1 Kategorie

Zadanie 1. **[8]** Niech obiektami będą zbiory, morfizmami funkcje, a operacją $\circ$ złożenie funkcji[1]. Pokaż, że jest to kategoria dowodząc, że:

1. dla dowolnych zbiorów A, B, wszystkie funkcje z A do B tworzą zbiór (nazywany $\mathrm{Hom}(A, B)$).
2. dla dowolnych trzech funkcji $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ mamy równość: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
3. dla każdego zbioru X znajdź funkcję[2] Id_X taką, że dla dowolnej $f : A \to B$ mamy $\mathrm{Id}_B \circ f = f = f \circ \mathrm{Id}_A$.

Kategorię tę nazywamy **Set**.

Rozwiązanie zadania 1.

1. **[3]** Rozważmy zbiory A, B. Każda funkcja z A do B to z definicji pewien podzbiór $A \times B$, zatem wszystkie funkcje z A do B to pewien podzbiór zbioru potęgowego $A \times B$.
2. **[3]** Rozważmy funkcje podane $f,\ g,\ h$ takie jak w treści zadania. Wówczas dla każdego $a \in A$ zachodzi równość

$$((h \circ g) \circ f)(a) = h(g(f(a)) = (h \circ (g \circ f))(a),$$

   która pociąga tezę zadania.
3. **[2]** Funkcja identycznościowe postaci $\mathrm{Id}_X = \{(x, x) \in X \times X : x \in X\}$ są tymi szukanymi, ponieważ dla każdego $a \in A$ mamy równości

$$\mathrm{Id}_B(f(a)) = f(a) = f(\mathrm{Id}_A(a)).$$

2 Morfizmy

2.1 Epimorfizmy

Zadanie 2. **[4]** Pokaż, że jeśli $f : A \to B$ oraz $g : B \to C$ są epimorfizmami, to $g \circ f$ też jest epimorfizmem.

---

[1] Cóż za niezwykły zbieg okoliczności - to ten sam symbol!

[2] Ciekawe jak się może nazywać...

Rozwiązanie zadania 2. **[4]** Rozważmy dowolne morfizmy $\alpha, \alpha' : C \to D$ takie, że $\alpha \circ g \circ f = \alpha' \circ g \circ f$. Ponieważ f jest epimorfizmem otrzymujemy z tego równość: $\alpha \circ g = \alpha' \circ g$. Ponieważ g jest epimorfizmem otrzymujemy $\alpha = \alpha'$, co należało wykazać.

Zadanie 3. **[4]** Pokaż, że w kategorii **Set** epimorfizmy to dokładnie surjekcje (każdy epimorfizm jest surjekcją, a każda surjekcja epimorfizmem).

Rozwiązanie zadania 3. **[2]** *Każda surjekcja to epimorfizm:* Niech $f : A \to B$ będzie surjekcją. Chcemy pokazać, że dla dowolnych funkcji $g, g' : B \to C$ takich, że $g \circ f = g \circ g'$, wynika, że $g = g'$. Przypuśćmy, że istnieje takie $b \in B$, że $g(b) \neq g'(b)$. Ponieważ f jest surjekcją, istnieje takie $a \in A$, że $f(a) = b$. Zatem otrzymujemy: $g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a) = (g' \circ f)(a) = g'(f(a)) = g'(b)$, co stoi w sprzeczności z przypuszczeniem.

[2] *Każdy epimorfizm to surjekcja:* Niech $f : A \to B$ będzie epimorfizmem niebędącym surjekcją. Możemy zatem określić funkcję: $g : B \to \{0, 1\}$, taką, że $g(a) = 1$ dla a leżącego w obrazie funkcji f oraz $g(b) = 0$ dla b nieleżących w obrazie funkcji f. Niech teraz $g' : B \to \{0, 1\}$ będzie funkcją stałą, równą 1. Wówczas $g \circ f = g' \circ f$, lecz $g \neq g'$, co pokazuje, że epimorfizm niebędący surjekcją nie może istnieć.

