Ekonometria Dynamiczna

Wybrane modele jednowymiarowych szeregów czasowych

mgr Paweł Jamer[1]

7 czerwca 2015

[1] pawel.jamer@gmail.com

Biały szum

Biały szum

Białym szumem nazwiemy szereg czasowy ϵ_t niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie taki, że

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\epsilon_t\right) &= 0, \\ \mathrm{Var}\left(\epsilon_t\right) &= \sigma^2. \end{aligned}$$

Biały szum oznaczać będziemy symbolem $\mathrm{WN}\left(0, \sigma^2\right)$.

Uwaga Bardziej złożone modele szeregów czasowych wykorzystują biały szum do opisu niepewności pomiaru opisywanych przez nie wielkości.

Proces MA

Zdefiniujmy operator

$$\theta(B) = I + \theta_1 B + \ldots + \theta_q B^q,$$

gdzie $q \in \mathbb{Z}_+$.

Proces MA

Słabo stacjonarny szereg czasowy X_t nazwiemy procesem MA (średniej ruchomej) rzędu q, jeżeli spełnia on równanie

$$X_t = \theta(B)\,\epsilon_t,$$

gdzie $\epsilon_t \sim \mathrm{WN}\left(0, \sigma^2\right)$. Proces MA rzędu q oznaczać będziemy symbolem $\mathrm{MA}(q)$.

Właściwości procesu MA

- Wartość oczekiwana:

$$\mathbb{E}\left(X_t\right) = 0.$$

- Funkcja autokowariancji:

$$\gamma_X\left(h\right) = \begin{cases} \left(\sum_{i=0}^{q-|h|} \theta_i \theta_{i+|h|}\right)\sigma^2 & |h| \leqslant q, \\ 0, & |h| > q. \end{cases}$$

Proces AR

Zdefiniujmy operator

$$\varphi(B) = I - \varphi_1 B - \ldots - \varphi_p B^p,$$

gdzie $p \in \mathbb{Z}_+$.

Proces AR

Słabo stacjonarny szereg czasowy X_t nazwiemy procesem AR (autoregresyjnym) rzędu p, jeżeli spełnia on równanie

$$\varphi(B) X_t = \epsilon_t,$$

gdzie $\epsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$. Proces AR rzędu p oznaczać będziemy symbolem $\mathrm{AR}(p)$.

Właściwości procesu AR

- Proces spełniający równanie procesu AR(p) jest stacjonarny, gdy pierwiastki wielomianu

$$z^p - \sum_{i=1}^{p} \varphi_i z^{p-i}$$

leżą wewnątrz okręgu jednostkowego.

Związek procesów AR i MA

Proces AR (1) zapisać możemy w postaci

$$X_t = \varphi X_{t-1} + \epsilon_t,$$

a następnie rozpisać jego prawą stronę do postaci

$$X_t = \varphi^{m+1} X_{t-(m+1)} + \sum_{j=0}^{m} \varphi^j \epsilon_{t-j},$$

którą po przeprowadzeniu stosownego rozumowania zapisać można jako proces MA (∞) :

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi^j \epsilon_{t-j}.$$

Wniosek Procesy MA (q) przy odpowiednio dużym q zaczynają upodabniać się do procesu AR (1) .

Proces ARMA

Proces ARMA

Słabo stacjonarny szereg czasowy X_t nazwiemy procesem ARMA (p, q), jeżeli spełnia on równanie

$$\varphi(B) X_t = \theta(B) \epsilon_t,$$

gdzie $\epsilon_t \sim \mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.

Stacjonarność procesów ARMA

TWIERDZENIE

Jeżeli $\varphi(z) \neq 0$ dla $|z| = 1$, to równanie procesu ARMA (p, q)

$$\varphi(B) X_t = \theta(B) \epsilon_t$$

posiada jednoznaczne rozwiązanie stacjonarne postaci

$$X_t = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j} = \psi(B) \epsilon_t.$$

Proces ARIMA

Proces ARIMA

Szereg czasowy X_t nazwiemy procesem ARIMA (p, d, q), jeżeli szereg czasowy $\Delta^d X_t$ jest procesem ARMA (p, q).

