

1 Grupy

Zadanie 1. Pomyśl o liczbach całkowitych i dodawaniu lub o permutacjach zbioru $0,1,2$ i składaniu funkcji oraz uzupełnij definicję grupy:

Grupa to para $(G,*)$, gdzie G jest zbiorem, a funkcja $*:G \times G \rightarrow G$ (będziemy pisać $g*h$ lub gh zamiast $*(g,h)$) ma następujące własności:

1. istnieje element $e \in G$ taki, że Będziemy nazywać go *elementem neutralnym*.
2. dla każdego $g \in G$ istnieje element $g^{-1} \in G$ taki, że Nazywamy go *elementem odwrotnym do g* .
3. dla dowolnych $f,g,h \in G$ zachodzi równość

Zadanie 2. Ile istnieje grup czteroelementowych?¹

Zadanie 3. Pomyśl o izometriach płaszczyzny (przekształceniach zachowujących odległości, jak symetrie, przesunięcia czy obroty). Co jest złożeniem dwóch symetrii? Co jest złożeniem symetrii i przesunięcia? Czy do każdej podanej izometrii umiemy łatwo podać izometrię odwrotną?

Zadanie 4. Pokaż, że każda grupa izomorficzna jest do grupy permutacji jakiegoś zbioru.

2 Topologia

2.1 Przestrzenie metryczne

Czasami mamy na zbiorze zadaną *metrykę* $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ o własnościach:

1. $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$
2. $d(x,y)=d(y,x)$ dla wszystkich $x,y \in X$
3. $d(x,y) \leq d(x,k)+d(k,y)$ dla wszystkich $x,y,k \in X$

W takim wypadku definiujemy *kulę* o środku w x i promieniu $r > 0$:

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

Zadanie 5. Narysuj kule w przestrzeniach:

1. $X, d(x,y)=1$ dla $x \neq y$
2. $\mathbb{R}, d(x_1,x_2)=|x_1-x_2|$
3. $\mathbb{R}^2, d(x_1,y_1,x_2,y_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
4. $\mathbb{R}^2, d(x_1,y_1,x_2,y_2)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$
5. $\mathbb{R}^2, d(x_1,y_1,x_2,y_2)=\max(|x_1-x_2|,|y_1-y_2|)$

¹Z dokładnością do izomorfizmu. Heurystycznie chodzi o grupy, które mają taką samą strukturę, np. \mathbb{Z} oraz $2\mathbb{Z}$ wyglądają dokładnie tak samo, poza tym, że mają inaczej nazwane elementy.

2.2 Przestrzenie topologiczne

Przestrzenią topologiczną nazywamy parę (X, \mathcal{T}) , gdzie X jest zbiorem, a \mathcal{T} jest rodziną podzbiorów X o następujących własnościach:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. jeśli $A_i \in \mathcal{T}$ dla $i \in I$, to ich suma też należy do \mathcal{T} : $\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$
3. jeśli $A, B \in \mathcal{T}$, to $A \cap B \in \mathcal{T}$

Zbiór \mathcal{T} nazywamy *topologią*, a jego elementy - *zbiorami otwartymi*.

Zadanie 6. Rozważmy przestrzeń metryczną (X, d) . Mówimy, że zbiór $A \subseteq X$ jest otwarty jeśli dla każdego $a \in A$ istnieje $r_a > 0$ takie, że

$$B(a, r_a) \subseteq A.$$

Pokaż, że tak zdefiniowane zbiory otwarte rzeczywiście zadają topologię.

Zadanie 7. Jak wyglądają zbiory otwarte topologii wyznaczonych przez odległość bezwzględną na zbiorach $\mathbb{R}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$?

Przykład 1. Topologia "rzeka", prosta z dwoma początkami.

Zadanie 8. Ile jest topologii na zbiorze $\{0, 1, 2\}$? (Z dokładnością do homeomorfizmu.)

Zadanie 9. Niech X będzie dowolnym zbiorem, a \mathcal{T} będzie rodziną zawierającą zbiór pusty oraz dopełnienia wszystkich skończonych podzbiorów X . Pokaż, że \mathcal{T} jest topologią.

Zadanie 10. Rozważmy rodzinę zespolonych wielomianów

$$S = \{w_i : i \in I\}, \quad w_i : \mathbb{C} \ni z \mapsto a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}.$$

Afiniczną rozmaitością algebraiczną $V(S)$ będziemy oznaczać zbiór liczb zespolonych, na których zerują się wszystkie wielomiany rodziny S . Pokaż, że dopełnienia wszystkich afinicznych rozmaitości algebraicznych tworzą topologię na \mathbb{C} (nazywamy ją topologią Zariskiego).