Zadanie 4. **[5]** Skonstruuj kategorię, której obiektami są pewne zbiory (tak więc pojęcie surjekcji ma sens), natomiast istnieje epimorfizm niebędący surjekcją.

Rozwiązanie zadania 4. **[5]** Kategorią **Example** nazwijmy kategorię, której obiektami są zbiory $A = \{0, 1\}$ oraz $B = \{5, 10\}$, a morfizmami $\mathrm{Id}_A, \mathrm{Id}_B$ oraz $f : A \to B, f(a) = 5$ dla każdego $a \in A$. Wówczas f nie jest surjekcją, lecz jest epimorfizmem.

2.2 Monomorfizmy

Zadanie 5. **[1]** Pokaż, że jeśli $f : A \to B$ oraz $g : B \to C$ są monomorfizmami, to $g \circ f$ też jest monomorfizmem.

Rozwiązanie zadania 5. **[1]** Dowód przebiega dokładnie tak samo jak dla epimorfizmów, poza tym, że skracamy funkcje poczynając od tej najbardziej z lewej.

Zadanie 6. **[1]** Pokaż, że w kategorii **Set** monomorfizmy to dokładnie iniekcje (każdy monomorfizm jest iniekcją, a każda iniekcja monomorfizmem).

Rozwiązanie zadania 6. **[1]** Dowód przebiega analogicznie do epimorfizmów i surjekcji, natomiast wprowadzamy funkcje ze zbioru jednoelementowego $\{0\}$.

Zadanie 7. **[1]** Skonstruuj kategorię, której obiektami są pewne zbiory (tak więc pojęcie iniekcji ma sens), natomiast istnieje monomorfizm niebędący iniekcją.

Rozwiązanie zadania 7. **[1]** Kategoria **Example** ponownie okazuje się poprawnym przykładem.

2.3 Izomorfizmy

Zadanie 8. *Będziemy wykorzystywać izomorfizmy do utożsamiania pewnych przestrzeni. W tym celu przydadzą nam się własności podobne do tych występujących w definicji relacji równoważności* [3].

[4] Pokaż, że:

1. dla każdego obiektu A istnieje izomorfizm z A do A.
2. jeśli istnieje izomorfizm z A do B, to istnieje też izomorfizm z B do A.
3. jeśli istnieje izomorfizm z A do B oraz z B do C, to istnieje też izomorfizm z A do C.

Rozwiązanie zadania 8.

1. **[1]** Dla każdego obiektu A istnieje morfizm Id_A, który jest izomorfizmem.
2. **[1]** Wynika to wprost z definicji izomorfizmu.
3. **[2]** Niech f będzie izomorfizmem z A do B, a g izomorfizmem z B do C. Przez m' oznaczmy izomorfizm "odwrotny" do izomorfizmu m. Wówczas $g \circ f$ jest izomorfizmem z A do C ponieważ $(g \circ f) \circ (f' \circ g') = \mathrm{Id}_C$ oraz $(f' \circ g') \circ (g \circ f) = \mathrm{Id}_A$.

[3] Nazwanie "dokładności do izomorfizmu" relacją równoważności jest kuszące, natomiast relacje równoważności określone są na *zbiorach*. Kolekcja obiektów kategorii na ogół jest za duża do bycia zbiorem.

Zadanie 9. *To zadanie ma przekonać Cię, że znasz już sporo własności izomorfizmów.* **[3]**

1. Pokaż, że każdy izomorfizm jest monomorfizmem oraz epimorfizmem.
2. Skonstruuj kategorię, dowodzącą, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe (czyli, że istnieje morfizm będący epimorfizmem i monomorfizmem, natomiast nie izomorfizmem).

Rozwiązanie zadania 9.

