# 1 Grupy

**Zadanie 1.** Pomyśl o liczbach całkowitych i dodawaniu lub o permutacjach zbioru $\{0, 1, 2\}$ i składaniu funkcji oraz uzupełnij definicję grupy:

*Grupa* to para $(G, *)$, gdzie $G$ jest zbiorem, a funkcja $*\colon G \times G \to G$ (będziemy pisać $g * h$ lub $gh$ zamiast $*(g, h)$) ma następujące własności:

1. istnieje element $e \in G$ taki, że ........... Będziemy nazywać go *elementem neutralnym*,
2. dla każdego $g \in G$ istnieje element $g^{-1} \in G$ taki, że ............ Nazywamy go *elementem odwrotnym do $g$*.
3. dla dowolnych $f, g, h \in G$ zachodzi równość ............

**Zadanie 2.** Ile istnieje grup czteroelementowych?[1]

**Zadanie 3.** Pomyśl o izometriach płaszyczny (przekształceniach zachowujących odległości, jak symetrie, przesunięcia czy obroty). Co jest złożeniem dwóch symetrii? Co jest złożeniem symetrii i przesunięcia? Czy do każdej takiej izometrii umiemy łatwo podać izometrię odwrotną?

**Zadanie 4.** Pokaż, że każda grupa izomorficzna jest do grupy permutacji jakiegoś zbioru.

# 2 Topologia

## 2.1 Przestrzenie metryczne

Czasami mamy na zbiorze zadaną *metrykę* $d\colon X \times X \to X$ o własnościach:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$ dla wszystkich $x,\ y \in X$,
3. $d(x, y) \leqslant d(x, k) + d(k, x)$ dla wszystkich $x,\ y,\ k \in X$.

W takim wypadku definiujemy *kulę* o środku w $x$ i promieniu $r > 0$:

$$B(x,\, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$$

**Zadanie 5.** Narysuj kulę $B(0, 1)$ w następujących przestrzeniach:

1. $\mathbb{R},\ d(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$,
2. $\mathbb{R}^2,\ d(x_1, y_1, x_2, y_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$,
3. $\mathbb{R}^2,\ d(x_1, y_1, x_2, y_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$,
4. $\mathbb{R}^2,\ d(x_1, y_1, x_2, y_2) = \max(|x_1 - x_2|, |y_1 - y_2|)$.

**Zadanie 6.** Niech $X$ będzie dowolnym zbiorem. Definiujemy *metrykę dyskretną*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = y \\ 1 & \text{dla } x \neq y \end{cases}$$

Sprawdź, że rzeczywiście jest to metryka. Jak wyglądają kule o różnych promieniach w tej przestrzeni?

[1] Z dokładnością do izomorfizmu. Heurystycznie chodzi o grupy, które mają taką samą strukturę, np. $\mathbb{Z}$ oraz $2\mathbb{Z}$ wyglądają dokładnie tak samo, poza tym, że mają inaczej nazwane elementy.

## 2.2 Przestrzenie topologiczne

*Przestrzenią topologiczną* nazywamy parę $(X, \mathcal{T})$, gdzie $X$ jest zbiorem, a $\mathcal{T}$ jest rodziną podzbiorów $X$ o następujących własnościach:

1. $\varnothing$, $X \in \mathcal{T}$,
2. jeśli $A_i \in \mathcal{T}$ dla $i \in I$, to ich suma też należy do $\mathcal{T}$:
$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$$
3. jeśli $A$, $B \in \mathcal{T}$, to $A \cap B \in \mathcal{T}$.

Zbiór $\mathcal{T}$ nazywamy *topologią*, a jego elementy – *zbiorami otwartymi*.

**Zadanie 7.** Rozważmy przestrzeń metryczną $(X,\, d)$. Mówimy, że zbiór $A \subseteq X$ jest otwarty jeśli dla każdego $a \in A$ istnieje $r_a > 0$ takie, że
$$B(a,\, r_a) \subseteq A.$$
Pokaż, że tak zdefiniowane zbiory otwarte rzeczywiście zadają topologię.

