1 Wstęp

Celem tych zadań jest oswojenie Cię z pojęciami, z których będziemy korzystać na warsztatach - zatem spróbuj rozwiązać wszystkie zadania, nabyta wiedza okaże się pomocna!

Żadna dodatkowa literatura nie powinna być potrzebna do rozwiązania tych zadań, jednak w razie problemów z zadaniami, sugestii zmian lub chęci zobaczenia określonych kategorii na warsztatach, zachęcamy do kontaktu.

Obok każdego zadania znajduje się liczba punktów, jakie planujemy za nie przyznać. Nie wykluczamy jednak zmian w punktacji. Za szczególnie eleganckie rozwiązanie, którego nie przewidzieliśmy, będziemy przyznawać dodatkowe punkty, wedle własnego poczucia estetyki.

2 Kategorie

Kategorią nazywamy kolekcję [1] obiektów $A, B, C \dots$, taką, że dla każdych dwóch obiektów A, B istnieje zbiór $\mathrm{Hom}(A, B)$ *morfizmów* z A do B. Na ogół piszemy $f : A \to B$ zamiast $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$. Zakładamy też, że istnieje operacja składania morfizmów $\circ$ posiadająca następujące własności:

1. Jeśli $f : A \to B$ oraz $g : B \to C$, to istnieje morfizm $g \circ f : A \to C$.
2. Dla dowolnych trzech morfizmów $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ mamy równość: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
3. Dla każdego obiektu X istnieje morfizm $\mathrm{Id}_X : X \to X$, taki że dla każdego morfizmu $f : A \to B$ mamy $\mathrm{Id}_B \circ f = f = f \circ \mathrm{Id}_A$.

1. [3] Niech obiektami będą zbiory, morfizmami funkcje, a operacją $\circ$ złożenie funkcji[2]. Pokaż, że jest to kategoria dowodząc, że:

1. dla dowolnych zbiorów A, B, wszystkie funkcje z A do B tworzą zbiór (nazywany $\mathrm{Hom}(A, B)$).
2. dla dowolnych trzech funkcji $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$ mamy równość: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.
3. dla każdego zbioru X znajdź funkcję[3] Id_X taką, że dla dowolnej $f : A \to B$ mamy $\mathrm{Id}_B \circ f = f = f \circ \mathrm{Id}_A$.

Kategorię tę nazywamy **Set**.

[1] Można myśleć o tym jak o zbiorze, do którego można włożyć *dowolnie* dużo elementów. Zainteresowanych jak uniknąć paradoksu zbioru wszystkich zbiorów odsyłamy do teorii klas Morse'a-Kelleya.

[2] Cóż za niezwykły zbieg okoliczności - to ten sam symbol!

[3] Ciekawe jak się może nazywać...

3 Morfizmy

3.1 Epimorfizmy

Niech $f : A \to B$ będzie morfizmem. Mówimy, że f is *epimorfizmem* jeśli dla dowolnego obiektu C oraz morfizmów $g, g' : B \to C$ z równości $g \circ f = g' \circ f$ wynika, że $g = g'$.

2. [4] Pokaż, że jeśli $f : A \to B$ oraz $g : B \to C$ są epimorfizmami, to $g \circ f$ też jest epimorfizmem.

3. [4] Pokaż, że w kategorii **Set** epimorfizmy to dokładnie surjekcje (każdy epimorfizm jest surjekcją, a każda surjekcja epimorfizmem).

Jako, że obiektami kategorii nie muszą być zbiory, pojęcie "funkcji na" w ogólności może nie mieć sensu, dlatego zdanie "każdy epimorfizm to surjekcja" nie musi mieć sensu. Okazuje się, że

4. [4] Skonstruuj kategorię, której obiektami są pewne zbiory (tak więc pojęcie surjekcji ma sens), natomiast istnieje epimorfizm niebędący surjekcją.