1. **[2]** Niech $f : A \to B$ będzie izomorfizmem, czyli istnieje $g : B \to A$, które odpowiednio złożone z f daje identyczności na A i B. Aby pokazać, że f jest epimorfizmem rozważmy morfizmy α, α' takie, że $\alpha \circ f = \alpha' \circ f$. Składając obydwie strony równości z g otrzymujemy $\alpha \circ \mathrm{Id}_B = \alpha' \circ Id_B$, co pokazuje, że $\alpha = \alpha'$. Dowód, że f jest monomorfizmem przebiega tak samo, z tym, że dokładamy g od lewej strony.
2. **[1]** Kategoria **Example** raz jeszcze.

Zadanie 10. **[1]** Czym są izomorfizmy w kategorii **Set**?

Rozwiązanie zadania 10. **[1]** Wiemy, że każdy izomorfizm to monomorfizm i epimorfizm, czyli w **Set** każdy izomorfizm musi być iniekcją i surjekcją jednocześnie. Zatem wszystkimi kandydatami na izomorfizmy są bijekcje. Dla każdej bijekcji istnieje funkcja odwrotna, co pokazuje, że *bijekcje to dokładnie izomorfizmy w kategorii **Set**.*

3 Kategoria Set$_*$ i funktory

Zadanie 11. **[5]** Pokaż, że zbiory z wyróżnionym punktem wraz z wymienionymi funkcjami tworzą kategorię. Nazywamy ją **Set**$_*$.

Rozwiązanie zadania 11.

1. **[2]** Rozważmy dwa obiekty: (X, x) oraz (Y, y) wszystkie funkcje z X do Y zamieniające x na y to podzbiór zbioru funkcji z X do Y (dowód, że wszystkie funkcje z X do Y tworzą zbiór został przeprowadzony w zadaniu 1.)

2. **[2]** Rozważmy morfizmy $f : (A, a) \to (B, b)$, $g : (B, b) \to (C, c)$. Wówczas $g \circ f : A \to C$ oraz $g(f(a)) = g(b) = c$, więc morfizmy składają się poprawnie
3. **[1]** Dla każdego obiektu (X, x) funkcja identycznościowa Id_X jest dobrym morfizmem.

Zadanie 12. **[3]** Rozważmy kategorie $\mathbf{Set}_*$ oraz $\mathbf{Set}$ i wprowadźmy funktor[4] $\zeta(X, x) = X$, który zamienia zbiory z wyróżnionym punktem na zbiory.

1. Na co przechodzi funkcja $f : (X, x) \to (Y, y)$?
2. Pokaż, że ζ jest funktorem (znaczy, że zachowuje złożenie).

Rozwiązanie zadania 12.

1. **[1]** Funkcja f jako obiekt matematyczny (czyli w zasadzie jako pewien podzbiór $X \times Y$) się nie zmienia - natomiast teraz jest traktowana jako morfizm w innej kategorii
2. **[2]** Dla dowolnego obiektu (X, x) w $\mathbf{Set}_*$ mamy $\zeta(\mathrm{Id}_{(X,x)}) = \mathrm{Id}_X$ oraz dla dowolnych morfizmów $\zeta(f \circ g) = \zeta(f) \circ \zeta(g)$, co wynika z powyższej obserwacji.

4 Grupy

Grupa to para $(G, *)$, gdzie G jest zbiorem, a funkcja $* : G \times G \to G$ (będziemy pisać $g * h$ lub gh zamiast $*(g, h)$) ma następujące własności:

1. istnieje element $e \in G$ taki, że $ge = eg = g$ dla każdego $g \in G$. Będziemy nazywać go *elementem neutralnym.*
2. dla każdego $g \in G$ istnieje element $\tilde{g} \in G$ taki, że $g\tilde{g} = \tilde{g}g = e$. Zazwyczaj piszemy g^{-1} zamiast $\tilde{g}$ oraz nazywamy go *elementem odwrotnym do g.*
3. dla dowolnych $f, g, h \in G$ zachodzi równość $(fg)h = f(gh)$.

