Obliczenia naukowe, sprawozdanie z listy 4

Data Paweł 250105

December 3, 2020

1 Zadanie

Zadanie polega na obliczeniu ilorazów różnicowych na podstawie listy argumentów i listy wartości.

Skorzystam ze wzoru:

$$f[x_i, x_{i+1}, ..., x_n] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_n] - f[x_i, x_{i+1}, ..., x_{n-1}]}{x_n - x_i}$$

Dla ułatwienia możemy przeprowadzić obliczenia na tablicy jednowymiarowej. Dla lepszego zobrazowania problemu możemy go narysować w tablicy trójkątnej:

$$\begin{array}{cccccc}
x_0 & f[x_0] & f[x_0, x_1] & ... & f[x_0, ..., x_{n-1}] & f[x_0, ..., x_n] \\
x_1 & f[x_1] & f[x_1, x_2] & ... & f[x_1, ..., x_n] & \\
x_2 & f[x_2] & f[x_2, x_3] & ... & & \\
... & ... & ... & & & \\
x_{n-1} & f[x_{n-1}] & f[x_{n-1}, x_n] & & & \\
x_n & f[x_n] & & & &
\end{array}$$

Widzimy, że wynik znajduje się w pierwszym rzędzie, a algorytm zaczynamy z wartościami z drugiej kolumny (wartości $f[x_i]$ dla $i \in [0, n]$)

Algorytm wygląda następująco:

1. Do tablicy o długości $n + 1$ wpisujemy wartości $f[x_i]$ dla $i \in [0, n]$.
2. W i-tej iteracji mamy już obliczone i pierwszych ilorazów różnocowych.

3. W i-tej iteracji przechodzimy po tablicy od końca tablicy do $i+1$ miejsca. Dla j miejsca liczymy jego nową wartość za pomocą wzoru podanego na początku rozdziału (zatem nową wartość na j pozycji liczymy uzywając jej samej, wartości w tablicy o indeksie $j-1$, x_j oraz x_{j-1}).

4. Po n iteracjach w tablicy mamy obliczone wszystkie ilorazy różnicowe.

2 Zadanie

Zadanie polega na obliczeniu wartości wielomianu interpolacyjnego stopnia n w postaci Newtona $N_n(x)$ w punkcie x za pomocą uogólnionego algorytmu Hornera. Trzeba to osiągnąć w czasie $O(n)$.

Użyję uogólnionych wzorów Hornera:

1. $w_n(x) = f[x_0, x_1, ..., x_n]$
2. $w_k(x) = f[x_0, x_1, ..., x_k] + (x - x_k)w_{k+1}(x)$, dla $k \in [0, n-1]$
3. $N_n(x) = w_0(x)$

Z powyższych punktów wynika, że potrzebujemy wartości $w_0(x)$, każdą wartość $w_i(x)$ jesteśmy w stanie wyliczyć za pomocą $w_{i+1}(x)$, a w_n jest nam znane.

Algorytm wygląda następująco:

1. Do zmiennej, w której chcemy mieć wynik, wpisujemy wartość $f[x_0, x_1, ..., x_n]$ (wzór 1).

2. Przechodzimy po tablicy od jej końca (od $n-1$ pozycji) do początku. Wykonamy n iteracji.

3. W i-tej iteracji znamy wartość $w_{n-i}(x)$. Obliczamy wartość w_{n-i-1} (wzór 2).

4. W n-tej iteracji obliczamy wartość w_0

5. Zwracamy wynik (znamy go ze wzoru 3).

3 Zadanie

Mamy napisać funkcję liczącą współczynniki wielomianu w postaci naturalnej ($a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$) mając do dyspozycji współczynniki wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona oraz zbiór argumentów.

Wykorzystam do tego uogólniony wzór Hornera z poprzedniego zadania.

Algorytm wygląda następująco:

1. Mamy $a_n = f[x_0, ..., x_n]$.

2. Przechodzimy po tablicy od jej końca (od $n - 1$ pozycji) do początku. Wykonamy n iteracji.

3. W i-tej operacji obliczamy wartość a_{n-i} używając wzoru Hornera.

4. W i tej opracji po obliczeniu a_{n-i} w kolejnej pętli poprawiamy poprzednie wartości tym samym wzorem.

"Poprawiamy" poprzednie wartości za pomocą wzoru Hornera, by nadal mieć postać naturalną wielomianu o i-tej dlugości.

Po i-tej iteracji mamy obliczoną postać naturalną wielomianu dla wielomianu interpolacyjnego znajdującego się od $n - i$-tego do n miejsca.

4 Zadanie

W tym zadaniu zaimplementowałem funkcję $rysujNnfx$, która przyjmuje:

- funkcję,
- przedział interpolacji,
- stopień wielomianu interpolacyjnego.

Ma stworzyć wykres wielomianu interpolacyjnego oraz interpolowaną funnkcję. W tym zadaniu korzystam z funkcji napisanych w zadaniu 1 i 2.

