# Potencjał elektromagnetyczny

## Zadanie

Rozwiązanie równania:

$$\frac{\mathrm{d}^2\phi}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_r}, \quad \phi'(0) + \phi(0) = 5, \quad \phi(3) = 2,$$

dodatkowo:

$$\epsilon_r = \begin{cases} 10, & \text{dla } x \in [0,1] \\ 5, & \text{dla } x \in (1,2] \\ 1, & \text{dla } x \in (2,3] \end{cases},$$

na dziedzinie $\Omega = (0,3)$.

## Rozwiązanie

Zauważmy, że z warunku brzegowego Dirichleta, dla brzegu prawego otrzymamy:

$$\begin{gathered} \phi(3) = w + \tilde{\phi} = w + 2\varphi_n, \\ w(3) = 0,\ \phi' = w',\ \phi'' = w'', \\ w'(0) + w(0) = 3, \end{gathered}$$

gdzie $\varphi_n$ jest $n$-tą funkcją testującą. Podstawiając do równania, mnożąc przez funkcje testującą $v$ oraz całkując po $\Omega$ otrzymamy:

$$\int_\Omega v\phi''\,dx = -\int_\Omega \frac{v\rho}{\epsilon_r}\,dx$$

Całkując lewą stronę przez części:

$$\begin{aligned} \int_\Omega v\phi''\,dx = v\phi'\Big|_\Omega - \int_\Omega v'\phi'\,dx = \\ = v(3)\phi'(3) - v(0)\phi'(0) - \int_\Omega v'\phi'\,dx = \\ = -v(0)\phi'(0) - \int_\Omega v'\phi'\,dx.\ \forall_v : v(3) = 0. \end{aligned}$$

W ostatnim przejściu skorzystałem z warunku Dirichleta. Podstawiając $\phi'(0) + \phi(0) = 5$:

$$v(0)\phi(0) - \int_\Omega v'\phi'\,dx = 5v(0) - \int_\Omega \frac{v\rho}{\epsilon_r}\,dx \iff B(\phi, v) = L(v),$$

przy czym:

$$\begin{gathered} B(\phi, v) = v(0)\phi(0) - \int_\Omega v'\phi'\,dx \\ L(v) = 5v(0) - \int_\Omega \frac{v\rho}{\epsilon_r}\,dx, \end{gathered}$$

Podstawiając $\phi = w + 2\varphi_n$ oraz korzystając z jednorodności formy dwuliniowej $B(a,b)$:

$$B(\phi, v) = B(w + 2\varphi_n, v) = B(w, v) + 2B(\varphi_n, v).$$

Co pozwala zapisać sformułowanie wariacyjne:

$$B(w, v) = L(v) - 2B(\varphi_n, v) = \tilde{L}(v).$$

To równanie będziemy rozwiązywać w przestrzeni $V = \langle \varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_{n-1} \rangle$, ze względu na prawostronny warunek Dirichleta. Macierzowo możemy zapisać:

$$\mathbf{Bw} = \tilde{\mathbf{L}} \iff$$
$$\begin{bmatrix} B(\varphi_1,\varphi_1) & B(\varphi_1,\varphi_2) & \cdots & B(\varphi_1,\varphi_{n-1}) \\ B(\varphi_2,\varphi_1) & B(\varphi_2,\varphi_2) & \cdots & B(\varphi_2,\varphi_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(\varphi_{n-1},\varphi_1) & B(\varphi_{n-1},\varphi_2) & \cdots & B(\varphi_{n-1},\varphi_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(\varphi_1) - 2B(\varphi_n,\varphi_1) \\ L(\varphi_2) - 2B(\varphi_n,\varphi_2) \\ \vdots \\ L(\varphi_{n-1}) - 2B(\varphi_n,\varphi_{n-1}) \end{bmatrix} (*)$$

gdzie $\forall_{1 \leq i \leq n} : \varphi_i$, to odpowiednie funkcje testujące, których suma supportów pokrywa całą dziedzinę $\Omega$. Pozwala to przybliżyć $\phi$:

$$\phi = \sum_{i=1}^{n-1} w_i \phi_i + \tilde{\phi} = \sum_{i=1}^{n-1} w_i \phi_i + 2\varphi_n.$$

$(*)$ Jako, że $B(a,b)$ jest symetryczne względem swoich argumentów $B(a,b) = B(b,a)$, to możemy zapisać macierz tak jak powyżej, a nie $B^T$.