[4] Będąc bardzo formalnymi, powinno się napisać $\zeta((X, x))$, bo (X, x) jest przekształcanym obiektem, więc powinien stać w dodatkowych nawiasach.

Zadanie 13. **[3]** Rozstrzygnij czy następujące zbiory z działaniami są grupami:

1. $(\mathbb{Z}, +)$
2. $(\mathbb{Z}, \circ)$
3. $(\mathbb{Q}, \circ)$
4. $(\mathbb{Q}^*, \circ)$, gdzie $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
5. $(\mathbb{Q}^*, +)$
6. $(\sigma_n, \circ)$, gdzie σ_n oznacza zbiór permutacji [5] zbioru n-elementowego, a $\circ$ jest zwykłym złożeniem funkcji

Rozwiązanie zadania 13.

1. **[0.5]** Tak - 0 jest elementem neutralnym, a elementem odwrotnym do $a \in \mathbb{Z}$ jest $-a$. Ponadto dla dowolnych a, b, c mamy $(a+b)+c = a+(b+c)$.
2. **[0.5]** Nie - w każdej grupie element neutralny jest unikatowy (zobacz następne zadanie), tutaj musiałaby to być jedynka. Wówczas liczba 2 nie ma elementu odwrotnego (liczba 1/2 nie jest liczbą całkowitą)
3. **[0.5]** Nie - dla każdej liczby x mamy $0 \circ x = 0$, więc 0 musiałoby być elementem neutralnym mnożenia. A nie jest bo $0 \circ 5 \neq 5$ (lub też dlatego, że jest nim jedynka, a element neutralny jest unikatowy)
4. **[0.5]** Tak - elementem neutralnym jest jedynka, elementem odwrotnym jest liczba odwrotna, a mnożenie jest łączne.
5. **[0.5]** Nie - elementem neutralnym musiałoby być 0, którego nie ma w tym zbiorze
6. **[0.5]** Tak - funkcja identycznościowa jest permutacją i elementem neutralnym, do każdej permutacji istnieje permutacja odwrotna, a składanie funkcji jest łączne.

Zadanie 14. **[4]** Dlaczego:

1. istnieje *dokładnie jeden* element neutralny?
2. dla każdego elementu g istnieje *dokładnie jeden* element odwrotny?

[5] Permutacja zbioru X to bijekcja $X \to X$.

Rozwiązanie zadania 14.

1. **[2]** Jeśli e oraz e' są elementami neutralnymi to $e = ee' = e'$.
2. **[2]** Niech h i h' będą elementami odwrotnymi do g. Zatem:
$$h = he = h(gh') = (hg)h' = eh' = h'.$$

4.1 Homomorfizmy

Zadanie 15. **[4]** Pokaż, że jeśli $f : G \to H$ jest homomorfizmem, to $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ oraz $f(e) = \epsilon$, gdzie $e \in G, \epsilon \in H$ oznaczają elementy neutralne odpowiednich grup.

Rozwiązanie zadania 15. **[2]** Dla dowolnego $g \in G$ mamy $f(g) = f(ge) = f(g)f(e)$ i analogicznie $f(g) = f(e)f(g)$. Zatem $f(e)$ jest elementem neutralnym H. **[2]** Wówczas: $f(g^{-1})f(g) = f(g^{-1}g) = f(e) = \epsilon$, więc $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$.

Zadanie 16. **[3]** Pokaż, że grupy wraz z homomorfizmami tworzą kategorię. Nazywamy ją **Grp**.

Rozwiązanie zadania 16. **[1]** Dla dowolnych homomorfizmów $f : F \to G$ i $g : G \to H$, złożenie również jest homomorfizmem, gdyż $(f \circ g)(ab) = f(g(ab))) = f(g(a)g(b)) = f(g(a))f(g(b)) = (f \circ g(a))(f \circ g(b))$ dla dowolnych $a, b \in F$. **[1]** Składanie funkcji jest łączne **[1]** Morfizm $\mathrm{Id}_G : G \ni g \to g \in G$ spełnia $\mathrm{Id}_G \circ f = f$ dla wszystkich $f \in \mathrm{Hom}(F, G)$ oraz $g \circ \mathrm{Id}_G = g$ dla wszystkich $g \in \mathrm{Hom}(G, H)$.

