1 Grupy

Zadanie 1. Pomyśl o liczbach całkowitych i dodawaniu lub o permutacjach zbioru 0,1,2 i składaniu funkcji oraz uzupełnij definicję grupy:

Grupa to para $(G,*)$, gdzie G jest zbiorem, a funkcja $*: G\times G\to G$ (będziemy pisać $g*h$ lub gh zamiast $*(g,h)$) ma następujące własności:

1. istnieje element $e\in G$ taki, że .... Będziemy nazywać go *elementem neutralnym*.
2. dla każdego $g\in G$ istnieje element $g^{-1}\in G$ taki, że .... Nazywamy go *elementem odwrotnym do* g.
3. dla dowolnych $f,g,h\in G$ zachodzi równość ....

Zadanie 2. Ile istnieje grup czteroelementowych?[1]

Zadanie 3. Pomyśl o izometriach płaszczyzny (przekształceniach zachowujących odległości, jak symetrie, przesunięcia czy obroty). Co jest złożeniem dwóch symetrii? Co jest złożeniem symetrii i przesunięcia? Czy do każdej takiej izometrii umiemy łatwo podać izometrię odwrotną?

Zadanie 4. Pokaż, że każda grupa izomorficzna jest do grupy permutacji jakiegoś zbioru.

2 Topologia

2.1 Przestrzenie metryczne

Czasami mamy na zbiorze zadaną *metrykę* $d: X\times X\to\mathbb{R}$ o własnościach:

1. $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$
2. $d(x,y)=d(y,x)$ dla wszystkich $x,y\in X$
3. $d(x,y)\leqslant d(x,k)+d(k,x)$ dla wszystkich $x,y,k\in X$

W takim wypadku definiujemy *kulę* o środku w x i promieniu $r>0$:

$$B(x,r)=\{y\in X: d(x,y)<r\}$$

Zadanie 5. Narysuj kule w przestrzeniach:

1. X, $d(x,y)=1$ dla $x\neq y$
2. $\mathbb{R}$, $d(x_1,x_2)=|x_1-x_2|$
3. $\mathbb{R}^2$, $d(x_1,y_1,x_2,y_2)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
4. $\mathbb{R}^2$, $d(x_1,y_1,x_2,y_2)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$
5. $\mathbb{R}^2$, $d(x_1,y_1,x_2,y_2)=\max(|x_1-x_2|,|y_1-y_2|)$

[1] Z dokładnością do izomorfizmu. Heurystycznie chodzi o grupy, które mają taką samą strukturę, np. $\mathbb{Z}$ oraz $2\mathbb{Z}$ wyglądają dokładnie tak samo, poza tym, że mają inaczej nazwane elementy.

2.2 Przestrzenie topologiczne

Przestrzenią topologiczną nazywamy parę $(X,\mathcal{T})$, gdzie X jest zbiorem, a $\mathcal{T}$ jest rodziną podzbiorów X o następujących własnościach:

1. $\varnothing, X \in \mathcal{T}$
2. jeśli $A_i \in \mathcal{T}$ dla $i \in I$, to ich suma też należy do $\mathcal{T}$: $\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$
3. jeśli $A,B \in \mathcal{T}$, to $A \cap B \in \mathcal{T}$

Zbiór $\mathcal{T}$ nazywamy *topologią*, a jego elementy - *zbiorami otwartymi*.

Zadanie 6. Rozważmy przestrzeń metryczną (X,d). Mówimy, że zbiór $A \subseteq X$ jest otwarty jeśli dla każdego $a \in A$ istnieje $r_a > 0$ takie, że

$$B(a,r_a) \subseteq A.$$

Pokaż, że tak zdefiniowane zbiory otwarte rzeczywiście zadają topologię.

Zadanie 7. Jak wyglądają zbiory otwarte topologii wyznaczonych przez odległość bezwzględną na zbiorach $\mathbb{R},\mathbb{Z},\mathbb{Q}$?

Przykład 1. Topologia "rzeka", prosta z dwoma początkami.

Zadanie 8. Ile jest topologii na zbiorze $\{0,1,2\}$? (Z dokładnością do homeomorfizmu.)

Zadanie 9. Niech X będzie dowolnym zbiorem, a $\mathcal{T}$ będzie rodziną zawierającą zbiór pusty oraz dopełnienia wszystkich skończonych podzbiorów X. Pokaż, że $\mathcal{T}$ jest topologią.

Zadanie 10. Rozważmy rodzinę zespolonych wielomianów

$$S = \{w_i : i \in I\},\ w_i : \mathbb{C} \ni z \mapsto a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}.$$

Afiniczną rozmaitością algebraiczną $V(S)$ będziemy oznaczać zbiór liczb zespolonych, na których zerują się wszystkie wielomiany rodziny S. Pokaż, że dopełnienia wszystkich afinicznych rozmaitości algebraicznych tworzą topologię na $\mathbb{C}$ (nazywamy ją topologią Zariskiego).

