \times A$ z morfizmami $B \times A \ni (b, a) \mapsto a \in A$ i analogicznym $(b, a) \mapsto b$,
2. $A \times B \times \{1\}$ z morfizmami $(a, b, 1) \mapsto a$ i $(a, b, 1) \mapsto b$,
3. Dowolny zbiór izomorficzny (bijektywny) z $A \times B$ gdy wyposaży się go w odpowiednie morfizmy.

[6] Być może jest ich więcej, podobnie jak obiektów końcowych... Ciekawe czy wszystkie okażą się izomorficzne?

53 Twierdzenie. Rozpatrzmy obiekty A i B i przypuśćmy, że istnieje produkt (P, π_A, π_B). Wówczas:

1. Jeśli (T, p_A, p_B) jest produktem, to *istnieje unikatowy izomorfizm* $i\colon T \to P$ taki, że $p_A = \pi_A \circ i$ oraz $p_B = \pi_B \circ i$,
2. Jeśli mamy izomorfizm $f : Q \xrightarrow{\simeq} P$ to $(Q, \pi_A \circ f, \pi_B \circ f)$ też jest produktem,
3. Jeśli $A' \simeq A$ oraz $B' \simeq B$, to produkty $A' \times B'$ i $A \times B$ są izomorficzne.

54 Dowód. Druga i trzecia część są proste (szczególnie jeśli zrobiło się ćwiczenie 35), więc pokażemy tylko dowód pierwszej części:

1. Weźmy produkt (P, π_A, π_B) i jego konkurenta (T, p_A, p_B). Mamy unikatowy morfizm $i\colon T \to P$ taki, że $p_A = \pi_A \circ i$ oraz $p_B = \pi_B \circ i$,

$$\begin{tikzcd}
& T \arrow[ld, bend right, "p_A"'] \arrow[rd, bend left, "p_B"] \arrow[d, dotted, "!i"] & \\
A & P \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B
\end{tikzcd}$$

2. Teraz (T, p_A, p_B) potraktujemy jako produkt, a (P, π_A, π_B) jako jego konkurenta. Mamy unikatowy morfizm $j\colon P \to T$ taki, że $\pi_A = p_A \circ j$ oraz $\pi_B = p_B \circ j$,

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[ld, bend right, "\pi_A"'] \arrow[rd, bend left, "\pi_B"] \arrow[d, dotted, "!j"] & \\
A & T \arrow[l, "p_A"'] \arrow[r, "p_B"] & B
\end{tikzcd}$$

3. Teraz weźmy (P, π_A, π_B) zarówno jako produkt i konkurenta. Istnieje unikatowy morfizm $m\colon P \to P$ taki, że $\pi_A = \pi_A \circ m$ oraz $\pi_B = \pi_B \circ m$.

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[ld, bend right, "\pi_A"'] \arrow[rd, bend left, "\pi_B"] \arrow[d, dotted, "!m"] & \\
A & P \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] & B
\end{tikzcd}$$

4. Nietrudno zauważyć, że za m możemy wstawić id_P,

5. Popatrzmy na morfizm $i \circ j$. Mamy $\pi_A \circ i \circ j = p_A \circ j = \pi_A$ i analogicznie $\pi_B \circ i \circ j = \pi_B$. Czyli za m możemy wstawić $i \circ j$,

6. Wiemy, że m jest unikatowe! Czyli $i \circ j = \mathrm{id}_P$. Analogicznie dowodzimy $j \circ i = \mathrm{id}_T$, czyli i jest izomorfizmem. A skoro jest unikatową strzałką taką, że $p_A = \pi_A \circ i$ oraz $p_B = \pi_B \circ i$, to i jest też unikatowym izomorfizmem o zadanej własności.

55 Ćwiczenie. Udowodnij drugą i trzecią część twierdzenia 53.

56 Ćwiczenie. Czym jest produkt dwóch grup? A przestrzeni topologicznych?

57 Ćwiczenie. Podaj przykład pokazujący, że produkt nie zawsze istnieje.

58 Ćwiczenie (Pozornie inna definicja produktu)**.** Rozpatrzmy obiekty A i B kategorii $\mathcal{C}$. Definiujemy kategorię „obiektów produktopodobnych" $\mathrm{Prod}(A, B)$ w następujący sposób:

1. obiektami są trójki (X, f, g) gdzie X jest obiektem $\mathcal{C}$, a $X \xrightarrow{f} A$ i $X \xrightarrow{g} B$ są morfizmami $\mathcal{C}$,

2. morfizmem między obiektami (X, f, g) oraz (Y, p, q) będziemy nazywać morfizm $X \xrightarrow{m} Y$ taki, że $f = p \circ m$ oraz $g = q \circ m$.