Zadanie 17. **[2]** Wykaż, że izomorfizmy w **Grp** to dokładnie bijektywne homomorfizmy.

Rozwiązanie zadania 17. **[1]** Niech $f : G \to H$ będzie dowolnym bijektywnym homomorfizmem. Niech $g : H \ni h \to f^{-1}(h) \in G$. Funkcja g jest dobrze określona, gdyż f jest bijekcją. Mamy $g \circ f = \mathrm{Id}_G$ oraz $f \circ g = \mathrm{Id}_H$. Dla dowolnych $a, b \in H$ zachodzi $g(ab) = g(f(a')f(b')) = g(f(a'b')) = a'b' = g(a)g(b)$, gdzie $a' = g(a), b' = g(b)$, więc g jest morfizmem, a więc także izomorfizmem. **[1]** Niech teraz $f : G \to H$ będzie dowolnym izomorfizmem. Odwracalność daje daje bijektywność, a ponieważ f jest morfizmem jest też homomorfizmem.

Zadanie 18. **[8]** Ile jest, z dokładnością do izomorfizmu[6], grup:

1. o dwóch elementach?
2. o trzech elementach?
3. o czterech elementach?

Podpowiedź: pomyśl nad ograniczeniami jakie narzuca łączność mnożenia oraz istnienie elementu odwrotnego.

Rozwiązanie zadania 18.

1. **[2]** Jeden element to element neutralny e. Drugi oznaczmy przez g. Wówczas $g^2 = e$ jako, że $ge = eg = g \neq e$, a g musi mieć element odwrotny. Zatem mamy dokładnie jedną taką grupę, powstałą według reguł mnożenia: $e^2 = g^2 = e$, $ge = eg = g$. Można zatem powiedzieć, że grupa $\mathbb{Z}_2$ (czyli liczby 0, 1 z dodawaniem modulo 2) to *jedyna* grupa dwuelementowa.

2. **[3]** Oznaczmy elementy grupy przez e, b, c. Jeśli $bc = b$, to mnożąc od lewej strony tę równość przez element odwrotny do b otrzymalibyśmy $c = e$. Analogicznie bc nie może być równe c. Zatem jedyną możliwością jest $bc = e$. Stąd otrzymujemy też $cb = e$. Musimy mieć $b^2 = b$ lub $b^2 = c$. W pierwszym przypadku mamy $b = e$, więc $b^2 = c$. Analogicznie $c^2 = b$. Znamy jednoznacznie wyniki mnożenia każdych dwóch elementów tej grupy, jeśli więc mnożenie okaże się łączne, to wiemy, że istnieje dokładnie jedna taka grupa. Biorąc jako przykład $\mathbb{Z}_3$ widzimy, że istnieje *dokładnie* jedna trzyelementowa grupa.

3. **[3]** Oznaczmy elementy grupy przez e, a, b, c. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $b^2 = e$ (parując element z jego elementem odwrotnym widzimy, że któryś musi zostać bez pary). Teraz mamy dwie możliwości:

   (a) $a^2 = e$, więc i $c^2 = e$. Wówczas ab musi być równe c (czemuś być musi, a elementy e, a, b prowadzą do sprzeczności). Analogicznie znajdujemy pozostałe relacje mnożenia. Taka grupa nazywana jest *grupą Kleina* i może być skonstruowana jako $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, wraz z dodawaniem modulo dwa po współrzędnych.

   (b) e i b to wszystkie elementy g takie, że $g^2 = e$, czyli $ac = ca = e$. Zastanówmy się ile wynosi ba. Nie może to być e, ani a ani b. Musi zatem to być c. Analogicznie jednoznacznie znajdujemy ab, cb, bc. Tą grupą okazuje się być $\mathbb{Z}_4$.

