

# 1 Wstęp

Celem tych zadań jest oswojenie Cię z pojęciami, z których będziemy korzystać na warsztatach - zatem spróbuj rozwiązać wszystkie zadania, nabyta wiedza okaże się pomocna!

Żadna dodatkowa literatura nie powinna być potrzebna do rozwiązania tych zadań, jednak w razie problemów z zadaniami, sugestii zmian lub chęci zobaczenia określonych kategorii na warsztatach, zachęcamy do kontaktu.

Obok każdego zadania znajduje się liczba punktów, jakie planujemy za nie przyznać. Nie wykluczamy jednak zmian w punktacji. Za szczególnie eleganckie rozwiązanie będziemy przyznawać dodatkowe punkty, wedle własnego poczucia estetyki.

# 2 Kategorie

*Kategorią* nazywamy kolekcję<sup>1</sup> obiektów  $A, B, C \dots$ , taką, że dla każdych dwóch obiektów  $A, B$  istnieje zbiór  $\text{Hom}(A, B)$  *morfizmów* z  $A$  do  $B$ . Na ogół piszemy  $f : A \rightarrow B$  zamiast  $f \in \text{Hom}(A, B)$ . Zakładamy też, że istnieje operacja składania morfizmów  $\circ$  posiadająca następujące własności:

1. Jeśli  $f : A \rightarrow B$  oraz  $g : B \rightarrow C$ , to istnieje morfizm  $g \circ f : A \rightarrow C$ .
2. Dla dowolnych trzech morfizmów  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$  mamy równość:  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ .
3. Dla każdego obiektu  $X$  istnieje morfizm  $\text{Id}_X : X \rightarrow X$ , taki że dla każdego morfizmu  $f : A \rightarrow B$  mamy  $\text{Id}_B \circ f = f = f \circ \text{Id}_A$ .

1. [8] Niech obiektami będą zbiory, morfizmami funkcje, a operacją  $\circ$  złożenie funkcji<sup>2</sup>. Pokaż, że jest to kategoria dowodząc, że:

1. dla dowolnych zbiorów  $A, B$ , wszystkie funkcje z  $A$  do  $B$  tworzą zbiór (nazywany  $\text{Hom}(A, B)$ ).
2. dla dowolnych trzech funkcji  $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$  mamy równość:  $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ .
3. dla każdego zbioru  $X$  znajdź funkcję<sup>3</sup>  $\text{Id}_X$  taką, że dla dowolnej  $f : A \rightarrow B$  mamy  $\text{Id}_B \circ f = f = f \circ \text{Id}_A$ .

Kategorię tę nazywamy **Set**.

---

<sup>1</sup>Można myśleć o tym jak o zbiorze, do którego można włożyć *dowolnie* dużo elementów. Zainteresowanych jak uniknąć paradoksu zbioru wszystkich zbiorów odsyłamy do teorii klas Morse'a-Kelleya.

<sup>2</sup>Cóż za niezwykły zbieg okoliczności - to ten sam symbol!

<sup>3</sup>Ciekawe jak się może nazywać...

## 3 Morfizmy

### 3.1 Epimorfizmy

Niech  $f : A \rightarrow B$  będzie morfizmem. Mówimy, że  $f$  jest *epimorfizmem* jeśli dla dowolnego obiektu  $C$  oraz morfizmów  $g, g' : B \rightarrow C$  z równości  $g \circ f = g' \circ f$  wynika, że  $g = g'$ .

2. [4] Pokaż, że jeśli  $f : A \rightarrow B$  oraz  $g : B \rightarrow C$  są epimorfizmami, to  $g \circ f$  też jest epimorfizmem.

3. [4] Pokaż, że w kategorii **Set** epimorfizmy to dokładnie surjekcje (każdy epimorfizm jest surjekcją, a każda surjekcja epimorfizmem).

Jako, że obiektami kategorii nie muszą być zbiory, pojęcie "funkcji na" w ogólności może nie mieć sensu, dlatego zdanie "każdy epimorfizm to surjekcja" nie musi mieć sensu. Okazuje się, że nawet jeśli obiektami są *pewne* zbiory, nie musi to być prawda.

4. [5] Skonstruuj kategorię, której obiektami są pewne zbiory (tak więc pojęcie surjekcji ma sens), natomiast istnieje epimorfizm niebędący surjekcją.

