# 1 Wstęp

Celem tych zadań jest oswojenie Cię z podstawowymi pojęciami teorii kategorii. Nie musisz zrobić wszystkich, jednak szczególnie do tego zachęcamy - warsztaty będą polegać głównie na rozwiązywaniu zadań przy tablicy.

Żadna dodatkowa literatura nie powinna być potrzebna do rozwiązania tych zadań, jednak w razie problemów z zadaniami, sugestii zmian lub chęci zobaczenia określonych kategorii na warsztatach, zachęcamy do kontaktu.

# 2 Kategorie

*Kategorią* nazywamy kolekcję[1] obiektów $A, B, C \ldots$, taką, że dla każdych dwóch obiektów $A, B$ istnieje zbiór $\mathrm{Hom}(A, B)$ *morfizmów* z $A$ do $B$. Na ogół piszemy $f : A \to B$ zamiast $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Zakładamy też, że istnieje operacja składania morfizmów $\circ$ posiadająca następujące własności:

1. Jeśli $f : A \to B$ oraz $g : B \to C$, to istnieje morfizm $g \circ f : A \to C$.
2. Dla dowolnych trzech morfizmów $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ mamy równość: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
3. Dla każdego obiektu $X$ istnieje morfizm $\mathrm{Id}_X : X \to X$, taki że dla każdego morfizmu $f : A \to B$ mamy $\mathrm{Id}_B \circ f = f = f \circ \mathrm{Id}_A$.

**1.** Niech obiektami będą zbiory, morfizmami funkcje, a operacją $\circ$ złożenie funkcji[2]. Pokaż, że jest to kategoria dowodząc, że:

1. dla dowolnych zbiorów $A, B$, wszystkie funkcje z $A$ do $B$ tworzą zbiór (nazywany $\mathrm{Hom}(A, B)$)
2. dla dowolnych trzech funkcji $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ mamy równość: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
3. Dla każdego zbioru $X$ znajdź funkcję[3] $\mathrm{Id}_X$ taką, że dla dowolnej $f : A \to B$ mamy $\mathrm{Id}_B \circ f = f = f \circ \mathrm{Id}_A$.

[1] Można myśleć o tym jak o zbiorze, do którego można włożyć dowolnie dużo elementów. Zainteresowanych jak uniknąć paradoksu zbioru wszystkich zbiorów odsyłamy do teorii klas Morse'a-Kelleya.

[2] Cóż za niezwykły zbieg okoliczności - to ten sam symbol!

[3] Ciekawe jak się może nazywać...