   Zatem są *dwie* grupy czteroelementowe.

[6] To znaczy, że nie rozróżniamy grup, które są izomorficzne. Na przykład w kategorii **Set** istnieje tylko jeden zbiór dwunastoelementowy, licząc z dokładnością do izomorfizmu, czyli bijekcji.

5 Topologia

5.1 Przeciwobraz funkcji

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją. Definiujemy pojęcia:

1. *obrazu* podzbioru: jeśli $A \subseteq X$, to
$$f(A) := \{y \in Y : \text{istnieje } x \in X \text{ takie, że } f(x) = y\}$$

2. *przeciwobrazu* podzbioru: jeśli $B \subseteq Y$, to
$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

Zadanie 19. *To zadanie pokazuje dlaczego później będziemy korzystać z przeciwobrazu.* **[12]** Niech $f : X \to Y$, oraz $A, B \subseteq X$ i $C, D \subseteq Y$. Pokaż, że:

1. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
2. Podaj przykład, dowodzący, że zawierania nie można zastąpić znakiem równości.
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
4. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
5. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
6. $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$

Rozwiązanie zadania 19.

1. **[2]** $f(A \cap B) \subseteq A$ oraz $f(A \cap B) \subseteq B$. Zatem $f(A \cap B) \subseteq A \cap B$
2. **[2]** Niech $f : \mathbb{Z} \to \{1\}$. Wówczas jeśli P to liczby parzyste, a N to liczby nieparzyste, mamy $f(P \cap N) = \varnothing \neq \{1\}$
3. **[2]** $f^{-1}(C \cap D) = \{x \in X : f(x) \in C \cap D\}$, $f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D) = \{x \in X : f(x) \in C\} \cap \{x \in X : f(x) \in D\} = \{x \in X : f(x) \in C \cap D\}$
4. **[2]** Analogicznie jak wyżej.
5. **[2]** $f^{-1}(Y \setminus C) = \{x \in X : f(x) \notin C\} = X \setminus \{x \in X : f(x) \in C\} = X \setminus f^{-1}(C)$

5.2 Przestrzeń topologiczna

Niech X będzie zbiorem. Jego *zbiorem potęgowym* $\mathcal{P}(X)$ nazywamy zbiór wszystkich jego podzbiorów [7] : $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$.

Zadanie 20. **[1]** Niech X będzie zbiorem o skończonej liczbie elementów n. Ile elementów ma zbiór $\mathcal{P}(n)$?

Rozwiązanie zadania 20. **[1]** Ponumerujmy elementy zbioru liczbami od 1 do n. Wówczas możemy skonstruować każdy podzbiór X poprzez wybieranie czy element i ma się znaleźć w danym podzbiorze czy nie. Zatem mamy $2 \circ 2 \cdots \circ 2 = 2^n$ możliwości skonstruowania podzbiorów i taka też jest moc $\mathcal{P}(X)$.

Zadanie 21. **[8]** Niech X będzie nieskończonym zbiorem. Pokaż, że następujące zbiory są topologiami na X:

1. $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$ (tak zwana *topologia trywialna*)
2. $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ (*topologia dyskretna*)
3. $\mathcal{T} = \{\varnothing\} \cup \{X \setminus A : A$ jest skończonym podzbiorem $X\}$ (*topologia koskończona* [8])

Rozwiązanie zadania 21.