3 Kategorie

Zadanie 11. Pomyśl o zbiorach i funkcjach lub grupach i homomorfizmach oraz uzupełnij definicję kategorii:

Kategorią nazywamy kolekcję obiektów $A,B,C...$, taką, że dla każdych dwóch obiektów A,B istnieje zbiór $\mathrm{Hom}(A,B)$ *morfizmów* z A do B, które można składać symbolem $\circ$. Mają one następujące własności:

1. Jeśli $f : A \to B$ oraz $g : B \to C$, to ....
2. Dla dowolnych trzech morfizmów $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ mamy równość: ....
3. Dla każdego obiektu X istnieje morfizm $\mathrm{Id}_X : X \to X$, taki że ....

Zadanie 12. Pokaż, że **Set**, **Top**, **Grp**, $\mathbf{Set}_*$, $\mathbf{Top}_*$ są kategoriami.

Przykład 2. Kategoria z trzema morfizmami.

$$
\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f_A"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f_B"] & \\
A & A\times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"] & B
\end{tikzcd}
$$

Rysunek 1: Produkt - definicja

3.1 Epi/mono/izo-morfizmy

Wprowadzimy pewne określenia morfizmów. Otóż niech $f:A\to B$ będzie morfizmem.

1. f jest *epimorfizmem* jeśli dla dowolnego obiektu C oraz morfizmów $g,g':B\to C$ z równości $g\circ f=g'\circ f$ wynika, że $g=g'$.
2. f is *monomorfizmem* jeśli dla dowolnego obiektu C oraz morfizmów $g,g':X\to A$ z równości $f\circ g=f\circ g'$ wynika, że $g=g'$.
3. f jest *izomorfizmem* jeśli istnieje $f':B\to A$ takie, że $f\circ f'=\mathrm{Id}_B$ oraz $f'\circ f=\mathrm{Id}_A$

Zadanie 13. Czym są epi/mono/izo-morfizmy w **Set**?

Zadanie 14. Scharakteryzuj (nie musi być formalnie) powyższe morfizmy w kategoriach **Top** i **Grp**.

Zadanie 15. Pokaż, że złożenie epi/mono/izo-morfizmów jest epi/mono/izo-morfizmem.

3.2 Podobiekt

Podobiektem obiektu A będziemy nazywać monomorfizm $g:B\to A$. Rozważając jednak kategorię, w której obiekty są pewnymi zbiorami, a morfizmy funkcjami, możemy myśleć o obrazie g (czyli zbiorze z dodatkową strukturą) jako o podobiekcie (np. podobiektem zbioru w kategorii **Set** jest podzbiór).

Zadanie 16. Pokaż, że podobiekt podobiektu jest podobiektem.

Zadanie 17. Scharakteryzuj podobiekty w **Set**, **Top**, **Grp**. Dlaczego w **Top** istnieje kilka topologii jakie można nadać podzbiorowi aby był nadal podobiektem?

3.3 Produkt

Rozważmy dwa obiekty A,B jakiejś kategorii. Ich *produktem* będziemy nazywać trójkę $(A\times B,\pi_A,\pi_B)$ taką, że:

- $A\times B$ jest obiektem
- $\pi_A:A\times B\to A,\pi_B:A\times B\to B$ to morfizmy
- jeśli weźmiemy dowolny obiekt X oraz morfizmy $f_A:X\to A,f_B:X\to B$ to istnieje *dokładnie jeden* morfizm $f:X\to A\times B$ taki, że diagram 2 komutuje (czyli $f_A=\pi_A\circ f$, $f_B=\pi_B\circ f$).

Zadanie 18. Pokaż, że produkt, jeśli istnieje, jest unikatowy z dokładnością do izomorfizmu.
Podpowiedź: niech $(A\tilde{\times}B,\tilde{\pi}_A,\tilde{\pi}_B)$ będzie drugim produktem. Wtedy diagram 2 komutuje.

Zadanie 19. Czym jest produkt w **Set** i **Grp**? W jaki sposób skonstruować go w **Top**?

Zadanie 20. Czy produkt zawsze musi istnieć?

$$
\begin{tikzcd}
 & A\times B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\
A & A\tilde{\times}B \arrow[l, "\tilde{\pi}_A"] \arrow[r, "\tilde{\pi}_B"] \arrow[d, "g"] & B \\
 & A\times B \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[ur, "\pi_B"'] &
\end{tikzcd}
$$

Rysunek 2: Produkt - unikatowość