W ramach zadania:

1. Po pierwsze upewnij się, że to jest kategoria – czym jest składanie morfizmów? Czym są morfizmy identycznościowe? Warto narysować diagram.

2. Pokaż, że produkt $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ jest obiektem końcowym w $\mathrm{Prod}(A, B)$.

Innymi słowy *produkty to obiekty końcowe* (pewnego rodzaju).

59 Ćwiczenie. Zdefiniuj produkt dowolnej rodziny obiektów $(A_i)_{i \in I}$.

60 Ćwiczenie. W tym ćwiczeniu zajmiemy się zbiorami częściowo uporządkowanymi:

1. Pokaż, że w $\mathbb{Z}^+$ uporządkowanym przez podzielność (przykład 14) produktem liczb n i m jest $\mathrm{nwd}(n, m)$.

2. Niech $\mathcal{P}(S)$ będzie zbiorem potęgowym S uporządkowanym przez inkluzję ($A \leqslant B$ wtedy i tylko wtedy gdy $A \subseteq B$). Pokaż, że produktem zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq S$ jest $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$.

61 Uwaga (O łączności)**.** Nie jest trudno wykazać (choć to dość żmudne), że jeśli $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ jest produktem A i B, a $((A \times B) \times C,\ p_{A\times B},\ p_C)$ jest produktem $A\times B$ i C, to obiekt $(A\times B)\times C$ wraz z morfizmami $\pi_A \circ p_{A\times B}$, $\pi_B \circ p_{A\times B}$, p_C jest produktem A, B i C. Ma to dwie istotne konsekwencje:

1. Jeśli wiemy, że w danej kategorii istnieje produkt każdych dwóch obiektów, to istnieje też produkt każdej ich skończonej liczby,

2. Chociaż często produkt nie jest łączny – w teorii mnogości $(A\times B)\times C \neq A \times (B \times C)$ – to istnieją izomorfizmy utożsamiające różne produkty – jak $((a, b), c) \mapsto (a, (b, c))$.

   Niektórzy wręcz piszą $A \times B \times C$ bez nawiasów, niejawnie korzystając z istnienia tych izomorfizmów. Ta doprowadzi nas do *izomorfizmów naturalnych* (pomysł 97), a ogólniej prowadzi do definicji *kategorii monoidalnej.*

2.5 Koprodukt

62 Definicja. *Koprodukt* jest pojęciem dualnym do produktu, to znaczy – weźmy obiekty A i B. Koproduktem nazywamy obiekt $A+B$ oraz morfizmy $\sigma_A \colon A \to A+B$ i $\sigma_B \colon B \to A+B$, takie, że jeśli $(K, A \xrightarrow{k_A} K, B \xrightarrow{k_B} K)$, to istnieje unikatowy morfizm $A + B \xrightarrow{k} K$ taki, że $k_A = k \circ \sigma_A$ i $k_B = k \circ \sigma_B$.

63 Ćwiczenie (Własności koproduktu)**.** Znając własności produktu i odwracając strzałki, dostajemy analogiczne własności koproduktu:

1. narysuj diagram definiujący koprodukt (wystarczy odwrócić strzałki w definicji produktu),

2. zauważ, że jeśli mamy dwa koprodukty $(A+B, \sigma_A, \sigma_B)$ oraz (K, k_A, k_B), to istnieje unikatowy izomorfizm $i \colon A + B \to K$ taki, że $k_A = i \circ \sigma_A$ oraz $k_B = i \circ \sigma_B$,

3. zinterpretuj koprodukt jako obiekt początkowy w jakiejś kategorii (pomocne może być ćwiczenie 58).

64 Przykład. Koproduktem dwóch zbiorów A i B (lub przestrzeni topologicznych) jest ich suma rozłączna $A \coprod B$, wraz z inkluzjami $A \hookrightarrow A \coprod B$, $B \hookrightarrow A \coprod B$.

65 Przykład. Koproduktem dwóch przestrzeni wektorowych (ogólniej – modułów, czyli także grup abelowych) jest ich suma prosta. Jako, że koprodukt i produkt w tym wypadku są tym samym, nazywamy je czasami *biproduktem*. Natomiast koprodukt nieskończonej rodziny przestrzeni wektorowych już nie jest tym samym co produkt.

66 Przykład. Koproduktem dwóch grup jest iloczyn wolny (ta konstrukcja nie jest podstawowa, mogła zostać pominięta na kursie algebry).

67 Ćwiczenie. Czym jest koprodukt w $\mathbb{Z}^+$ uporządkowanym przez podzielność? A w zbiorze potęgowym uporządkowanym przez inkluzję?