1. **[2]** Oczywiście zbiór pusty i cała przestrzeń są otwarte, podobnie też ich dowolne sumy i skończone przecięcia (są to albo cała przestrzeń albo zbiór pusty).
2. **[2]** Zbiór pusty i cała przestrzeń są otwarte, dowolna suma podzbiorów X nadal jest podzbiorem X (a więc jest zbiorem otwartym), podobnie skończone przecięcia.
3. **[4]** Korzystając z $A = \varnothing$ dowodzimy, że cała przestrzeń jest otwarta; zbiór pusty jest otwarty z definicji tej topologii. Rozważmy teraz zbiory otwarte $U_i, i \in I$ oraz ich dopełnienia $U_i^c = X \setminus U_i, i \in I$. Dopełnienie dowolnej sumy zbiorów U_i to iloczyn dowolnie wielu skończonych U_i^c, czyli też zbiór skończony. Pokazuje to, że suma dowolnie wielu zbiorów otwartych też jest zbiorem otwartym. Dopełnienie iloczynu $U_i \cap U_j$ to suma dopełnień $U_i^c \cup U_j^c$, czyli zbiór skończony. Zatem iloczyn dwóch zbiorów otwartych jest zbiorem otwartym.

[7] Jego istnieje gwarantuje aksjomatyka teorii mnogości.

[8] Chyba... jakoś to nie brzmi

Zadanie 22. *Zazwyczaj pisząc "przestrzeń topologiczna $\mathbb{R}$" ma się na myśli $\mathbb{R}$ wyposażoną w pewną określoną topologię...*

[5] Mówimy, że $A \subseteq \mathbb{R}$ jest otwarty jeśli dla każdego $x \in A$ istnieje odcinek otwarty (a_x, b_x) taki, że $x \in (a_x, b_x) \subseteq A$.

1. Pokaż, że zbiory otwarte według powyższej definicji spełniają wszystkie aksjomaty topologii.

2. Pokaż, że każdy zbiór otwarty może być zapisany jako suma pewnej rodziny otwartych odcinków - to znaczy, że jeśli A jest zbiorem otwartym, to istnieją takie odcinki (a_i, b_i), $i \in I$, że:

$$A = \bigcup_i (a_i, b_i)$$

Rozwiązanie zadania 22.

1. Sprawdzamy po kolei wszystkie aksjomaty:

   (a) **[1]** $\varnothing$ nie ma żadnego punktu, więc wokół każdego da się narysować odcinek; wokół każdej liczby rzeczywistej w $\mathbb{R}$ istnieje odcinek zawarty w $\mathbb{R}$

   (b) **[1]** Rozważmy rodzinę zbiorów $\{X_i : i \in I\}$ i sumę X. Rozważmy dowolny punkt $x \in X$. Wówczas istnieje takie i, że $x \in X_i$. Zatem da się narysować odcinek wokół x zawarty w X_i, a więc i w X.

   (c) **[1]** Niech A i B będą otwarte. Rozważmy punkt $x \in A \cap B$. Wówczas istnieją odcinki $(x - a, x + a) \subseteq A$, $(x - b, a + b) \subseteq B$. Odcinek $(x - k, x + k) \subseteq A \cap B$ jest szukanym otoczeniem x dla $k = \min(a, b)$.

2. **[2]** Rozważmy dowolny zbiór otwarty X w $\mathbb{R}$. Wokół każdego punktu $x \in X$ istnieje odcinek O_x zawarty w X taki, że $x \in O_x$. Rozważmy sumę odcinków O_x dla $x \in X$. Widzimy, że jest nadzbiorem X (bo zawiera każdy punkt $x \in X$) oraz, że jest podzbiorem X (bo żaden z odcinków nie ma punktów spoza X), zatem jest równy X.

5.3 Funkcje ciągłe

Niech $(X, \mathcal{T})$ oraz (Y, τ) będą przestrzeniami topologicznymi. Funkcję $f : X \to Y$ taką, że $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ dla każdego $B \in \tau$ nazywamy *funkcją ciągłą* i oznaczamy $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \tau)$.

Zadanie 23. **[5]** Pokaż, że funkcja identycznościowa $\mathrm{Id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ jest ciągła.

