Ekonometria Dynamiczna

Wybrane modele wielowymiarowych szeregów czasowych

mgr Paweł Jamer[1]

28 czerwca 2015

[1] pawel.jamer@gmail.com

Definicja

Model Wektorowej Autoregresji (VAR)

Niech dany będzie szereg czasowy $\boldsymbol{Y}_t = [Y_{1,t}, Y_{2,t}, \ldots, Y_{n,t}]'$. Modelem wektorowej autoregresji o p opóźnieniach szeregu $\boldsymbol{Y}_t$ nazwiemy model opisany równaniem

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}t + \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{Y}_{t-i} + \epsilon_t,$$

gdzie

- $\mathbb{E}\left(\epsilon_t\right) = \mathbf{0}$,
- $\mathbb{E}\left(\epsilon_t \epsilon_t'\right) = \boldsymbol{\Omega}$ — macierz dodatnio określona,
- $\mathbb{E}\left(\epsilon_t \epsilon_s'\right) = \mathbf{0}$ dla $t \neq s$.

Oznaczenia

Symbole w równaniu modelu VAR (p) oznaczają odpowiednio:

- $\boldsymbol{c}$ — wektor stałych,
- $\boldsymbol{d}$ — wektor parametrów trendu,
- $\boldsymbol{A}_i$ — macierz parametrów związanych z i-tym opóźnieniem,
- ϵ_t — wektor błędów.

Uwaga. Model wektorowej autoregresji o p opóźnieniach przyjęło się oznaczać symbolem VAR (p) .

Właściwości

Model VAR :

- ma często dobre właściwościami prognostyczne i symulacyjne,
- dopuszcza pełną dowolność co do wartości parametrów,
- uwzględnia występowanie zależności pomiędzy zmiennymi,
- traktuje wszystkie zmienne jako objaśniane oraz objaśniające,
- nie jest związany z żadną konkretną teorią ekonomiczną,
- wymaga oszacowania wielu parametrów.

Zapis procesu VAR(p) w postaci VAR(1)

Rozpatrzmy proces VAR(p)

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{d}t + \sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{Y}_{t-i} + \epsilon_t.$$

Proces ten zapisać możemy jako

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_t \\ \boldsymbol{Y}_{t-1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{Y}_{t-(p-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \cdots & \boldsymbol{A}_{p-1} & \boldsymbol{A}_p \\ \boldsymbol{I} & \cdots & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_{t-1} \\ \boldsymbol{Y}_{t-2} \\ \vdots \\ \boldsymbol{Y}_{t-p} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ \boldsymbol{0} \\ \vdots \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix},$$

a zatem jako proces VAR(1).

Stabilność

Stabilność

Model VAR nazywamy stabilnym, jeżeli

$$\lim_{k \to \infty} (\boldsymbol{A}_k) = \boldsymbol{0}.$$

Intuicja. Wpływ zaburzenia ϵ_t na $\boldsymbol{Y}_t$ wygasa w miarę czasu.

Twierdzenie

Niech dany będzie model VAR(p). Niech rozważany model VAR(p) sprowadza się do modelu VAR(1) o macierzy parametrów $\boldsymbol{A}$. Wówczas wyjściowy model VAR(p) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}B) = 0.$$

Stacjonarność

Selekcja optymalnego p

Metody selekcji optymalnej wartości parametru p :

- przesłanki teoretyczne,
- kryteria informacyjne,
- testy istotności parametrów dla ostatnich opóźnień,
- analiza reszt modelu (np. statystyka Ljunga-Boxa).

Selekcja optymalnego p - kryteria informacyjne

Wyboru optymalnej wartości parametru p dokonuje się minimalizując wartość wybranego kryterium informacyjnego.

Kryterium Akaike

$$AIC = -2\frac{\ln(L)}{T} + k\frac{2}{T}$$

Kryterium Schwarza

$$SC = -2\frac{\ln(L)}{T} + k\frac{\ln(T)}{T}$$

Kryterium Hannana-Quinna

$$HQ = -2\frac{\ln(L)}{T} + k\frac{\ln(\ln(T))}{T}$$

Estymacja

Model VAR jest de facto przykładem modelu pozornie nie związanych równań regresji. Stosują się więc do niego wszystkie reguły związane z tym właśnie modelem. W tym momencie szczególnie interesująca jest dla nas reguła mówiąca, że gdy każde z równań modelu SUR posiada ten sam zbiór zmiennych objaśniających, to jego estymacja sprowadza się do zastosowania klasycznej MNK dla każdego równania modelu osobno. Jako, że model VAR spełnia ten warunek, estymację jego parametrów przeprowadzić możemy w ten właśnie sposób.

Odpowiedź na impuls

Definicja

Pojęcie przyczynowości zostało wyklarowane w toku dyskusji na temat definicji egzogeniczności (która de facto posiada na dzień dzisiejszy kilka znaczeń). Pojawia się ono chociażby w zaproponowanej przez Engle'a, Hendry'ego i Richarda definicji silnej egzogeniczności. W ramach przyczynowości w sensie Grangeraprzyczynowość w sensie Grangera (bo właśnie o takiej przyczynowości będzie tu mowa) wyróżnić możemy przyczynowość sensu stricto oraz pszyczynowość natychmiastową.

- O $X_t powiemy, ejestpszyczyn Y_t wsensieGrangeraprzyczynawsensieGrangera(o$
$Y_t), jeeli \sigma^2\left(\tilde{Y}_t \mid \mathbf{\Omega}_{t-1}\right) < \sigma^2\left(\tilde{y}_t \mid \mathbf{\Omega}_{t-1} - \mathbf{\Omega}_{X_t}\right).$
- O $X_t powiemy, ejestnatychmiastowprzyczyn Y_t wsensieGrangeranatychmiasto$
$Y_t), jeeli \sigma^2\left(\tilde{Y}_t \mid \mathbf{\Omega}_{t-1} \cup \mathbf{\Omega}_{X_t}\right) < \sigma^2\left(\tilde{Y}_t \mid \mathbf{\Omega}_{t-1} - \mathbf{\Omega}_{X_t}\right).$

W powyższych definicjach symbole oznaczają odpowiednio

- $\Omega_t - - - zbircaejbiecejiprzeszejinformacjiistniejcejwchwilit,$

Pytania?

Dziękuję za uwagę!