2.6 Ekwalizator

68 Definicja. Rozważmy równoległe strzałki $X \overset{f}{\underset{g}{\rightrightarrows}} Y$, to jest – dwie strzałki o wspólnej dziedzinie i przeciwdziedzinie (niekoniecznie $f = g$, więc ten diagram nie jest do końca przemienny...). *Ekwalizatorem* nazywamy obiekt E i morfizm $e\colon E \to X$ taki, że:

1. $f \circ e = g \circ e$,
2. jeśli Q i $q\colon E \to X$ spełniają warunek $f \circ q = g \circ q$, to istnieje unikatowy morfizm $k\colon Q \to E$ taki, że $q = e \circ k$.

Definicję tę przedstawia poniższy diagram prawie (nie wymagamy $f = g$) przemienny:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "e"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\
Q \arrow[u, dotted, "!k"] \arrow[ur, "q"] & &
\end{tikzcd}$$

69 Ćwiczenie. Zinterpretuj twierdzenie: „ekwalizator jest unikatowy z dokładnością do unikatowego izomorfizmu”.

70 Ćwiczenie (Ale dlaczego „ekwalizator”?)**.** Pokaż, że w **Set** ekwalizatorem $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ jest zbiór:

$$E = \{e \in X : f(x) = g(x)\}$$

wraz z inkluzją $E \hookrightarrow X$.

71 Ćwiczenie. Ustalmy, że pracujemy w kategorii k-**Vect**. Pokaż, że ekwalizatorem morfizmów $X \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$ jest jądro ich różnicy (to jest $\ker(f-g)$) wraz z inkluzją.

72 Uwaga ($\star$)**.** W k-**Vect** dowolna przestrzeń trywialna jest obiektem początkowym jak i końcowym. Nazwiemy ją obiektem „zerowym” i oznaczymy przez 0. Czyli dla dowolnych przestrzeni X i Y, istnieją morfizmy $X \to 0$ i $0 \to Y$. Składając je otrzymujemy „morfizm zerowy” $X \xrightarrow{0} Y$. W ten sposób możemy „kategoryjnie” zdefiniować jądro f jako ekwalizator $X \underset{0}{\overset{f}{\rightrightarrows}} Y$.

73 Ćwiczenie. Zdefiniuj obiekt dualny – koekwalizator. (Jest rzadziej spotykany – w **Set** odpowiada dzieleniu przeciwdziedziny przez pewną relację równoważności.)

74 Uwaga. Konstrukcje, które wykonywaliśmy nazywane są *konstrukcjami uniwersalnymi* – korzystając z diagramu zadajemy pewną własność i otrzymujemy obiekt (i morfizmy) odpowiadające obiektowi końcowemu (produkt, ekwalizator) pewnej kategorii lub początkowemu (koprodukt, koekwalizator). W przypadku obiektów końcowych konstrukcje takie nazywamy *granicami*, w przypadku początkowych – *kogranicami*. Granice i kogranice dają jednolite spojrzenie na wiele konstrukcji popularnych w algebrze czy geometrii.

3 Funktory

75 Pomysł. Tak jak morfizmy są odwzorowaniami między obiektami, tak *funktory* są *odwzorowaniami między kategoriami*. Pozwala to na przenoszenie twierdzeń i problemów z jednej kategorii do innej.

76 Definicja (Funktor kowariantny)**.** Niech $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ będą kategoriami. *Funktorem kowariantnym* $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ nazywamy przyporządkowanie o własnościach:

1. Dla każdego obiektu $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ mamy pewien $F(A) \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$,
2. Dla każdego morfizmu $A \xrightarrow{f} B$, mamy morfizm $F(A) \xrightarrow{F(f)} F(B)$.

Przy czym wymagamy aby:

1. $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ (złożenia są zachowywane),
2. $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ (identyczności są zachowywane).

77 Przykład (Funktor stały)**.** Niech $D \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$ będzie ustalonym obiektem. Definiujemy:

1. $S(A) = D$
2. $S(A \xrightarrow{f} B) = \mathrm{id}_D$

Sprawdźmy wszystkie własności:

1. Strzałka $f \colon A \to B$ przechodzi na strzałkę $\mathrm{id}_D \colon S(A) \to S(B)$,
2. Oczywiście $S(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_D = \mathrm{id}_{S(A)}$,
3. $S(g) \circ S(f) = \mathrm{id}_D \circ \mathrm{id}_D = \mathrm{id}_D = S(g \circ f)$.

Czyli jest to funktor.

78 Przykład (Funktor identycznościowy)**.** Funktor identycznościowy $\mathrm{id}_\mathcal{C} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ to następujące przekształcenie:

1. $\mathrm{id}_\mathcal{C}(A) = A$,
2. $\mathrm{id}_\mathcal{C}(A \xrightarrow{f} B) = A \xrightarrow{f} B$

Nietrudno zauważyć, że zachowuje złożenia i identyczności.