Bezpośrednio z powyższej definicji wynika, że proces ARIMA (p, d, q) charakteryzuje następujące równanie:

$$\varphi(B)\left(\Delta^d X_t\right) = \theta(B)\,\epsilon_t.$$

Pierwiastek jednostkowy

Równanie procesu ARIMA (p, d, q) możemy zapisać jako:

$$\begin{aligned} \varphi(B)(I-B)^d X_t &= \theta(B)\epsilon_t, \\ \varphi^*(B) X_t &= \theta(B)\epsilon_t, \end{aligned}$$

gdzie

$$\varphi^*(B) = \varphi(B)(I-B)^d .$$

Wniosek Wielomian $\varphi^*(z)$ ma pierwiastek d-krotny w jedynce.

Metody estymacji parametrów φ_j i θ_j

- Równania Yule'a-Walkera
- Algorytm Innowacyjny
- Metoda Warunkowych Najmniejszych Kwadratów
- Estymator Hannana-Riesannena
- M-estymator
- ...

Estymator Hannana-Riesannena (idea)

Rozważamy model postaci

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \ldots + \varphi_p X_{t-p} + \epsilon_t + \theta_1 \epsilon_{t-1} + \ldots + \theta_q \epsilon_{t-q}.$$

Chcemy wyestymować metodą najmniejszych kwadratów parametry $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ oraz $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q$, przy założeniu znanych wartości parametrów p i q.

Problem Wartości białego szumu ϵ_t są nieobserwowalne.

Estymator Hannana-Riesannena (algorytm)

Niech $n \geqslant m \geqslant \max(p, q)$.

1. Dopasowujemy model $\mathrm{AR}(m)$.
2. Z dopasowanego modelu estymujemy

$$\hat{\epsilon}_t = X_t - \sum_{j=1}^{m} \hat{\varphi}_j X_{t-j}$$

   dla $t = m+1, m+2, \ldots, n$.
3. Dopasowujemy model regresji ze zmiennymi objaśniającymi $X_t, X_{t-1}, \ldots, X_{t-p}$ oraz $\hat{\epsilon}_t, \hat{\epsilon}_{t-1}, \ldots, \hat{\epsilon}_{t-q}$ i zmienną objaśnianą X_t.

Dobór parametrów p i q (kryteria informacyjne)

Niech $L_{p,q}$ oznacza wiarogoność modelu ARMA (p, q).

Kryterium informacyjne Akaike (AIC)

$$\mathrm{AIC}_{p,q} = -2\ln L_{p,q} + 2\,(p + q + 1)$$

Bayesowskie kryterium informacyjne (BIC)

$$\mathrm{BIC}_{p,q} = -2\ln L_{p,q} + (p + q + 1)\ln T$$

Dobór parametrów p i q (kryterium FPE)

Rozpatrujemy proces AR(p) postaci

$$X_t - \sum_{j=1}^{p} \varphi_j X_{t-j} = \epsilon_t,$$

który daje się przedstawić w postaci

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \epsilon_{t-j}.$$

Kryterium FPE (Final Prediction Error)

$$\mathrm{FPE}_{p,q} = \arg \min_{0 \leqslant p \leqslant P} \left(\frac{T+p}{T-p} \hat{\sigma}^2_{NW} \right)$$

Dobór parametrów p i q (wykresy ACF i PACF)

Autokorelacją częściową zmiennych X_t i X_{t-m} nazywamy intuicyjnie taką autokorelację zmiennych X_t i X_{t-m} z której wyeliminowano wpływ zmiennych $X_{t-1}, X_{t-2}, \ldots, X_{t-(m-1)}$.

Dobór parametrów p i q (wykresy ACF i PACF)

W przypadku procesu WN $\left(0, \sigma^2\right)$ wartości autokorelacji oraz częściowej autokorelacji powinny mieścić się w przedziale ufności

$$\hat{\rho}_i \pm \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{T}}$$

W przypadku procesu MA (q) wartości autokorelacji przekraczają granice powyższego przedziału ufności. Za rząd procesu MA przyjmujemy q równe autokorelacji o największym indeksie, która wykracza poza granice przedziału ufności.

