

# Obliczanie wskaźnika uwarunkowania macierzy

Paweł Koźmiński

Projekt nr 1

## 1. Cel zadania

Celem zadania jest obliczenie wskaźnika uwarunkowania kwadratowej macierzy niesobliwej  $A(n \times n)$  przy pomocy miary Frobeniusa. Sposób obliczenia owej miary prezentuje się następująco:

$$\text{cond}(A) = \|A^{-1}\|_F \cdot \|A\|_F$$

gdzie  $\|\cdot\|_F$  oznacza normę Frobeniusa, obliczaną przy pomocy wzoru:

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2}$$

W celu obliczania w Matlabie powyższej normy, została wprowadzona implementacja kodu `norm()`. Zadeklarowana przez mnie funkcja zatytułowana `myCond()` jako argument może przyjąć dowolną kwadratową macierz o wartościach ze zbioru liczb zespolonych  $\mathbb{C}$ . Zwracany jest wektor trzech wartości: wskaźnika uwarunkowania oraz współczynników  $r_R$  i  $r_L$ .

## 2. Słowem wstępu – czym tak naprawdę jest wskaźnik uwarunkowania macierzy?

Obliczony współczynnik – wskaźnik uwarunkowania macierzy – określa, w jakim stopniu błąd wartości danych wejściowych wpływa na dokładność obliczonego wyniku. Innymi słowy, za Wikipedią, wskaźnik uwarunkowania pozwala oszacować, z jaką maksymalnie dokładnością możemy podać wynik. Oczywiście im mniej on wynosi, tym lepiej uwarunkowane jest zadanie poszukiwania wektora rozwiązań układu równań  $Ax = b$ .

### 3. Co było najtrudniejsze w zadaniu?

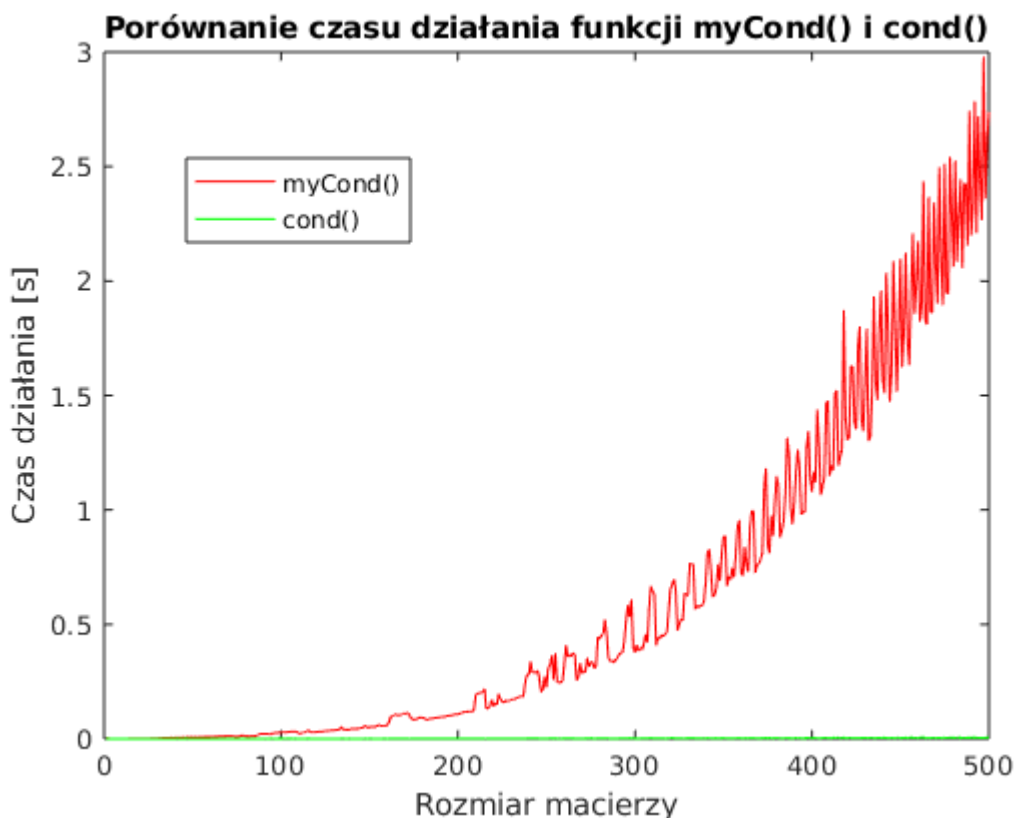
Niemniej jednak, samo wyznaczenie wskaźnika uwarunkowania macierzy okazało się nie być najbardziej istotnym punktem wykonania projektu. Jednym z wymagań okazało się być obliczanie odwrotności macierzy przy pomocy rozkładu  $P*A=L*U$  obliczanego przy pomocy algorytmu eliminacji Gaussa z częściowym wyborem elementu głównego – *GEPP*. Po wyznaczeniu rozkładu za pomocą własnej funkcji *gepp()*, należało skorzystać z przekształconej równości