3.2 Monomorfizmy

Niech $f : A \to B$ będzie morfizmem. Mówimy, że f is *monomorfizmem* jeśli dla dowolnego obiektu C oraz morfizmów $g, g' : X \to A$ z równości $f \circ g = f \circ g'$ wynika, że $g = g'$.

5. [1] Pokaż, że jeśli $f : A \to B$ oraz $g : B \to C$ są monomorfizmami, to $g \circ f$ też jest monomorfizmem.

6. [1] Pokaż, że w kategorii **Set** monomorfizmy to dokładnie iniekcje (każdy monomorfizm jest iniekcją, a każda iniekcja monomorfizmem).

7. [1] Skonstruuj kategorię, której obiektami są pewne zbiory (tak więc pojęcie surjekcji ma sens), natomiast istnieje monomorfizm niebędący iniekcją.

3.3 Izomorfizmy

Niech $f : A \to B$ będzie morfizmem. Jeśli istnieje $f' : B \to A$ takie, że $f \circ f' = \mathrm{Id}_B$ oraz $f' \circ f = \mathrm{Id}_A$, to f nazywamy *izomorfizmem*.

8. *Będziemy wykorzystywać izomorfizmy do utożsamiania pewnych przestrzeni. W tym celu przyda nam się własności podobne do występujących w definicji relacji równoważności* [4].

[2] Pokaż, że:

1. dla każdego obiektu A istnieje izomorfizm z A do A.
2. jeśli istnieje izomorfizm z A do B, to istnieje też izomorfizm z B do A.
3. jeśli istnieje izomorfizm z A do B oraz z B do C, to istnieje też izomorfizm z A do C.

9. *To zadanie ma przekonać Cię, że znasz już sporo własności izomorfizmów.* [2]

1. Pokaż, że każdy izomorfizm jest monomorfizmem oraz epimorfizmem.
2. Skonstruuj kategorię, dowodzącą, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe (czyli, że istnieje morfizm będący epimorfizmem i monomorfizmem, natomiast nie izomorfizmem).

10. [1] Czym są izomorfizmy w kategorii **Set**?

4 Kategoria $\mathbf{Set}_*$ i funktory

Zbiorem z wyróżnionym punktem nazywamy parę (X, x), gdzie X jest zbiorem, a x jakimś jego elementem (czyli $x \in X$). Przekształceniem między zbiorami z wyróżnionymi punktami (X, x) oraz (Y, y) (zapisywanym jako $f : (X, x) \to (Y, y)$) nazwiemy funkcję $f : X \to Y$ taką, że $f(x) = y$.

11. [3] Pokaż, że zbiory z wyróżnionym punktem wraz z wymienionymi funkcjami tworzą kategorię. Nazywamy ją $\mathbf{Set}_*$.

Funktorem nazywamy regułę ζ, [5] która każdemu obiektowi A w kategorii $\mathcal{C}$ przypisuje obiekt $\zeta(A)$ w kategorii $\mathcal{D}$, a każdemu morfizmowi $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$

[4] Nazwanie "dokładności do izomorfizmu" relacją równoważności jest kuszące, natomiast relacje równoważności określone są na *zbiorach*. Kolekcja obiektów kategorii na ogół jest za duża do bycia zbiorem.

[5] Z przyczyn teoriomnogościowych nie jest to funkcja (trudno określić iloczyn kartezjański dwóch kolekcji, a co dopiero wybrać z niej (pod)zbiór).

w kategorii $\mathcal{C}$ przypisuje morfizm $\zeta(f) \in \mathrm{Hom}(\zeta(A), \zeta(B))$ w kategorii $\mathcal{D}$ zachowując złożenie [6] :

$$\zeta(f \circ g) = \zeta(f) \circ \zeta(g).$$

12. [2] Rozważmy kategorie $\mathbf{Set}_*$ oraz $\mathbf{Set}$ i wprowadźmy funktor[7] $\zeta(X, x) = X$, który zamienia zbiory z wyróżnionym punktem na zbiory.

