Obliczenia naukowe, sprawozdanie z listy 3

Data Paweł 250105

November 22, 2020

1 Zadanie

Zadanie polega za implementacji programu, który znajduje miejsce zerowe funkcji sposobem bisekcji.

Program jako parametry przyjmuje funkcję, dwa punkty początkowe oraz dwie wartości (delta i epsilon) mówiące o dokładności wyniku.

Warunkiem koniecznym jest, by wartości funkcji dla początkowych wartości (nazwijmy je a i b) były przeciwnego znaku. To oznacza, że w tym przedziale [a, b] istnieje miejsce zerowe.

Następnie w pętli zmiejszamy przedział o połowę: wybieramy tą część, w której znajduje się miejsce zerowe (w której wartości dla skrajnych elementów są przeciwnych znaków).

Kończymy program, gdy [a,b] $<$ delta lub gdy wartość funkcji w przedziale jest mniejsza od epsilona.

2 Zadanie

Zadanie polega za implementacji programu, który znajduje miejsce zerowe funkcji metodą Newtona(tzw. metoda stycznych).

Program jako parametry przyjmuje funkcję, jej pochodną, punkt początkowy, deltę i epsilona (jak w poprzednim zadaniu) oraz maksymalną ilość iteracji.

W kolejnych iteracjach liczymy punkt przecięcia się stycznej funkcji w naszym aktualnym x_n z osią X. Wartość x tego punktu będzie następną wartością x_{n+1}

Program kończy działanie w 3 przypadkach:

1. Gdy zadowala nas dokładnosć wyniku: wartość x_n jest mniejsza od epsilona lub $x_n - x_{n-1}$ jest mniejsza od delty,
2. pochodna jest bliska zeru,
3. wykonaliśmy maksymalną liczbę iteracji.

3 Zadanie

Zadanie polega za implementacji programu, który znajduje miejsce zerowe funkcji metodą siecznych.

Program jako parametry przyjmuje funkcję, dwa punkty początkowe, deltę i epsilona (jak w poprzednim zadaniu) oraz maksymalną ilość iteracji.

Ta metoda działa na tej samej zasadzie, co metoda Newtona z jedną różnicą. Zamiast używać pochodnej funkcji, aproksymuje się ją za pomocą siecznej przechodzącej przez dwa punkty.

Kończymy działanie, gdy osiągniemy odpowiednią dokladność lub wykonamy maksymalną liczbę iteracji.

4 Zadanie

Mam policzyć x, dla którego $sin(x) - (\frac{1}{2}x)^2 = 0$, użyć następujących metod:

1. bisekcji z przedziałem początkowym[1.5,2], delta $= \frac{1}{2}10^5$, epsilon $= \frac{1}{2}10^5$,
2. Newtona z przybliżeniem początkowym $x_0 = 1.5$, delta $= \frac{1}{2}10^5$, epsilon $= \frac{1}{2}10^5$,
3. siecznych z przybliżeniami początkowymi $x_0 = 1$, $x_1 = 2$, delta $= \frac{1}{2}10^5$, epsilon $= \frac{1}{2}10^5$,

Wyniki:

metoda	x	f(x)	iteracja
bisekcji	1.933753967285156	-0.000000270276801	16
Newtona	1.933753779789742	-0.000000022423316	4
siecznych	1.933753644474301	0.000000156452513	4

Metoda bisekcji potrzebowała najwięcej iteracji (16), pozostałe zdecydowanie mniej (4).

Uzyskane wyniki potwierdzają współczynnik zbieżności α. Dla metody bisekcji $\alpha = 1$ (jest liniowa), dla metody Newtona $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, dla metody siecznych $\alpha = 2$ (jest kwadratowa).

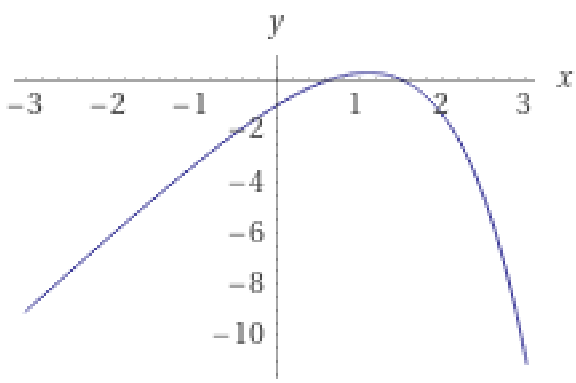
5 Zadanie

Zadanie polega na policzeniu miejsc zerowych funkcji

$$f(x) = 3x - exp(x)$$

Metodą bisekcji.

Wykres ze strony wolframalpha.com:



W wykresu wynika, że są dwa miejsca zerowe: jedno w przedziale [0,1] oraz drugie w przedziale [1,2].

przedzial	x	f(x)	iteracja
(0,1)	0.619140625000000	0.000090663203433	9
(1,2)	1.512084960937500	0.000076185786027	13

Wyniki są zgodne z wykresem.

6 Zadanie

Mam policzyć miejsca zerowe dwóch funkcji:

1. $f_1(x) = exp(1-x) - 1$ (ma jedno miejsce zerowe $x_0 = 1$)
2. $f_2(x) = x * exp(-x)$ (ma jedno miejsce zerowe $x_0 = 0$)

1. f_1, dane początkowe:

- bisekcja: przedział [-1,1]
- Newton: $x_0 = 0$
- sieczne: $x_0 = 0, x_1 = 0.5$

metoda	x	f(x)	iteracja
bisekcji	0.999992370605469	0.000007629423635	18
Newtona	0.999998435889210	0.000001564112013	4
siecznych	0.999999813332766	0.000000186667252	5

Wszystkie metody zwróciły wynik bliski 1
2. f_2, dane początkowe:

- bisekcja: przedział [-1,1]
- Newton: $x_0 = -1$
- sieczne: $x_0 = -1, x_1 = -0.5$

metoda	x	f(x)	iteracja
bisekcji	0.000000000000000	0.000000000000000	1
Newtona	-0.000000306424934	-0.000000306425028	5
siecznych	-0.000000122299584	-0.000000122299599	6

Wybranie przedziału [-1,1] dla bisekcji daje wynik po 1 iteracji. Pozostałe zwróciły odpowiednio dokładne wyniki.

Teraz sprawdzę, jak zachowa się funkcja Newtona dla x $>$ 1 dla obu funkcji.

Dla f_1 dla rosnącego x rośnie liczba potrzebnych iteracji do uzyskania wyniku (dla $x_0 = 6$ potrzeba ponad 100).

Dla f_2 dla $x_0 = 1$ funkcja od razu kończy swoje działanie, ponieważ pochodna jest zbyt mała.

Dla $x_0 > 1$ funkcja zwraca coraz gorsze wyniki. Jest to spowodowanie granicą w nieskończoności tej funkcji równą 0.

7 Wnioski

Metoda bisekcji wydaje się być zawsze skuteczna, jednak musimy znać przedział dla miejsca zerowego i metoda potrzebuje najwięcej operacji.

Metoda Newtona zwraca dokładniejsze wyniki, jednak dla pewnych danych może zwracać błedne wyniki. Tak samo dla metody siecznych.

Zatem przed wybraniem odpowiedniej metody, musimy przeanalizować badaną funkcję.