3 Kategorie

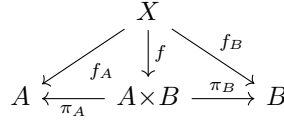
Zadanie 11. Pomyśl o zbiorach i funkcjach lub grupach i homeomorfizmach oraz uzupełnij definicję kategorii:

Kategorią nazywamy kolekcję obiektów A, B, C, \dots , taką, że dla każdych dwóch obiektów A, B istnieje zbiór $\text{Hom}(A, B)$ *morfizmów* z A do B , które można składać symbolem \circ . Mają one następujące własności:

1. Jeśli $f : A \rightarrow B$ oraz $g : B \rightarrow C$, to
2. Dla dowolnych trzech morfizmów $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$ mamy równość:
3. Dla każdego obiektu X istnieje morfizm $\text{Id}_X : X \rightarrow X$, taki że

Zadanie 12. Pokaż, że **Set**, **Top**, **Grp**, **Set***, **Top*** są kategoriami.

Przykład 2. Kategoria z trzema morfizmami.



Rysunek 1: Produkt - definicja

3.1 Epi/mono/izo-morfizmy

Wprowadzimy pewne określenia morfizmów. Otóż niech $f: A \rightarrow B$ będzie morfizmem.

1. f jest *epimorfizmem* jeśli dla dowolnego obiektu C oraz morfizmów $g, g': B \rightarrow C$ z równości $g \circ f = g' \circ f$ wynika, że $g = g'$.
2. f is *monomorfizmem* jeśli dla dowolnego obiektu C oraz morfizmów $g, g': X \rightarrow A$ z równości $f \circ g = f \circ g'$ wynika, że $g = g'$.
3. f jest *izomorfizmem* jeśli istnieje $f': B \rightarrow A$ takie, że $f \circ f' = \text{Id}_B$ oraz $f' \circ f = \text{Id}_A$

Zadanie 13. Czy są powyższe mono/epi/izo-morfizmy w **Set**?

Zadanie 14. Scharakteryzuj (nie musi być formalnie) powyższe morfizmy w kategoriach **Top** i **Grp**.

Zadanie 15. Pokaż, że złożenie mono/epi/izo-morfizmów jest mono/epi/izo-morfizmem.

3.2 Podobiekt

Podobiekt obiektu A będziemy nazywać monomorfizm $g: B \rightarrow A$. Rozważając jednak kategorię, w której obiekty są pewnymi zbiorami, a morfizmy funkcjami, możemy myśleć o obrazie g (czyli zbiorze z dodatkową strukturą) jako o podobiektcie.

Zadanie 16. Pokaż, że podobiekt podobiektu jest podobiektem.

Zadanie 17. Scharakteryzuj podobiekty w **Set**, **Top**, **Grp**. Dlaczego w **Top** istnieje kilka topologii jakie można nadać podzbiworowi aby był nadal podobiektem?

3.3 Produkt

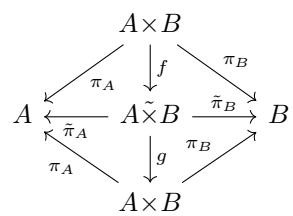
Rozważmy dwa obiekty A, B jakiejś kategorii. Ich *produktem* będziemy nazywać trójkę $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ taką, że:

- $A \times B$ jest obiektem
- $\pi_A: A \times B \rightarrow A, \pi_B: A \times B \rightarrow B$ to morfizmy
- jeśli weźmiemy dowolny obiekt X oraz morfizmy $f_A: X \rightarrow A, f_B: X \rightarrow B$ to istnieje *dokładnie jeden* morfizm $f: X \rightarrow A \times B$ taki, że diagram 2 komutuje (czyli $f_A = \pi_A \circ f, f_B = \pi_B \circ f$).

Zadanie 18. Pokaż, że produkt, jeśli istnieje, jest unikatowy z dokładnością do izomorfizmu. Podpowiedź: niech $(A \tilde{\times} B, \tilde{\pi}_A, \tilde{\pi}_B)$ będzie drugim produktem. Wtedy diagram 2 komutuje.

Zadanie 19. Czym jest produkt w **Set** i **Grp**? W jaki sposób skonstruować go w **Top**?

Zadanie 20. Czy produkt zawsze musi istnieć?



Rysunek 2: Produkt - unikatowość