79 Ćwiczenie. Pokaż, że odwzorowanie „zapominalskie” $U \colon \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$, które:

1. Grupie G przyporządkowuje jej nośnik[7] $U(G)$,

[7] Nośnik to zbiór elementów – formalnie grupa G to pewien zbiór $U(G)$ i działanie $\circ$ o odpowiednich własnościach.

2. Homomomorfizmowi $G \to H$ przyporządkowuje siebie $U(f) = f$ (homomomorfizmy to przecież funkcje),

jest funktorem[8].

80 Ćwiczenie. Pokaż, że odwzorowanie $\mathcal{P} \colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ jest funktorem, gdzie:

- $\mathcal{P}(A) =$ zbiór potęgowy A,
- $\mathcal{P}(f) = \operatorname{Im} f = f(A) \subseteq B$, jeśli $f \colon A \to B$.

81 Przykład ($\star$ Iloczyn tensorowy)**.** Jeśli V jest ustaloną przestrzenią wektorową nad ciałem k, to odwzorowanie $W \mapsto W \otimes_k V$, $f \mapsto f \otimes \mathrm{id}_V$ jest funktorem $\bullet \otimes_k V \colon k\text{-}\mathbf{Vect} \to k\text{-}\mathbf{Vect}$.

82 Przykład ($\star$ Dla topologów algebraicznych)**.** W topologii algebraicznej bierzemy przestrzeń topologiczną X oraz punkt x_0 i przypisujemy tzw. grupę fundamentalną $\pi_1(X, x_0)$ w punkcie x_0. Funkcjom ciągłym przenoszącym wyróżniony punkt na inny wyróżniony punkt, mamy ponadto odpowiadający homomomorfizm grup fundamentalnych, zachowujący złożenia i identyczności. Czyli grupa fundamentalna to tak naprawdę funktor $\pi_1 \colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$ (z kategorii przestrzeni topologicznych z wyróżnionym punktem do kategorii grup).

83 Uwaga. Funktor *nie musi* „dobrze” przenosić konstrukcji uniwersalnych.

Rozważmy „zapominalski” funktor $U \colon k\text{-}\mathbf{Vect} \to \mathbf{Set}$ zamieniający przestrzenie wektorowe na ich nośniki (zbiory wektorów). Jeśli V i W są przestrzeniami wektorowymi, to nośnikiem ich koproduktu (sumy) jest iloczyn kartezjański: $U(V + W) = U(V) \times U(W)$, a koproduktem zbiorów $U(V)$ i $U(W)$ jest suma rozłączna $U(V) \coprod U(W)$, czyli coś zupełnie innego!

84 Ćwiczenie. Pokaż, że funktory zachowują izomorfizmy – jeśli $f \colon A \to B$ jest izomorfizmem, to $F(f) \colon F(A) \to F(B)$ też jest izomorfizmem.

85 Uwaga. Jeśli chcemy wykazać, że obiekty A i B nie są izomorficzne, wystarczy znaleźć funktor F taki, że $F(A)$ i $F(B)$ *nie* są izomorficzne. Grupa fundamentalna czy teorie homologii to właśnie sposoby rozróżniania obiektow topologicznych przez zamianę ich na obiekty algebraiczne.

[8]Aby być w pełni poprawnym, to należałoby „rozpakować” homomorfizm z trójki (G, f, H) i „zapakować” go w zbiory, ale nie przejmowałbym się tym szczegółem zanadto. Analogicznym szczegółem jest to, że piszemy G zamiast $(G, \circ)$, bo teoriomnogościowo grupa to zbiór *z działaniem*.

86 Definicja (Funktor kontrawariantny)**.** *Funktorem kontrawariantnym* $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ nazywamy funktor kowariantny $F\colon \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{D}$. Innymi słowy:

1. Dla każdego obiektu $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ mamy pewien $F(A) \in \operatorname{Ob}\mathcal{D}$,
2. Dla morfizmu $A \xrightarrow{f} B$, mamy morfizm $F(B) \xrightarrow{F(f)} F(A)$.

Przy czym wymagamy aby:

1. $F(g \circ f) = F(f) \circ F(g)$ (złożenia są odwracane),
2. $F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$ (identyczności są zachowywane).

87 Ćwiczenie ($\star$ Dla topologów)**.** Pokaż, że odwzorowanie $\mathcal{P}\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ jest funktorem kontrawariantnym, gdzie:

- $\mathcal{P}(A) =$ zbiór potęgowy A,
- $\mathcal{P}(f) = f^{-1}(A) \subseteq B$, jeśli $f\colon A \to B$.