### 3.2 Monomorfizmy

Niech  $f : A \rightarrow B$  będzie morfizmem. Mówimy, że  $f$  is *monomorfizmem* jeśli dla dowolnego obiektu  $C$  oraz morfizmów  $g, g' : X \rightarrow A$  z równości  $f \circ g = f \circ g'$  wynika, że  $g = g'$ .

5. [1] Pokaż, że jeśli  $f : A \rightarrow B$  oraz  $g : B \rightarrow C$  są monomorfizmami, to  $g \circ f$  też jest monomorfizmem.

6. [1] Pokaż, że w kategorii **Set** monomorfizmy to dokładnie iniekcje (każdy monomorfizm jest iniekcją, a każda iniekcja monomorfizmem).

7. [1] Skonstruuj kategorię, której obiektami są pewne zbiory (tak więc pojęcie iniekcji ma sens), natomiast istnieje monomorfizm niebędący iniekcją.

### 3.3 Izomorfizmy

Niech  $f : A \rightarrow B$  będzie morfizmem. Jeśli istnieje  $f' : B \rightarrow A$  takie, że  $f \circ f' = \text{Id}_B$  oraz  $f' \circ f = \text{Id}_A$ , to  $f$  nazywamy *izomorfizmem*.

8. Będziemy wykorzystywać izomorfizmy do utożsamiania pewnych przestrzeni. W tym celu przydadzą nam się własności podobne do tych występujących w definicji relacji równoważności<sup>4</sup>.

[4] Pokaż, że:

1. dla każdego obiektu  $A$  istnieje izomorfizm z  $A$  do  $A$ .
2. jeśli istnieje izomorfizm z  $A$  do  $B$ , to istnieje też izomorfizm z  $B$  do  $A$ .
3. jeśli istnieje izomorfizm z  $A$  do  $B$  oraz z  $B$  do  $C$ , to istnieje też izomorfizm z  $A$  do  $C$ .

9. To zadanie ma przekonać Cię, że znasz już sporo własności izomorfizmów.  
[3]

1. Pokaż, że każdy izomorfizm jest monomorfizmem oraz epimorfizmem.
2. Skonstruuj kategorię, dowodzącą, że twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe (czyli, że istnieje morfizm będący epimorfizmem i monomorfizmem, natomiast nie izomorfizmem).

10. [1] Czym są izomorfizmy w kategorii **Set**?

## 4 Kategoria $\mathbf{Set}_*$ i funktory

Zbiorem z wyróżnionym punktem nazywamy parę  $(X, x)$ , gdzie  $X$  jest zbiorem, a  $x$  jakimś jego elementem (czyli  $x \in X$ ). Przekształceniem między zbiorami z wyróżnionymi punktami  $(X, x)$  oraz  $(Y, y)$  (zapisywanym jako  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ ) nazwiemy funkcję  $f : X \rightarrow Y$  taką, że  $f(x) = y$ .

11. [5] Pokaż, że zbiory z wyróżnionym punktem wraz z wymienionymi funkcjami tworzą kategorię. Nazywamy ją **Set**<sub>\*</sub>.

*Funktorem* nazywamy regułę  $\zeta$ ,<sup>5</sup> która każdemu obiektowi  $A$  w kategorii  $\mathcal{C}$  przypisuje obiekt  $\zeta(A)$  w kategorii  $\mathcal{D}$ , a każdemu morfizmowi  $f \in \text{Hom}(A, B)$

---

<sup>4</sup>Nazwanie "dokładności do izomorfizmu" relacją równoważności jest kuszące, natomiast relacje równoważności określone są na *zbiorach*. Kolekcja obiektów kategorii na ogół jest za duża do bycia zbiorem.

<sup>5</sup>Z przyczyn teorii mnogościowych nie jest to funkcja (trudno określić iloczyn kartezjański dwóch kolekcji, a co dopiero wybrać z niej (pod)zbiór).

w kategorii  $\mathcal{C}$  przypisuje morfizm  $\zeta(f) \in \text{Hom}(\zeta(A), \zeta(B))$  w kategorii  $\mathcal{D}$  zachowując złożenie <sup>6</sup> :

$$\zeta(f \circ g) = \zeta(f) \circ \zeta(g).$$

**12.** [3] Rozważmy kategorie  $\mathbf{Set}_*$  oraz  $\mathbf{Set}$  i wprowadźmy funktor<sup>7</sup>  $\zeta(X, x) = X$ , który zamienia zbiory z wyróżnionym punktem na zbiory.

1. Na co przechodzi funkcja  $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ ?
2. Pokaż, że  $\zeta$  jest funktorem (znaczy, że zachowuje złożenie).