**Zadanie 8.** Jak wyglądają zbiory otwarte topologii wyznaczonych przez odległość bezwzględną na zbiorach $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$?

**Przykład 1.** Topologia „rzeka", prosta z dwoma początkami.

**Zadanie 9.** Ile jest topologii na zbiorze $\{0, 1, 2\}$? (Z dokładnością do homeomorfizmu).

**Zadanie 10.** Niech $X$ będzie dowolnym zbiorem, a $\mathcal{T}$ będzie rodziną zawierającą zbiór pusty oraz dopełnienia wszystkich skończonych podzbiorów $X$. Pokaż, że $\mathcal{T}$ jest topologią.

**Zadanie 11.** Rozważmy rodzinę zespolonych wielomianów
$$S = \{w_i : i \in I\},\ w_i : \mathbb{C} \ni z \mapsto a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}.$$
Afiniczną rozmaitością algebraiczną $\mathbb{V}(S)$ będziemy oznaczać zbiór liczb zespolonych, na których zerują się wszystkie wielomiany rodziny $S$. Pokaż, że dopełnienia wszystkich afinicznych rozmaitości algebraicznych tworzą topologię na $\mathbb{C}$ (nazywamy ją topologią Zariskiego).

# 3 Kategorie

**Zadanie 12.** Pomyśl o zbiorach i funkcjach lub grupach i homomorfizmach oraz uzupełnij definicję kategorii:

*Kategorią* nazywamy kolekcję obiektów $A, B, C \ldots$, taką, że dla każdych dwóch obiektów $A, B$ istnieje zbiór $\mathrm{Hom}(A, B)$ *morfizmów* z $A$ do $B$, które można składać symbolem $\circ$. Mają one następujące własności:

1. jeśli $f\colon A \to B$ oraz $g\colon B \to C$, to ............,
2. dla dowolnych trzech morfizmów $f\colon A \to B, g\colon B \to C, h\colon C \to D$ zachodzi równość ............,
3. dla każdego obiektu $X$ istnieje morfizm $\mathrm{id}_X\colon X \to X$, taki że ............

**Zadanie 13.** Pokaż, że **Set**, **Top**, **Grp**, **Set**$_*$, **Top**$_*$ są kategoriami.

**Przykład 2.** Kategoria **2** z trzema morfizmami.

## 3.1 Epi-, mono- oraz izomorfizmy

Wprowadzimy pewne określenia morfizmów. Otóż niech $f\colon A \to B$ będzie morfizmem.

1. $f$ jest *epimorfizmem* jeśli dla dowolnego obiektu $C$ oraz morfizmów $g, g'\colon B \to C$ z równości $g \circ f = g' \circ f$ wynika $g = g'$.
2. $f$ is *monomorfizmem* jeśli dla dowolnego obiektu $C$ oraz morfizmów $g, g'\colon X \to A$ z równości $f \circ g = f \circ g'$ wynika $g = g'$.
3. $f$ jest *izomorfizmem* jeśli istnieje $f'\colon B \to A$ takie, że $f \circ f' = \mathrm{id}_B$ oraz $f' \circ f = \mathrm{id}_A$

**Zadanie 14.** Czym są epi-, mono- oraz izomorfizmy w **Set**?

**Zadanie 15.** Scharakteryzuj (nie musi być formalnie) powyższe morfizmy w kategoriach **Top** i **Grp**.

**Zadanie 16.** Pokaż, że złożenie epimorfizmów jest epimorfizmem. (Analogicznie dla monomorfizmów i izomorfizmów).

## 3.2 Podobiekt

*Podobiektem* obiektu $A$ będziemy nazywać monomorfizm $g\colon B \to A$. Rozważając jednak kategorię, w której obiekty są pewnymi zbiorami, a morfizmy funkcjami, możemy myśleć o obrazie $g$ (czyli zbiorze z dodatkową strukturą) jako o podobiekcie (np. podobiektem zbioru w kategorii **Set** jest podzbiór).

**Zadanie 17.** Pokaż, że podobiekt podobiektu jest podobiektem.

**Zadanie 18.** Scharakteryzuj podobiekty w **Set**, **Top**, **Grp**. Dlaczego w **Top** istnieje kilka topologii jakie można nadać podzbiorowi aby był nadal podobiektem?