88 Ćwiczenie (Hom-funktory)**.** Rozważmy kategorię $\mathcal{C}$ i obiekt $A \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$. Stwórzmy odwzorowanie $\operatorname{Hom}(A, \bullet)\colon \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ dane wzorem:

- $\operatorname{Hom}(A,\bullet)(B) = \operatorname{Hom}(A,B)$ (i tak też będziemy pisać — kropeczka ma symbolizować puste miejsce na argument),
- $\operatorname{Hom}(A, f) = f_*$, gdzie jeśli $f\colon B \to B'$, to $f_*\colon \operatorname{Hom}(A,B) \to \operatorname{Hom}(A,B')$ jest dane wzorem $f_*(\varphi) = f \circ \varphi$.

W ramach zadania:

1. Pokaż, że jest to funktor kowariantny,
2. Zdefiniuj *kontrawariantny* funktor $\operatorname{Hom}(\bullet, A)$. (Podpowiedź: już się z nim spotkaliśmy — możesz motywować się ćwiczeniem 35.)

Te funktory są szczególnie ważne w algebrze homologicznej oraz w ważnym rezultacie teorii kategorii – lemacie Yonedy.

4 Transformacje naturalne

89 Pomysł. Tak jak funktory to odwzorowania między kategoriami, tak *transformacje naturalne* są odwzorowaniami między funktorami. Innymi słowy mając zadane kategorie $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$:

1. Utworzymy[9] kolekcję funktorów kowariantnych $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$,

2. Mając dwa funktory z tej kolekcji („równoległe”) F i G określimy odwzorowanie między nimi.

90 Definicja. Rozważmy dwa „równoległe” funktory kowariantne $F, G\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$.

Transformacją naturalną z F do G nazywamy rodzinę morfizmów $\eta_X\colon F(X) \to G(X)$, gdzie $X \in \operatorname{Ob} \mathcal{C}$ taką, że dla każdego morfizmu $X \xrightarrow{f} Y$ w $\mathcal{C}$ następujący diagram kategorii $\mathcal{D}$ jest przemienny:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_X"] & F(Y) \arrow[d, "\eta_Y"] \\ G(X) \arrow[r, "G(f)"] & G(Y) \end{tikzcd}$$

Często piszemy $\eta\colon F \Rightarrow G$ oraz przedstawiamy to na obrazku jako:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right=50, "G"'{name=D}] & \mathcal{D} \arrow[from=U, to=D, phantom, "\Downarrow\eta"] \end{tikzcd}$$

91 Przykład. Dla każdego funktora F istnieje transformacja naturalna $\mathrm{id}_F\colon F \Rightarrow F$ o składowych $(\mathrm{id}_F)_X = \mathrm{id}_X$.

92 Uwaga. Możemy też rozpatrywać transformację naturalną między funktorami kontrawariantnymi – jako, że są one tym samym co funktory kowariantne z $\mathcal{C}^{op}$ do $\mathcal{D}$, to wystarczy odwrócić poziome strzałki na diagramie.

93 Notacja. Niech $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ będą kategoriami. Przez $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ będziemy rozumieć kolekcję funktorów kowariantnych z $\mathcal{C}$ do $\mathcal{D}$.

[9] Modulo problemy teoriomnogościowe – często wymaga się by dziedzina była mała.

94 Ćwiczenie (Składanie transformacji naturalnych)**.** Transformacje naturalne mają być morfizmami kategorii $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$, potrzebujemy więc określić ich złożenie.

Niech F, G, H będą funktorami kowariantnymi z $\mathcal{C}$ do $\mathcal{D}$ i niech $\eta\colon F \Rightarrow G$ i $\gamma\colon G \Rightarrow H$ będą transformacjami naturalnymi. Pokaż, że rodzina morfizmów $(\gamma \circ \eta)_X = \gamma_X \circ \eta_X$ jest transformacją naturalną $F \Rightarrow H$.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, bend left=50, "F"{name=F}] \arrow[r, "G"'{name=G}] \arrow[r, bend right=50, "H"'{name=H}] & \mathcal{D} \arrow[from=F, to=G, phantom, "\Downarrow \eta"] \arrow[from=G, to=H, phantom, "\Downarrow \gamma"] \end{tikzcd}$$

Innymi słowy – sprawdź przemienność poniższego diagramu. W razie problemów warto wrócić do ćwiczenia 24.

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\gamma_X \circ \eta_X"] & F(Y) \arrow[d, "\gamma_Y \circ \eta_Y"] \\ H(X) \arrow[r, "H(f)"] & H(Y) \end{tikzcd}$$

95 Ćwiczenie. Dokończ uzasadniać dlaczego $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ jest kategorią, to znaczy:

1. Pokaż łączność złożeń,
2. Pokaż istnienie morfizmów identycznościowych (przypomnij sobie przykład 91).

96 Uwaga. Rozważmy (jak zawsze ignorując problemy teoriomnogościowe) kategorię w której obiektami są kategorie, a morfizmami – funktory. Mamy też 2-morfizmy (transformacje naturalne), które są strzałkami między 1-morfizmami (funktorami). Otrzymaliśmy bogatszą strukturę, nazywaną *2-kategorią*.

