

## Potencjał elektromagnetyczny

### Zadanie

Rozwiązanie równania:

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_r}, \quad \phi'(0) + \phi(0) = 5, \quad \phi(3) = 2,$$

dodatkowo:

$$\epsilon_r = \begin{cases} 10, & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 5, & \text{dla } x \in (1, 2] \\ 1, & \text{dla } x \in (2, 3] \end{cases}$$

na dziedzinie  $\Omega = (0, 3)$ .

### Rozwiązanie

Zauważmy, że z warunku brzegowego Dirichleta, dla brzegu prawego otrzymamy:

$$\begin{aligned} \phi(3) &= w + \tilde{\phi} = w + 2\varphi_n, \\ w(3) &= 0, \quad \phi' = w', \quad \phi'' = w'', \\ w'(0) + w(0) &= 3, \end{aligned}$$

gdzie  $\varphi_n$  jest  $n$ -tą funkcją testującą. Podstawiając do równania, mnożąc przez funkcję testującą  $v$  oraz całkując po  $\Omega$  otrzymamy:

$$\int_{\Omega} v\phi'' dx = - \int_{\Omega} \frac{v\rho}{\epsilon_r} dx.$$

Całkując lewą stronę przez części:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v\phi'' dx &= v\phi' \Big|_{\Omega} - \int_{\Omega} v'\phi' dx = \\ &= v(3)\phi'(3) - v(0)\phi'(0) - \int_{\Omega} v'\phi' dx = \\ &= -v(0)\phi'(0) - \int_{\Omega} v'\phi' dx. \quad \forall v : v(3) = 0. \end{aligned}$$

W ostatnim przejściu skorzystałem z warunku Dirichleta. Podstawiając  $\phi'(0) + \phi(0) = 5$ :

$$v(0)\phi(0) - \int_{\Omega} v'\phi' dx = 5v(0) - \int_{\Omega} \frac{v\rho}{\epsilon_r} dx \iff B(\phi, v) = L(v),$$

przy czym:

$$\begin{aligned} B(\phi, v) &= v(0)\phi(0) - \int_{\Omega} v'\phi' dx, \\ L(v) &= 5v(0) - \int_{\Omega} \frac{v\rho}{\epsilon_r} dx. \end{aligned}$$

Podstawiając  $\phi = w + 2\varphi_n$  oraz korzystając z jednorodności formy dwuliniowej  $B(a, b)$ :

$$B(\phi, v) = B(w + 2\varphi_n, v) = B(w, v) + 2B(\varphi_n, v).$$

Co pozwala zapisać sformułowanie wariacyjne:

$$B(w, v) = L(v) - 2B(\varphi_n, v) = \tilde{L}(v).$$

To równanie będziemy rozwiązywać w przestrzeni  $V = \langle \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1} \rangle$ , ze względu na prawostronny warunek Dirichleta. Macierzowo możemy zapisać:

$$\mathbf{B}\mathbf{w} = \tilde{\mathbf{L}} \iff \begin{bmatrix} B(\varphi_1, \varphi_1) & B(\varphi_1, \varphi_2) & \cdots & B(\varphi_1, \varphi_{n-1}) \\ B(\varphi_2, \varphi_1) & B(\varphi_2, \varphi_2) & \cdots & B(\varphi_2, \varphi_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B(\varphi_{n-1}, \varphi_1) & B(\varphi_{n-1}, \varphi_2) & \cdots & B(\varphi_{n-1}, \varphi_{n-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L(\varphi_1) - 2B(\varphi_n, \varphi_1) \\ L(\varphi_2) - 2B(\varphi_n, \varphi_2) \\ \vdots \\ L(\varphi_{n-1}) - 2B(\varphi_n, \varphi_{n-1}) \end{bmatrix}, (*)$$

gdzie  $\forall 1 \leq i \leq n : \varphi_i$ , to odpowiednie funkcje testujące, których suma supportów pokrywa całą dziedzinę  $\Omega$ . Pozwala to przybliżyć  $\phi$ :

$$\phi \approx \sum_{i=1}^{n-1} w_i \varphi_i + \tilde{\phi} = \sum_{i=1}^{n-1} w_i \varphi_i + 2\varphi_n.$$

(\*) Jako, że  $B(a, b)$  jest symetryczne względem swoich argumentów  $B(a, b) = B(b, a)$ , to możemy zapisać macierz tak jak powyżej, a nie  $B^T$ .