1. Na co przechodzi funkcja $f : (X, x) \to (Y, y)$?
2. Pokaż, że ζ jest funktorem (znaczy, że zachowuje złożenie).

5 Grupy

Grupa to para $(G, *)$, gdzie G jest zbiorem, a funkcja $* : G \times G \to G$ (będziemy pisać $g * h$ lub gh zamiast $*(g, h)$) ma następujące własności:

1. istnieje element $e \in G$ taki, że $ge = eg = g$ dla każdego $g \in G$. Będziemy nazywać go *elementem neutralnym*.
2. dla każdego $g \in G$ istnieje element $\tilde{g} \in G$ taki, że $g\tilde{g} = \tilde{g}g = e$. Zazwyczaj piszemy g^{-1} zamiast $\tilde{g}$ oraz nazywamy go *elementem odwrotnym do g*.
3. dla dowolnych $f, g, h \in G$ zachodzi równość $(fg)h = f(gh)$.

13. Rozstrzygnij czy następujące zbiory z działaniami są grupami:

1. $(\mathbb{Z}, +)$
2. $(\mathbb{Z}, \cdot)$
3. $(\mathbb{Q}, \cdot)$
4. $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$, gdzie $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
5. $(\mathbb{Q}^*, +)$
6. $(\sigma_n, \circ)$, gdzie σ_n oznacza zbiór permutacji [8] zbioru n-elementowego, a $\circ$ jest zwykłym złożeniem funkcji

[6] Tak naprawdę w kategorii $\mathcal{C}$ mamy jedno złożenie - $\circ_{\mathcal{C}}$, a w kategorii jakieś zupełnie inne - $\circ_{\mathcal{D}}$. Dlatego też formalista mógłby napisać

$$\zeta(f \circ_{\mathcal{C}} g) = \zeta(f) \circ_{\mathcal{D}} \zeta(g).$$

My nie będziemy tego robić.

[7] Będąc bardzo formalnymi, powinno się napisać $\zeta((X, x))$, bo (X, x) jest przekształcanym obiektem, więc powinien stać w dodatkowych nawiasach.

[8] Permutacja na zbiorze X to bijekcja $X \to X$.

14. [4] Dlaczego:

1. istnieje *dokładnie jeden* element neutralny?
2. dla każdego elementu g istnieje *dokładnie jeden* element odwrotny?

5.1 Homomorfizmy

Jeśli G oraz H są grupami, to funkcję $f : G \to H$ nazywamy *homomorfizmem* jeśli $f(gh) = f(g)f(h)$ dla każdych $g, h \in G$. [9]

15. [2] Pokaż, że jeśli $f : G \to H$ jest homomorfizmem, to $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$ oraz $f(e) = \epsilon$, gdzie $e \in G, \epsilon \in H$ oznaczają elementy neutralne odpowiednich grup.

16. [3] Pokaż, że grupy wraz z homomorfizmami tworzą kategorię. Nazywamy ją **Grp**.

17. [2] Wykaż, że izomorfizmy w **Grp** to dokładnie bijektywne homomorfizmy.

18. [7] Ile jest, z dokładnością do izomorfizmu, grup:

1. o dwóch elementach?
2. o trzech elementach?
3. o czterech elementach?

Podpowiedź: pomyśl nad ograniczeniami jakie narzuca łączność mnożenia oraz istnienie elementu odwrotnego.

6 Topologia

6.1 Przeciwobraz funkcji

Niech $f : X \to Y$ będzie funkcją. Definiujemy pojęcia:

1. *obrazu* podzbioru: jeśli $A \subseteq X$, to

$$f(A) := \{y \in Y : \text{istnieje } x \in X \text{ takie, że } f(x) = y\}$$

[9] Zauważ, że nie piszemy już symbolu "mnożenia"

2. *przeciwobrazu* podzbioru: jeśli $B \subseteq Y$, to

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

19. *To zadanie pokazuje dlaczego później będziemy korzystać z przeciwobrazu.* [6] Niech $f : X \to Y$, oraz $A, B \subseteq X$ i $C, D \subseteq Y$. Pokaż, że:

1. $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$.
2. Podaj przykład, dowodzący, że zawierania nie można zastąpić znakiem równości.
3. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
4. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
5. $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
6. $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$

6.2 Przestrzeń topologiczna

Niech X będzie zbiorem. Jego *zbiorem potęgowym* $\mathcal{P}(X)$ nazywamy zbiór wszystkich jego podzbiorów [10] : $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$.