Można też rozważać jeszcze bardziej rozbudowane twory, jak 3, 4 czy $\infty-$kategorie, czym zajmuje się *wyższa teoria kategorii*.

97 Pomysł. Zbiory $A \times B$ i $B \times A$ są „prawie takie same" – oczywiście są izomorficzne, co więcej izomorfizm między nimi jest „ładny": $(a, b) \mapsto (b, a)$. Podobnie „prawie takie same" są zbiory $(A \times B) \times C$ i $A \times (B \times C)$, to znaczy mamy wybrane „ładne" izomorfizmy $((a, b), c) \mapsto (a, (b, c))$.

W teorii kategorii umawiamy się na utożsamianie izomorficznych obiektów *mając zadany izomorfizm między nimi*. Naturalny izomorfizm okazuje się być rodziną izomorfizmów – regułą w jaki sposób należy utożsamiać różne przestrzenie. To znaczy zamiast zadawać jeden izomorfizm między dwoma obiektami, zadajemy naraz izomorfizmy na bardzo wielu parach obiektów!

98 Ćwiczenie (Naturalny izomorfizm)**.** Pokaż, że $\eta\colon F \Rightarrow G$ jest izomorfizmem w $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$ wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie morfizmy η_X są izomorfizmami w $\mathcal{D}$. W takim wypadku η nazywane jest *naturalnym izomorfizmem*.

99 Notacja. Jeśli $f\colon A \to A'$ oraz $g\colon B \to B'$ są funkcjami, to określamy funkcję $f \times g\colon A \times B \to A' \times B'$ daną wzorem $(a, b) \mapsto (f(a), g(b))$.

100 Ćwiczenie. Rozważmy kategorię $\mathbf{Set} \times \mathbf{Set}$, której obiektami są pary zbiorów (A, B) i morfizmami są pary strzałek $(A \xrightarrow{f} A', B \xrightarrow{g} B')$ oraz dwa równoległe funktory:

1. $P_1\colon \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, $P(A, B) = A \times B$, $P(f, g) = f \times g$,
2. $P_2\colon \mathbf{Set} \times \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, $P(A, B) = B \times A$, $P(f, g) = g \times f$.

Pokaż, że transformacja naturalna $\eta_{X,Y}\colon P_1 \Rightarrow P_2$ dana wzorem $\eta_{X,Y}\colon X \times Y \to Y \times X$, $(x, y) \mapsto (y, x)$ jest *naturalnym izomorfizmem*.

W taki właśnie sposób możemy utożsamiać $A \times B$ i $B \times A$, korzystając niejawnie z odpowiedniego izomorfizmu $\eta_{A,B}$. Podobnie też tworzymy rodzinę izomorfizmów $\alpha_{A,B,C}\colon A \times (B \times C) \to (A \times B) \times C$, która pozwala mówić, że iloczyn kartezjański jest „łączny” (choć w sensie teoriomnogościowym – nie jest).

4.1 ⋆Przestrzeń dwukrotnie dualna

101 Pomysł. Przestrzeń wektorowa skończonego wymiaru V jest izomorficzna do swojej przestrzeni dualnej V^*, jednak izomorfizmów jest bardzo wiele i trudno zdecydować się na jeden – dla każdej przestrzeni mamy „zupełnie inny” izomorfizm. Natomiast istnieje rodzina izomorfizmów utożsamiająca V i V^{**} – tak często stosowany, że często się pisze $V = V^{**}$.

102 Notacja. Pracujemy w kategorii przestrzeni wektorowych *o skończonym wymiarze* $\mathcal{C} = k$-$\mathbf{FinVect}$.

103 Definicja. Niech $V \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$. Definiujemy *przestrzeń dualną*:

$$V^* = \operatorname{Hom}(V, k)$$

Definiując dodawanie i mnożenie przez skalary nadajemy V^* strukturę przestrzeni wektorowej:

$$(\nu + \omega)(v) := \nu(v) + \omega(v)$$
$$(a \cdot \nu)(v) := a \cdot \nu(v)$$

Elementy V^* nazywamy *kowektorami* lub *jednoformami*.

104 Twierdzenie. Przestrzenie V i V^* są izomorficzne.

105 Dowód. Weźmy dowolną bazę v_1, v_2, ..., v_n przestrzeni V. Definiujemy n jednoform poprzez zadanie ich wartości na bazie:

$$\nu_i(v_j) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } i = j \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

Jeśli $a_1\nu_1 + \cdots + a_n\nu_n = 0$, to $(a_1\nu_1 + \cdots + a_n\nu_n)(v_i) = a_i = 0$ czyli formy te są liniowo niezależne.