## 5 Grupy

*Grupa* to para  $(G, *)$ , gdzie  $G$  jest zbiorem, a funkcja  $*$  :  $G \times G \rightarrow G$  (będziemy pisać  $g * h$  lub  $gh$  zamiast  $*(g, h)$ ) ma następujące własności:

1. istnieje element  $e \in G$  taki, że  $ge = eg = g$  dla każdego  $g \in G$ . Będziemy nazywać go *elementem neutralnym*.
2. dla każdego  $g \in G$  istnieje element  $\tilde{g} \in G$  taki, że  $g\tilde{g} = \tilde{g}g = e$ . Zazwyczaj piszemy  $g^{-1}$  zamiast  $\tilde{g}$  oraz nazywamy go *elementem odwrotnym do  $g$* .
3. dla dowolnych  $f, g, h \in G$  zachodzi równość  $(fg)h = f(gh)$ .

**13.** [3] Rozstrzygnij czy następujące zbiory z działaniami są grupami:

1.  $(\mathbb{Z}, +)$
2.  $(\mathbb{Z}, \cdot)$
3.  $(\mathbb{Q}, \cdot)$
4.  $(\mathbb{Q}^*, \cdot)$ , gdzie  $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
5.  $(\mathbb{Q}^*, +)$
6.  $(\sigma_n, \circ)$ , gdzie  $\sigma_n$  oznacza zbiór permutacji <sup>8</sup> zbioru  $n$ -elementowego, a  $\circ$  jest zwykłym złożeniem funkcji

---

<sup>6</sup>Tak naprawdę w kategorii  $\mathcal{C}$  mamy jedno złożenie -  $\circ_{\mathcal{C}}$ , a w kategorii jakieś zupełnie inne -  $\circ_{\mathcal{D}}$ . Dlatego też ktoś mógłby napisać

$$\zeta(f \circ_{\mathcal{C}} g) = \zeta(f) \circ_{\mathcal{D}} \zeta(g).$$

My nie będziemy tego robić.

<sup>7</sup>Będąc bardzo formalnymi, powinno się napisać  $\zeta((X, x))$ , bo  $(X, x)$  jest przekształcanym obiektem, więc powinien stać w dodatkowych nawiasach.

<sup>8</sup>Permutacja zbioru  $X$  to bijekcja  $X \rightarrow X$ .

14. [4] Dlaczego:

1. istnieje *dokładnie jeden* element neutralny?
2. dla każdego elementu  $g$  istnieje *dokładnie jeden* element odwrotny?

## 5.1 Homomorfizmy

Jeśli  $G$  oraz  $H$  są grupami, to funkcję  $f : G \rightarrow H$  nazywamy *homomorfizmem* jeśli  $f(gh) = f(g)f(h)$  dla każdych  $g, h \in G$ .<sup>9</sup>

15. [4] Pokaż, że jeśli  $f : G \rightarrow H$  jest homomorfizmem, to  $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$  oraz  $f(e) = \epsilon$ , gdzie  $e \in G, \epsilon \in H$  oznaczają elementy neutralne odpowiednich grup.

16. [3] Pokaż, że grupy wraz z homomorfizmami tworzą kategorię. Nazywamy ją **Grp**.

17. [2] Wykaż, że izomorfizmy w **Grp** to dokładnie bijektywne homomorfizmy.

18. [8] Ile jest, z dokładnością do izomorfizmu<sup>10</sup>, grup:

1. o dwóch elementach?
2. o trzech elementach?
3. o czterech elementach?

Podpowiedź: pomyśl nad ograniczeniami jakie narzuca łączność mnożenia oraz istnienie elementu odwrotnego.

## 6 Topologia

### 6.1 Przeciwobraz funkcji

Niech  $f : X \rightarrow Y$  będzie funkcją. Definiujemy pojęcia:

---

<sup>9</sup>Zauważ, że nie piszemy już symbolu "mnożenia"

<sup>10</sup>To znaczy, że nie rozróżniamy grup, które są izomorficzne. Na przykład w kategorii **Set** istnieje tylko jeden zbiór dwunastoelementowy, licząc z dokładnością do izomorfizmu, czyli bijekcji.