20. [1] Niech X będzie zbiorem o skończonej liczbie elementów n. Ile elementów ma zbiór $\mathcal{P}(n)$?

Przestrzenią topologiczną nazywamy parę $(X, \mathcal{T})$, gdzie X jest zbiorem, a $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ma następujące własności:

1. $\varnothing, X \in \mathcal{T}$
2. jeśli $A_i \in \mathcal{T}$ dla $i \in I$, to ich suma też należy do $\mathcal{T}$:

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$$

3. jeśli $A, B \in \mathcal{T}$, to $A \cap B \in \mathcal{T}$

Zbiór $\mathcal{T}$ nazywamy *topologią*, a jego elementy - *zbiorami otwartymi*.

[10] Jego istnieje gwarantuje aksjomatyka teorii mnogości.

21. [6] Niech X będzie nieskończonym zbiorem. Pokaż, że następujące zbiory są topologiami na X:

1. $\mathcal{T} = \{\varnothing, X\}$ (tak zwana *topologia trywialna*)
2. $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ (*topologia dyskretna*)
3. $\mathcal{T} = \{\varnothing\} \cup \{X \setminus A : A$ jest skończonym podzbiorem $X\}$ (*topologia koskończona*[11])

22. *Zazwyczaj pisząc "przestrzeń topologiczna $\mathbb{R}$" ma się na myśli $\mathbb{R}$ wyposażoną w pewną określoną topologię...*

[5] Mówimy, że $A \subseteq \mathbb{R}$ jest otwarty jeśli dla każdego $x \in A$ istnieje odcinek otwarty (a_x, b_x) taki, że $x \in (a_x, b_x) \subseteq A$.

1. Pokaż, że zbiory otwarte według powyższej definicji spełniają wszystkie aksjomaty topologii.
2. Pokaż, że każdy zbiór otwarty może być zapisany jako suma pewnej rodziny otwartych odcinków - to znaczy, że jeśli A jest zbiorem otwartym, to istnieją takie odcinki (a_i, b_i), $i \in I$, że:

$$A = \bigcup_i (a_i, b_i)$$

6.3 Funkcje ciągłe

Niech $(X, \mathcal{T})$ oraz (Y, τ) będą przestrzeniami topologicznymi. Funkcję $f : X \to Y$ taką, że $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$ dla każdego $B \in \tau$ nazywamy *funkcją ciągłą* i oznaczamy $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \tau)$.

23. [2] Pokaż, że funkcja identycznościowa $\mathrm{Id}_X : (X, \mathcal{T}) \to (X, \mathcal{T})$ jest ciągła.

24. [2] Pokaż, że funkcja stała $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \tau),\ f(x) = c$ jest ciągła.

25. [3] Pokaż, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x) = x^2$ jest ciągła. Podpowiedź: jak można zapisać każdy zbiór otwarty w $\mathbb{R}$? Jakie własności ma przeciwobraz?

[11] Chyba

6.4 Kategoria Top

26. [5] Pokaż, że przestrzenie topologiczne wraz z funkcjami ciągłymi tworzą kategorię. Nazywamy ją **Top**.

27. [3] Dlaczego:

1. monomorfizmy w **Top** to dokładnie (ciągłe) iniekcje?
2. epimorfizmy to dokładnie (ciągłe) surjekcje?
3. izomorfizmy to dokładnie (ciągłe) bijekcje? W tej kategorii nazywamy je *homeomorfizmami*.

Powodzenia!