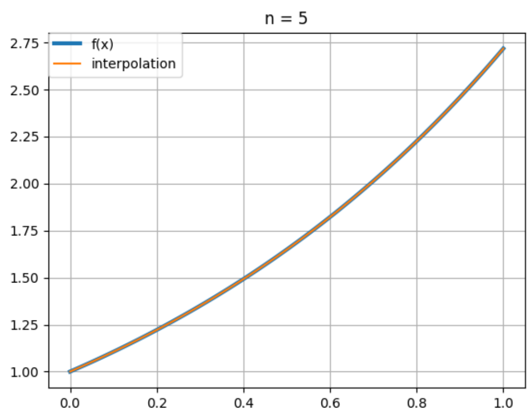
5 Zadanie

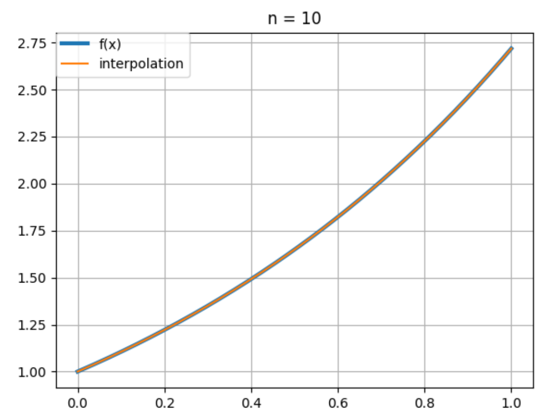
Zadanie polega na przetestowaniu funkcji $rysujNnfx$ z poprzedniego zadania dla przykładów:

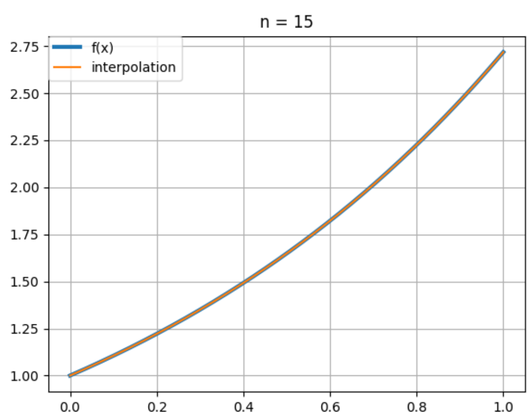
(a) e^x, $[0, 1]$, n = 5,10,5

(b) $x^2 sinx$, $[-1, 1]$, n = 5,10,5

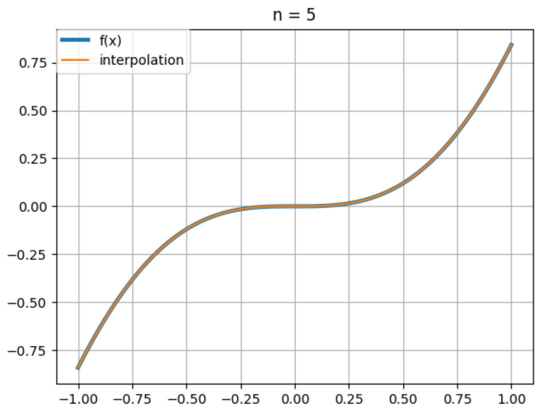
5.1 a)

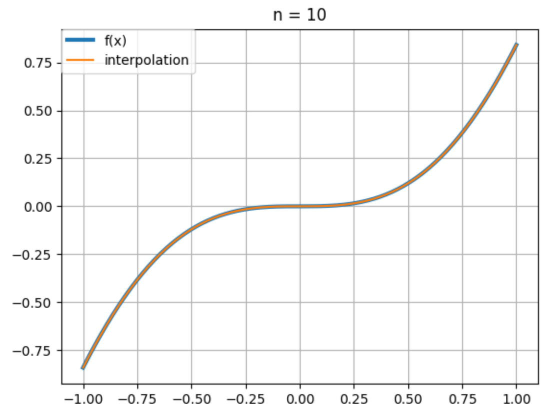


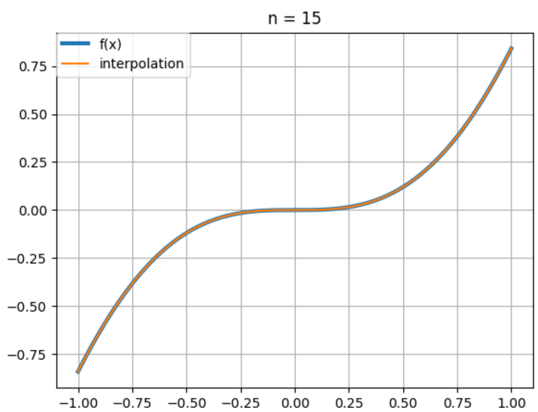




5.2 b)







Wykresy praktycznie się pokrywają. Zatem podział przedziału na równo odległe punkty daje wystarczającą dokładność.