Weźmy teraz dowolną funkcję liniową $\omega \in V^*$. Skoro jest to funkcja liniowa, jest jednoznacznie wyznaczona przez wartości przyjmowane na bazie $\omega(v_1)$, ..., $\omega(v_n)$. Zachodzi $\omega = \omega(v_1) \cdot \nu_1 + \cdots + \omega(v_n) \cdot \nu_n$, co kończy dowód.

106 Uwaga. Jeśli wymiar V jest nieskończony, to $\dim V^* > \dim V$.

107 Definicja. Jeśli $f\colon V \to W$, to definiujemy *odwzorowanie dualne* $f^*\colon W^* \to V^*$ dane wzorem:

$$f^*(\omega) = \omega \circ f$$

Nietrudno zauważyć, że $f^*(\omega) \in V^*$ oraz, że f^* jest odwzorowaniem liniowym.

108 Uwaga. Mamy do czynienia z funktorem *kontrawariantnym*: $V \mapsto V^*$, $f \mapsto f^*$.

109 Definicja. *Przestrzenią dwukrotnie dualną* V^{**} nazywamy przestrzeń dualną przestrzeni dualnej $(V^*)^*$.

Podobnie dla $f\colon V \to W$ definiujemy odwzorowanie dwukrotnie dualne $f^{**}\colon V^{**} \to W^{**}$. Dla $\bar{v} \in V^{**}$ oraz $\omega \in W^*$, wyraża się ono wzorem:

$$f^{**}(\bar{v})(\omega) = \bar{v}(f^*(\omega)) = \bar{v}(\omega \circ f)$$

110 Wniosek. Przekształcenie $V \mapsto V^{**}$, $f \mapsto f^{**}$ jest funktorem kowariantnym (złożyliśmy dwukrotnie ten sam funktor kontrawariantny).

111 Twierdzenie. Funktor identycznościowy $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ oraz funktor dwukrotnie dualny są naturalnie izomorficzne.

112 Dowód. Oznaczmy funktor dwukrotnie dualny przez D. Potrzebujemy naturalnego izomorfizmu $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow D$. Spróbujmy więc:

$$\eta_V\colon V \to V^{**},\ \eta_V(v)(\nu) := \nu(v)$$

Nietrudno zauważyć, że η_V jest przekształceniem liniowym. Pozostaje sprawdzić:

1. Czy η jest w ogóle transformacją naturalną?
2. Czy funkcje η_V są izomorfizmami?

Potrzebujemy sprawdzić czy diagram:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_V"'] & W \arrow[d, "\eta_W"] \\ V^{**} \arrow[r, "f^{**}"] & W^{**} \end{tikzcd}$$

jest przemienny. Niech $v \in V$ oraz $\omega \in W^*$. Mamy[10]:

$$((\eta_W \circ f)(v))(\omega) = \omega(f(v))$$

$$((f^{**} \circ \eta_V)(v))(\omega) = (f^{**}(\eta_V(v)))(\omega) = (\eta_V(v))(\omega \circ f) = (\omega \circ f)(v) = \omega(f(v))$$

Udowodnimy teraz, że η_V są izomorfizmami.

Niech $\eta_V(v) = 0$, czyli $\nu(v) = 0$ dla wszystkich $\nu \in V^*$. Stąd $v = 0$ (inaczej możemy uzupełnić v do bazy i rozpatrzyć bazę dualną, której pierwszy wektor da wynik 1 zamiast 0).

Jądro η_V jest trywialne, a skoro $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$, to z twierdzenia o rzędzie otrzymujemy tezę.

[10]Sugeruję przeprowadzić to obliczenie samodzielnie na kawałku papieru. Jego trudność polega wyłącznie na liczbie symboli.

113 Uwaga. Pokazaliśmy, że η jest naturalnym izomorfizmem. Często występuje w literaturze jako stwierdzenie $V = V^{**}$.

(Nieco bardziej poprawne byłoby byłoby napisanie $V^{**} \simeq V$ naturalnie dla $V \in \mathrm{Ob}\, k\text{-}\mathbf{FinVect}$, ale nie przejmowałbym się tym zanadto). Ten przykład jest szczególnie ważny z powodów historycznych – zapoczątkował teorię kategorii. To właśnie transformacje naturalne były motywacją do stworzenia funktorów i kategorii.

114 Ćwiczenie. Przestrzenie V i V^* są izomorficzne, choć się ich nie utożsamia – mówiąc, że „izomorfizm jest zależny od bazy". Kategoryjnie nie możemy mieć do czynienia z naturalnym izomorfizmem (funktor identycznościowy jest kowariantny, a dualny – kontrawariantny), natomiast możemy spróbować zbudować analogiczną rodzinę izomorfizmów $\delta_V : V \to V^*$ taką, że diagram:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\delta_V"'] & W \arrow[d, "\delta_W"] \\
V^* & W^* \arrow[l, "f^*"]
\end{tikzcd}$$

byłby przemienny.