1. *obrazu* podzbioru: jeśli  $A \subseteq X$ , to

$$f(A) := \{y \in Y : \text{istnieje } x \in X \text{ takie, że } f(x) = y\}$$

2. *przeciwwobrazu* podzbioru: jeśli  $B \subseteq Y$ , to

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

**19.** To zadanie pokazuje dlaczego później będziemy korzystać z przeciwwobrazu.

[12] Niech  $f : X \rightarrow Y$ , oraz  $A, B \subseteq X$  i  $C, D \subseteq Y$ . Pokaż, że:

1.  $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$ .
2. Podaj przykład, dowodzący, że zawierania nie można zastąpić znakiem równości.
3.  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
4.  $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$
5.  $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$
6.  $f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)$

## 6.2 Przestrzeń topologiczna

Niech  $X$  będzie zbiorem. Jego *zbiorem potęgowym*  $\mathcal{P}(X)$  nazywamy zbiór wszystkich jego podzbiorów <sup>11</sup> :  $\mathcal{P}(X) = \{A : A \subseteq X\}$ .

**20.** [1] Niech  $X$  będzie zbiorem o skończonej liczbie elementów  $n$ . Ile elementów ma zbiór  $\mathcal{P}(n)$ ?

*Przestrzeń topologiczną* nazywamy parę  $(X, \mathcal{T})$ , gdzie  $X$  jest zbiorem, a  $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  ma następujące własności:

1.  $\emptyset, X \in \mathcal{T}$
2. jeśli  $A_i \in \mathcal{T}$  dla  $i \in I$ , to ich suma też należy do  $\mathcal{T}$ :

$$\bigcup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$$

3. jeśli  $A, B \in \mathcal{T}$ , to  $A \cap B \in \mathcal{T}$

Zbiór  $\mathcal{T}$  nazywamy *topologią*, a jego elementy - *zbiorami otwartymi*.

---

<sup>11</sup>Jego istnienie gwarantuje aksjomatyka teorii mnogości.

**21.** [8] Niech  $X$  będzie nieskończonym zbiorem. Pokaż, że następujące zbiory są topologiami na  $X$ :

1.  $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$  (tak zwana *topologia trywialna*)
2.  $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$  (*topologia dyskretna*)
3.  $\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{X \setminus A : A \text{ jest skończonym podzbiorem } X\}$  (*topologia koskończona*<sup>12</sup>)

**22.** Zazwyczaj pisząc "przestrzeń topologiczna  $\mathbb{R}$ " ma się na myśli  $\mathbb{R}$  wyposażoną w pewną określoną topologię...

[5] Mówimy, że  $A \subseteq \mathbb{R}$  jest otwarty jeśli dla każdego  $x \in A$  istnieje odcinek otwarty  $(a_x, b_x)$  taki, że  $x \in (a_x, b_x) \subseteq A$ .

1. Pokaż, że zbiory otwarte według powyższej definicji spełniają wszystkie aksjomaty topologii.
2. Pokaż, że każdy zbiór otwarty może być zapisany jako suma pewnej rodziny otwartych odcinków - to znaczy, że jeśli  $A$  jest zbiorem otwartym, to istnieją takie odcinki  $(a_i, b_i)$ ,  $i \in I$ , że:

$$A = \bigcup_i (a_i, b_i)$$

### 6.3 Funkcje ciągłe

Niech  $(X, \mathcal{T})$  oraz  $(Y, \tau)$  będą przestrzeniami topologicznymi. Funkcję  $f : X \rightarrow Y$  taką, że  $f^{-1}(B) \in \mathcal{T}$  dla każdego  $B \in \tau$  nazywamy *funkcją ciągłą* i oznaczamy  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \tau)$ .

**23.** [5] Pokaż, że funkcja identycznościowa  $\text{Id}_X : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$  jest ciągła.

**24.** [5] Pokaż, że funkcja stała  $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \tau)$ ,  $f(x) = c$  jest ciągła.

**25.** [3] Pokaż, że funkcja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x) = x^2$  jest ciągła. Podpowiedź: jak można zapisać każdy zbiór otwarty w  $\mathbb{R}$ ? Jakie własności ma przeciwobraz?

---

<sup>12</sup>Chyba... jakoś to nie brzmi

## 6.4 Kategoria **Top**

**26.** [5] Pokaż, że przestrzenie topologiczne wraz z funkcjami ciągłymi tworzą kategorię. Nazywamy ją **Top**.

**27.** [3] Dlaczego:

1. monomorfizmy w **Top** to dokładnie (ciągłe) iniekcje?
2. epimorfizmy to dokładnie (ciągłe) surjekcje?
3. izomorfizmy to dokładnie (ciągłe) bijekcje? W tej kategorii nazywamy je *homeomorfizmami*.

Powodzenia!