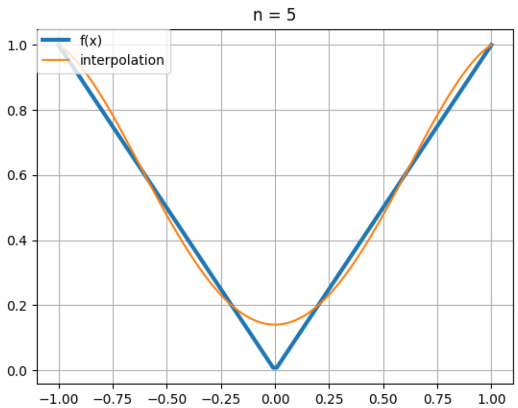
6 Zadanie

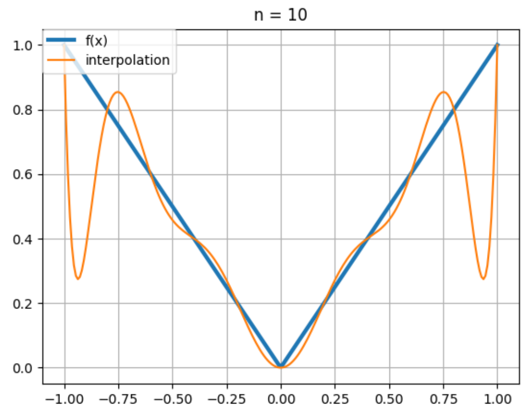
Zadanie polega na przetestowaniu funkcji $rysujNnfx$ z 4 zadania dla przykładów:

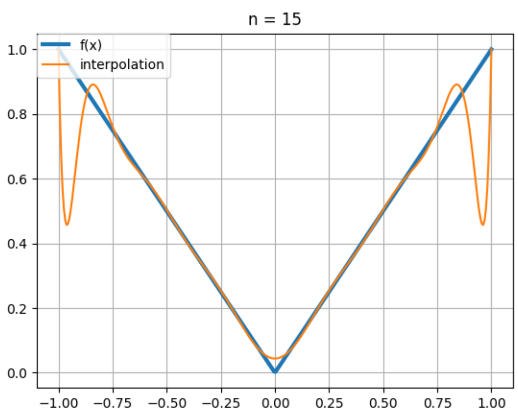
(a) $|x|$, $[-1, 1]$, n = 5,10,5

(b) $\frac{x}{1+x^2}$, $[-5, 5]$, n = 5,10,5

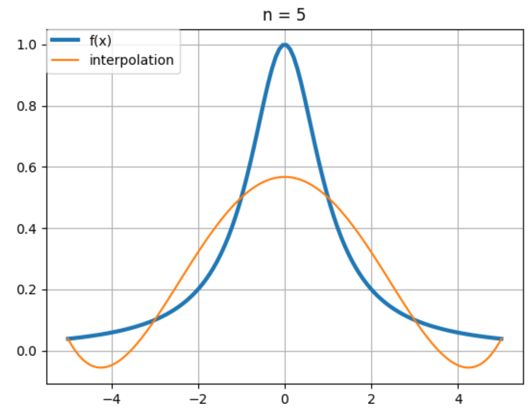
6.1 a)

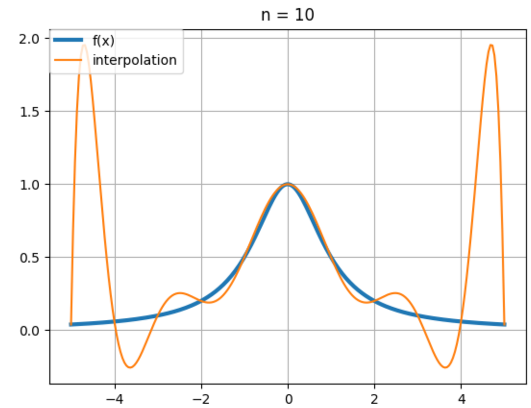

n = 5
f(x)
interpolation
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00

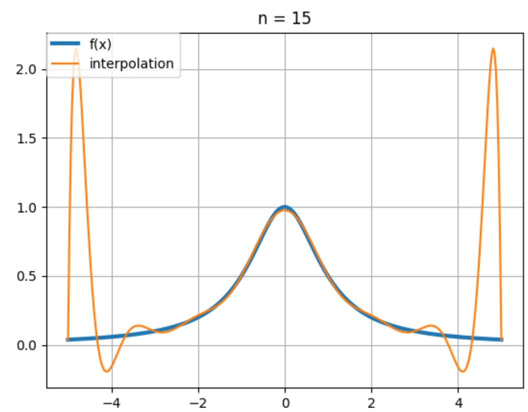

n = 10
f(x)
interpolation
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00


n = 15
f(x)
interpolation
1.0
0.8
0.6
0.4
0.2
0.0
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00

6.2 b)







W tym zadaniu wykresy się nie pokrywają. Widać to wyraźnie w podpunkcie a), gdzie dla n=5 przybliżenie jest w miarę dokładne, a dla n=10 czy n=15 wykresy są różne na krańcach przedziału.

Tu zachodzi zjawisko Runge'ego, czyli pogorszenie interpolacji wielomianowej mimo zwiększenia ilości węzłów. Gdzieje się tak, gdy interpolujemy przy stałych odległościach węzłów oraz gdy funkcja jest nieciągła.

By temu zapobiec, powinniśmy wiekszyć ilość węzłów na brzegach przedziału. Można na przykład użyć wielomianu Czebyszewa.