Ekonometria Dynamiczna

Analiza kointegracji

mgr Paweł Jamer[1]

30 maja 2015

[1] pawel.jamer@gmail.com

Integracja

Definicja integracji

Szereg czasowy X_t nazwiemy zintegrowanym w stopniu d jeżeli szereg czasowy

$$\Delta^d X_t$$

jest stacjonarny oraz dla każdego $d' < d$ szereg czasowy $\Delta^{d'} X_t$ nie jest stacjonarny.

Oznaczenie. Szereg czasowy X_t zintegrowany w stopniu d oznaczamy symbolem

$$X_t \sim I(d).$$

Uwaga. Stacjonarny szereg czasowy X_t jest zintegrowany w stopniu 0, tzn.

$$X_t \sim I(0).$$

Badanie integracji

Integrację szeregów czasowych możemy badać wykorzystując:

- testy DF oraz ADF,
- integracyjną statystykę Durbina-Watsona.

Testy DF oraz ADF

W przypadku testów DF oraz ADF hipotezy testowe zapisać możemy w postaci

$$\begin{cases} H_0 : & X_t \sim I\left(1\right), \\ H_1 : & X_t \sim I\left(0\right). \end{cases}$$

Tak zapisane hipotezy są de facto najbardziej naturalnym sposobem wyrażenia idei na jakiej bazują te testy.

Integracyjna statystyka Durbina-Watsona

Integracyjna statystyka Durbina-Watsona

$$IDW = \frac{\sum_{t=2}^{T} (\Delta X_t)^2}{\sum_{t=1}^{T} \left(X_t - \overline{X}_t\right)^2}.$$

Interpretacja:

- wartości statystyki IDW bliskie 0 sugerują występowanie kointegracji w stopniu $d \geqslant 1$,
- wartości statystyki IDW bliskie 2 sugerują stacjonarność, tzn. kointegrację w stopniu $d = 0$.

Uwaga. Możemy przyjąć, że przy poziomie istotności 0.01 oraz próbie 100 elementowej wartość statystyki IDW potrzebna do uzyskania integracji w stopniu $d \geqslant 1$ powinna być niższa niż 0.5.

Regresja pozorna

Kiedy zmienne objaśniające wykazują podobny trend do zmiennej objaśnianej możemy spotkać się z sytuacją regresji pozornej.

Przykład. Związek zachodzący między liczbą narodzin oraz liczbą śmierci.

Problemy:

- współczynniki regresji mogą być statystycznie istotne,
- wartość współczynnika determinacji może być wysoka,
- oszacowany model nie opisuje dobrze badanego zjawiska.

Problem

Problem:

- Bazowanie na niestacjonarnych szeregach czasowych podczas budowania modeli może prowadzić do pojawiania się problemu regresji pozornej.
- Sprowadzając niestacjonarne szeregi czasowe do postaci stacjonarnej (poprzez różnicowanie lub eliminację trendu) odbieramy sobie możliwość analizowania zależności długookresowych.

Czy istnieją sytuacje, w których wolno nam bezpiecznie operować na zmiennych niestacjonarnych?

Definicja

Idea. Chcemy wiedzieć, czy bazując na pewnej grupie niestacjonarnych szeregów czasowych możemy bezpiecznie zbudować model.

Kointegracja

Powiemy, że szeregi czasowe $X_{1,t}, X_{2,t}, \ldots, X_{n,t}$ są skointegrowane w stopniu (d, b), jeżeli dla każdego $i = 1, 2, \ldots, n$ zachodzi

$$X_{i,t} \sim I(d)$$

oraz istnieją takie wartości $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, że

$$\beta_1 X_{1,t} + \beta_2 X_{2,t} + \ldots + \beta_n X_{n,t} \sim I(d-b).$$

Intuicja. Relacje pomiędzy skointegrowanymi niestacjonarnymi szeregami czasowymi pozostają w długiej perspektywie czasowej niezmienne.

Testowanie

Istnieją dwie powszechnie stosowane metody testowania kointegracji:

- dwustopniowa procedura Engle'a-Grangera – prostsza, posiadająca liczne ograniczenia,
- metoda Johansena – złożona, dająca dokładne informacje na temat kointegracji badanych szeregów czasowych.

Procedura Engle'a-Grangera

1. Należy zweryfikować czy wszystkie analizowane szeregi czasowe charakteryzuje ten sam stopień integracji.
2. Należy zbudować model regresji liniowej wielorakiej w którym jeden z analizowanych szeregów pełni rolę zmiennej objaśnianej, pozosałe natomiast zmiennych objaśniających.
3. Należy przetestować stopień integracji reszt wyznaczonego w poprzednim kroku modelu.

Definicja

Model korekty błędem (ECM)

$$\Delta y_t = \mu + \alpha\left(y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 x_{t-1}\right) + \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \Delta y_{t-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i \Delta x_{t-i} + \epsilon_t$$

Interpretacja:

- $y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 x_{t-1}$ — równanie równowagi długookresowej,
- $y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 x_{t-1}$ — odchylenie od równowagi długookr.,
- α — współczynnik opisujący szybkość dostosowywania się zmiennej objaśnianej do poziomu równowagi długookresowej (w stabilnym modelu $\alpha < 0$).
- θ_i, γ_i — współczynniki opisujące dynamikę krótkookresową.

Stosowalność

Uwaga. Twierdzenie Grangera o reprezentacji gwarantuje nam możliwość zastosowania mechanizmu korekty błędem względem skointegrowanych szeregów czasowych.

Estymacja

1. Estymacja parametrów równania równowagi długookresowej

$$y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 x_{t-1}.$$

2. Skonstruowanie szeregów czasowych

$$\begin{aligned} \epsilon_t &= y_t - \beta_0 - \beta_1 x_t, \\ \Delta x_t &= x_t - x_{t-1}, \\ \Delta y_t &= y_t - y_{t-1}. \end{aligned}$$

3. Estymacja parametrów równania modelu korekty błędem

$$\Delta y_t = \mu + \alpha \epsilon_{t-1} + \sum_{i=1}^{k-1} \theta_i \Delta y_{t-i} + \sum_{i=0}^{k-1} \gamma_i \Delta x_{t-i} + \epsilon_t$$

Pytania?

Dziękuję za uwagę!