$$A^{-1}=U^{-1}*L^{-1}*P \text{ .}$$

Odwrotności dolnej macierzy *L* oraz górnej *U* obliczałem za pomocą funkcji, odpowiednio, *invLower()* oraz *invUpper()* korzystających z algorytmów Forward Substitution oraz BackwardSubstitution. W taki sposób odwrotność wyznaczana jest w finalnej funkcji *myCond()*.

### 4. Porównanie działania funkcji z odpowiednikiem Matlab'a i analiza wyników

Analogiczną funkcją wbudowaną w Matlab'a do obliczania wskaźnika uwarunkowania jest *cond()*, która jako jeden ze swoich parametrów przyjmuje również rodzaj normy – w naszym przypadku 'fro'. Celem testów przygotowałem porównanie czasu działania oraz wyników obu funkcji.



Wykres 1: Porównanie czasu działania funkcji własnej oraz domyślnej na losowych macierzach różnego rozmiaru

Jak widać na załączonej grafice, wbudowana funkcja jest znacznie lepiej zoptymalizowana i zauważalna różnica między czasem działania funkcji zaczyna się pojawiać już dla macierzy rozmiaru 200 x 200.

Jak zatem prezentuje się dokładność moich obliczeń? Częścią było wykonanie testów dla macierzy Wilkinsona rozmiaru 100 x 100. (Macierz Wilkinsona jest macierzą trójdziagonalną, której wszystkie wartości własne są niemal parami równe). Macierz ta wygląda następująco:

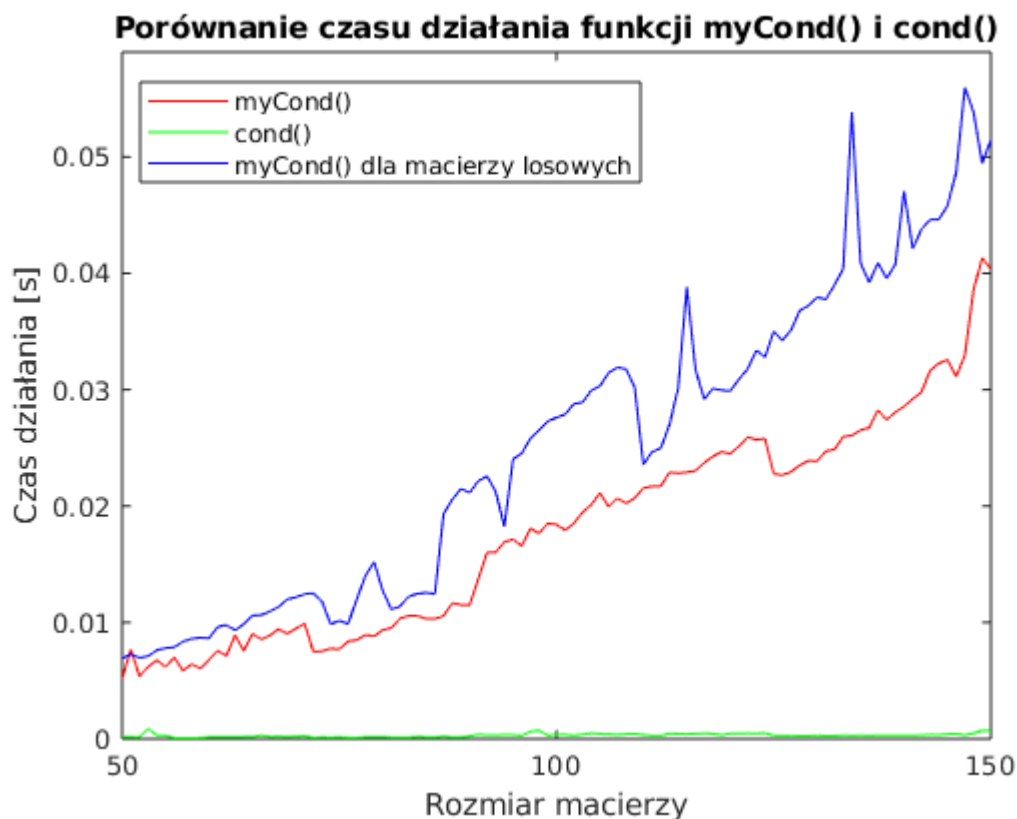
$$\begin{pmatrix} 49.5 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 48.5 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 47.5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 1 & 49.5 \end{pmatrix}$$

Wartości na jej diagonalu skokowo zbiegają do 0.5, przyjmują ją dwukrotnie, a następnie ponownie rosną do 49.5 zwiększając się o 1.