Wykaż, że $\delta_V = 0$ dla wszystkich V. (Czyli nie możemy znaleźć takich izomorfizmów).

5 Posłowie

Co mam zapamiętać?

1. Kategoria to kolekcja obiektów powiązanych morfizmami.

2. Nie interesuje nas *wewnętrzna struktura* obiektu (jak elementy zbioru) – ale to w jaki sposób oddziałuje z innymi obiektami (jakie morfizmy do niego wchodzą i z niego wychodzą).

3. Jako, że izomorficzne obiekty oddziałują tak samo, staramy się przymykać oko na różnice między nimi.

4. Konstrukcje nowych obiektów (jak iloczyn kartezjański czy suma przestrzeni wektorowych) mają swoje uogólnienia, składające się z obiektu i rodziny morfizmów.

5. Tak jak w kategorii różne obiekty oddziałują poprzez morfizmy, tak różne *kategorie* oddziałują przez funktory. Wiele konstrukcji znanych z algebry czy geometrii to właśnie funktory.

6. Transformacje naturalne są morfizmami między funktorami. Notacja „prawie takie same” jest naturalnym izomorfizmem pewnych funktorów.

Co mam robić teraz?

1. Widząc nową konstrukcję, zastanów się czy nie jest ona kategoryjna:
   (a) Czy nie jest charakteryzowana przez pewien diagram i własność uniwersalną?
   (b) Czy nie jest funktorialna?
   (c) A może jest naturalnym izomorfizmem?

2. Zapoznaj się z *granicami, sprzężeniami* i *lematem Yonedy*. Dobrymi książkami dla początkujących są [2, 3, 6].

3. Jeśli szukasz zastosowań teorii kategorii w innych dziedzinach, możesz zainteresować się algebrą przemienną [1], algebrą homologiczną, topologią algebraiczną [10] czy geometrią algebraiczną [12]. Możesz też przeczytać [4].

4. Jeśli lubisz logikę, oprócz [4, 2], możesz zacząć czytać o teorii *toposów* [5, 9].

5. Jeśli czujesz się bardzo pewnie, spójrz na legendarną książkę [8] – autorem jest jeden z twórców teorii kategorii, a treść zaawansowana.

6. ... i pamiętaj: zawsze możesz sprawdzić nLab [11].

Sugestie i błędy Będę wdzięczny za informację o znalezionych błędach, sugestiach czy wrażeniach z czytania (np. co było za trudne, a co zbyt łatwe, ile czasu pochłonęły te notatki).

Podziękowania Chciałbym podziękować Fredericowi Grabowskiemu za przemyślenia co powinno się znaleźć we wprowadzeniu do teorii kategorii; uczestnikom zajęć z teorii kategorii WWW14 za pokazanie mi co jest zrozumiałe, a co nie; oraz Iwonie Kotlarskiej za cenne uwagi dotyczące zarówno wyboru treści jak i stylistyki.

Literatura

[1] M. F. Atiyah, I. G MacDonald, *Introduction to Commutative Algebra*. Addison Wesley, Massachusetts, 1969.

[2] S. Awodey, *Category theory*, Notatki dostępne pod: `http://www.andrew.cmu.edu/course/80-413-713/notes/`.

[3] J. C. Baez, *Category Theory Course*, Notatki dostępne pod: `http://math.ucr.edu/home/baez/qg-winter2016/CategoryTheoryNotes.pdf`.

[4] J. C. Baez, M. Stay *Physics, Topology, Logic and Computation: A Rosetta Stone*. Notatki dostępne pod: `http://math.ucr.edu/home/baez/rosetta.pdf`.

[5] M. Barr, C. Wells, *Toposes, Triples and Theories*, Wydanie dostępne w internecie: `http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/12/tr12abs.html`.

[6] T. Leinster, *Basic Category Theory*, Dostępne pod: `https://arxiv.org/pdf/1612.09375.pdf`.

[7] T. Leinster, *Rethinking Set Theory*, Dostępne pod: `https://arxiv.org/pdf/1212.6543v1.pdf`

[8] S. Maclane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, 1978.

[9] S. MacLane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, Springer, 2012.

[10] J. P. May, *A Concise Course in Algebraic Topology*, Notatki dostępne pod: `https://www.math.uchicago.edu/~may/CONCISE/ConciseRevised.pdf`.

[11] nLab, https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage

[12] R. Vakil, *The Rising Sea: Foundations of Algebraic Geometry*. Notatki dostępne pod: http://math.stanford.edu/~vakil/216blog/index.html.