## 3.3 Produkt

Rozważmy dwa obiekty $A, B$ jakiejś kategorii. Ich *produktem* będziemy nazywać trójkę $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ taką, że:

- $A \times B$ jest obiektem,
- $\pi_A\colon A \times B \to A$, $\pi_B\colon A \times B \to B$ to morfizmy,
- jeśli weźmiemy dowolny obiekt $X$ oraz morfizmy $f_A\colon X \to A$ i $f_B\colon X \to B$ to istnieje *dokładnie jeden* morfizm $f\colon X \to A \times B$ taki, że diagram

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_A"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "f_B"] & \\ A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B \end{tikzcd}$$

jest przemienny (czyli $f_A = \pi_A \circ f$, $f_B = \pi_B \circ f$).

**Zadanie 19.** Pokaż, że produkt, jeśli istnieje, jest unikatowy z dokładnością do izomorfizmu.
Podpowiedź: niech $(P, p_A, p_B)$ będzie drugim produktem. Przeanalizuj diagram

$$\begin{tikzcd} & A \times B \arrow[dl, "\pi_A"'] \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "\pi_B"] & \\ A & P \arrow[l, "p_A"'] \arrow[r, "p_B"] \arrow[d, "g"] & B \\ & A \times B \arrow[ul, "\pi_A"] \arrow[ur, "\pi_B"'] & \end{tikzcd}$$

**Zadanie 20.** Czym jest produkt w **Set** i **Grp**? W jaki sposób skonstruować go w **Top**?

**Zadanie 21.** Czy produkt zawsze musi istnieć?

# 4 Funktor

*Funktory* to przekształcenia między kategoriami. Ściślej, funktor (*kowariantny*) $T\colon \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ to para „funkcji" (obie oznaczane $T$). Jedna przekształca obiekty z $\mathcal{B}$ na obiekty na $\mathcal{C}$, a druga morfizmy z $\mathcal{B}$ na morfizmy w $\mathcal{C}$, tak żeby

- $T(\mathrm{id}_B) = \mathrm{id}_{T(B)}$ dla wszystkich obiektów $B$ z $\mathcal{B}$,
- $T(f \circ g) = T(f) \circ T(g)$ dla wszystkich morfizmów $f$, $g$ w $B$ (dla których złożenie $f \circ g$ ma sens).

Funktor *kontrawariantny* jest zdefiniowany analogiczne, zmieniamy tylko drugie wymaganie na

- $T(f \circ g) = T(g) \circ T(f)$ dla wszystkich morfizmów $f$, $g$ w $\mathcal{B}$ (dla których złożenie $f \circ g$ ma sens).

**Przykład 3.** Funktor identycznościowy dla kategorii $\mathcal{B}$, to funktor $T\colon \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, który dla każdego obiektu i morfizmu zwraca go spowrotem.

**Przykład 4.** Funktor zapominalski dla kategorii **Top**, to funktor $T\colon \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ który dla każdej przestrzeni topologicznej $(X, \mathcal{T})$ zwraca $X$ i nie zmienia morfizmów. (Każda funkcja ciągła jest przecież funkcją).

**Przykład 5.** Zdefiniujemy funktory $F, G\colon \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ w następujący sposób: dla każdego zbioru $X$ obydwa zwracają zbiór potęgowy $P(X)$. $F$ zamienia morfizmy na branie obrazów, a $G$ na branie przeciwobrazów. To znaczy dla $f\colon X \to Y$:

- $F(f):\ P(X) \ni U \to f(U) \in P(Y)$
- $G(f):\ P(Y) \ni U \to f^{-1}(U) \in P(X)$

**Zadanie 22.** Pokaż, że funktory zdefiniowane w przykładach spełniają aksjomaty. Rozpoznaj, który jest funktorem kowariantnym, a który kontrawariantny.