Wyniki działań obu funkcji okazały się równe i wynosiły:

Wynik:	<i>myCond()</i>	<i>cond()</i>
Macierz Wilkinsona (100 x 100)	1455,1855	1455,1855

Sprawdziłem także różnice pomiędzy obliczanymi wartościami wskaźnika uwarunkowania dla macierzy Wilkinsona rozmiarów 50-150 oraz losowych macierzy o rozmiarach od 1 do 500 i żadne z nich nie przekraczały minimalnej wartości błędu  $10^{-12}$ . Jak prezentował się czas działania funkcji dla tych macierzy?

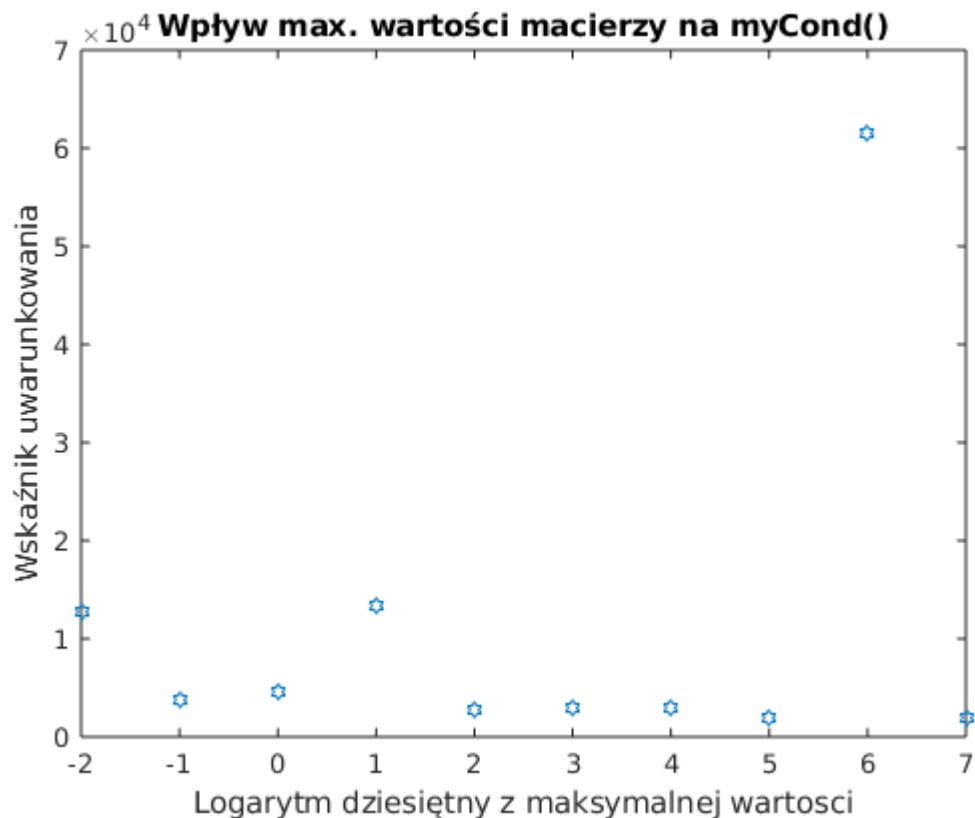


Wykres 2: Czas działania funkcji dla macierzy Wilkinsona (o ile nie napisano inaczej)

Najprawdopodobniej z powodu ‘rzadkości’ macierzy Wilkinsona, czas działania własnej funkcji się zmniejszył, jednak nadal jest wyższy aniżeli dla wbudowanej funkcji.

## 5. Ciekawe wyniki:

Celem poszukiwań ciekawych wartości dla wskaźnika uwarunkowania stworzyłem 10 losowych macierzy 100 x 100 o różnym zakresie wartości. Wyniki kształtują się następująco:



Wartość wskaźnika uwarunkowania nie zależy od zakresu, w jakim znajdują się wartości macierzy.

### Współczynniki $r_R$ i $r_L$

W żadnej spośród badanych macierzy owe współczynniki nie przekroczyły wartości pomijalnie małej, tj.  $10^{-14}$ .

## Literatura

Źródła z których korzystałem:

- materiały z wykładów p. Alicji Smoktunowicz
- [pl.wikipedia.org](http://pl.wikipedia.org)
- [github.com](https://github.com)