Rozwiązanie zadania 23. **[5]** Niech O będzie dowolnym zbiorem otwartym. Wówczas przeciwobraz $\mathrm{Id}_X^{-1}(O) = O$, czyli jest zbiorem otwartym, co pokazuje ciągłość Id_X.

Zadanie 24. **[5]** Pokaż, że funkcja stała $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \tau),\ f(x) = c$ jest ciągła.

Rozwiązanie zadania 24. **[5]** Niech O będzie zbiorem otwartym w Y. Jeśli $c \in O$, to $f^{-1}(O) = X$ (czyli jest to zbiór otwarty). Jeśli $c \in Y \setminus O$, to $f^{-1}(O) = \varnothing$ (czyli jest to zbiór otwarty).

Zadanie 25. **[3]** Pokaż, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = x^2$ jest ciągła. Podpowiedź: jak można zapisać każdy zbiór otwarty w $\mathbb{R}$? Jakie własności ma przeciwobraz?

Rozwiązanie zadania 25. **[3]** Każdy zbiór otwarty w $\mathbb{R}$ można zapisać jako sumę przedziałów otwartych. Wiemy też, że przeciwobraz sumy zbiorów to suma przeciwobrazów oraz, że sumy zbiorów otwartych to zbiory otwarte. Zatem wystarczy pokazać, że przeciwobraz każdego otwartego przedziału $\mathbb{R}$ jest zbiorem otwartym.

Rozważmy zatem przedział (a, b). Jego przeciwobraz to:

1. $\varnothing$ jeśli $(a, b) = \varnothing$ (czyli gdy $a \geqslant b$). Jest to zbiór otwarty.
2. $\varnothing$ jeśli $b < 0$. Jest to zbiór otwarty.
3. $(0, \sqrt{b}) \cup (-\sqrt{b}, 0)$ jeśli $a < 0 \leqslant b$. Jest to zbiór otwarty.
4. $(\sqrt{a}, \sqrt{b}) \cup (-\sqrt{b}, -\sqrt{a})$ jeśli $0 \leqslant a < b$. Jest to zbiór otwarty.

5.4 Kategoria Top

Zadanie 26. **[5]** Pokaż, że przestrzenie topologiczne wraz z funkcjami ciągłymi tworzą kategorię. Nazywamy ją **Top**.

Rozwiązanie zadania 26.

1. **[1]** Funkcje ciągłe z X do Y są funkcjami z X do Y o pewnej własności, tworzą zatem zbiór.

2. **[3]** Niech $(X_i, \mathcal{T}_i), i = 1, 2, 3$ będą przestrzeniami topologicznymi oraz niech $f_i : X_i \to X_{i+1}, i = 1, 2$ będą funkcjami ciągłymi. Rozważmy dowolny zbiór otwarty O w X_3. Wówczas $f_2^{-1}(O)$ jest otwarty w X_2 (co wynika z ciągłości f_2). Z ciągłości f_1 otrzymujemy, że zbiór $f_1^{-1}(f_2^{-1}(O))$ jest otwarty w X_1, co dowodzi, że funkcja $f_2 \circ f_1$ jest funkcją ciągłą z X_1 do X_3, zatem mamy działające składanie morfizmów.

3. **[1]** Pokazaliśmy już, że identyczności są ciągłe.

Zadanie 27. **[3]** Dlaczego:

1. monomorfizmy w **Top** to dokładnie ciągłe iniekcje?

2. epimorfizmy to dokładnie ciągłe surjekcje?

3. izomorfizmy to dokładnie ciągłe bijekcje posiadające ciągłą odwrotność? W tej kategorii nazywamy je *homeomorfizmami*.

Rozwiązanie zadania 27. **[3]** Wystarczy powtórzyć dowody[9] dla kategorii **Set** pamiętając, że należy zadbać by wprowadzane funkcje były ciągłe (czyli np. wyposażyć zbiór $\{0, 1\}$ w topologię trywialną gdy rozważa się epimorfizmy).

---

[9] Przyznawany jest jeden punkt za każdy dowód.