**Zadanie 23.** Czy potrafisz podać inne przykłady funktorów?

# 5 Grupa fundamentalna

*Grupę fundamentalną* przestrzeni $(X, p)$ z $\mathbf{Top}_*$ oznaczamy $\pi(X, p)$. Jej elementami są klasy abstrakcji przekształceń:

$$f\colon \mathbb{S} \to X$$

spełniające warunek $f(1, 0) = p$, które są *homotopijne* – $f \sim g$ jeśli istnieje funkcja ciągła

$$F\colon I \times \mathbb{S} \to X$$

taka, że $F(0, \cdot) = f$ i $F(1, \cdot) = g$. (Wyobrażamy sobie, że zmieniając pierwszy parametr przeciągamy jedną pętelkę na drugą – spójrz na tablicę).

Określamy *mnożenie pętelek* $f$ i $g$ jako

$$(f * g)(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{dla } x \in [0, 1/2] \\ g(2x - 1) & \text{dla } x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

(Jedziemy po pętelce $f$, a potem po pętelce $g$. Musimy poruszać się dwa razy szybciej niż zwykle).

**Zadanie 24.** Pokaż, że mnożenie klas abstrakcji jest dobrze określone: $[f * g] = [f' * g']$ jeśli $[f] = [f']$ oraz $[g] = [g']$.

Następnie pokaż, że klasa abstrakcji funkcji stałej $c(x) = p$ jest identycznością. Pokazując łączność mnożenia oraz istnienie odwrotności zauważ, że otrzymaliśmy strukturę grupy.

**Zadanie 25.** Pokaż, że otrzymaliśmy funktor kowariantny $\pi\colon \mathbf{Top}_* \to \mathbf{Grp}$. (W jaki sposób działa na morfizmach?)

**Zadanie 26.** Pokaż, że jeżeli istnieje $f\colon I \to X$ takie, że $f(0) = p$ oraz $f(1) = q$ to $\pi(X,\ p)$ jest izomorficzne z $\pi(X,\ q)$.

**Uwaga 6.** W szczególności dla przestrzeni łukowo spójnych nie ma znaczenia jaki punkt wybierzemy, zawsze dostajeniemy „tę samą” grupę (z dokładnością do izomorfizmu). W takich przypadkach piszemy po prostu $\pi(X)$.

**Przykład 7.** Obliczenia dla $\pi(\mathbb{R})$ i $\pi(\mathbb{S})$ (tablica).

**Zadanie 27.** Obliczyć $\pi(\mathbb{R}^n)$ dla wszystkich $n \geqslant 0$.

**Zadanie 28.** Obliczyć $\pi(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$.

**Zadanie 29.** Udowodnij, że $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ nie jest homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$.

**Uwaga 8.** Przy pomocy analogicznych funktorów $\pi$ da się pokazać, że sfery $\mathbb{S}^n$ i $\mathbb{S}^m$ nie są homeomorficzne dla $n \neq m$. (Analogicznie dla przestrzeni Euklidesowych $\mathbb{R}^n$).

# 6 Funktor spójności

Przestrzeni topologiczna $X$ jest *niespójna* jeżeli istnieje niepusty i właściwy ($U \neq X$ i $U \neq \varnothing$) podzbiór $U \subset X$ taki, że jest jednocześnie otwarty i domknięty. Przestrzeń topologiczna jest *spójna* kiedy nie jest niespójna. *Spójną składową]* nazywamy maksymalny (w sensie zawierania), spójny i niepusty podzbiór $X$.

**Zadanie 30.** Pokaż, że jeżeli $A$ jest spójnym podzbiorem $X$, a $U,\ V$ są otwartymi rozłącznymi pozdbiorami $X$, to:

$$A \subseteq U \cup V \implies A \subseteq U \vee A \subseteq V$$

**Zadanie 31.** Pokaż, że spójne składowe tworzą partycję $X$.

**Zadanie 32.** Pokaż, że pod morfizmami obrazy zbiorów spójnych są spójne.

**Zadanie 33.** Skonstruuj funktor przypisujący przestrzeniem topologicznym zbiór ich spójnych składowych. W jaki sposób przekształca morfizmy?

**Zadanie 34.** Pokaż, że $\mathbb{R}$ nie jest homeomorficzne z $\mathbb{R}^2$.