W przypadku procesu AR (p) wartości autokorelacji częściowej prekraczają granice powyższego przedziału ufności. Za rząd procesu AR przyjmujemy p równe autokorelacji częściowej o największym indeksie, która wykracza poza granice przedziału ufności.

Estymaja korelacji

Estymator kowariancji

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-|h|} \left(X_i - \overline{X}_n \right) \left(X_{i+|h|} - \overline{X}_n \right).$$

Estymator korelacji

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}.$$

Testowanie autokorelacji

Chcemy zbadać hipotezę testową:

$$H_0 : \sum_{i=1}^{h} \rho^2(i) = 0.$$

Test Ljunga-Boxa

$$T_{LB} = n(n+2) \sum_{i=1}^{h} \frac{\hat{\rho}^2(i)}{n-i} \to \chi_h^2.$$

Testowanie reszt

1. Jeżeli model ARMA(p,q) opisany równaniem

$$\varphi(B)\,X_t = \theta(B)\,\epsilon_t$$

dobrze opisuje dane, to reszty ϵ_t powinny być białym szumem.

2. Powyższe stwierdzenie testujemy:
   - analizując wykresy ACF oraz PACF,
   - przeprowadzając test Ljunga-Boxa.

3. Jeżeli reszty ϵ_t okażą się nie być białym szumem, to dopasowujemy do nich po raz kolejny model ARMA:

$$\varphi'(B)\,\epsilon_t = \theta'(B)\,\eta_t,$$

gdzie η_t powinna być białym szumem.

Model z rozkładem opóźnień DL

Model ze skończonym rozkładem opóźnień

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=0}^{k} \beta_i X_{t-i} + \epsilon_t.$$

Model z nieskończonym rozkładem opóźnień

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i X_{t-i} + \epsilon_t.$$

Nazewnictwo:

- mnożnik krótkookresowy: β_0,
- mnożnik długookresowy: $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i$.

Model Koycka

Model Koycka

Modelem Koycka nazywamy model z nieskończonym rozkładem opóźnień w którym

$$\beta_k = \beta_0 \lambda^k,$$

gdzie $\lambda \in (0, 1)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Nazewnictwo:

- stopa zaniku rozkładu opóźnień: λ.

Związek modelu Koycka z modelem AR(1)

Niech dany będzie model Koycka postaci:

$$Y_t = \alpha + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_0 \lambda^i X_{t-i} + \epsilon_t.$$

Mnożąc powyższy model zapisany dla chwili czasu $t-1$ przez λ otrzymujemy:

$$\lambda Y_{t-1} = \lambda\alpha + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_0 \lambda^{i+1} X_{t-1-i} + \lambda\epsilon_{t-1}.$$

Odjęcie od siebie dwóch przedstawionych postaci modelu daje nam:

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = \alpha\left(1-\lambda\right) + \beta_0 X_t + \epsilon_t - \lambda\epsilon_{t-1}.$$

Co ostatecznie zapisać możemy jako:

$$Y_t = \mu + \lambda Y_{t-1} + \beta_0 X_t + \eta_t.$$

Model autoregresyjny z rozkładem opóźnień ADL

Model autoregresyjny z rozkładem opóźnień

$$Y_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i Y_{t-i} + \sum_{i=0}^{k} \beta_i X_{t-i} + \epsilon_t.$$

Model wyceny aktywów kapitałowych (CAPM)

Zakładamy, że inwestor posiada portfel złożony z n papierów wartościowych, których udziały w portfelu opisuje poniższy wektor

$$\boldsymbol{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]' .$$

Niech stopa zwrotu z poszczególnych papierów opisana będzie wektorem losowym

$$\boldsymbol{R} = [R_1, R_2, \ldots, R_n]' ,$$

natomiast stopa zwrotu jaką inwestor mógłby osiągnąć bez ponoszenia ryzyka (np. kupując obligacje rządowe) wartością

$$r_f .$$

Model wyceny aktywów kapitałowych (CAPM)

Niech oczekiwane stopy zwrotu z poszczególnych aktywów opisane będą wektorem wartości oczekiwanych

$$\boldsymbol{\mu} = \mathbb{E}\left(\boldsymbol{R}\right),$$

natomiast ryzyko inwestycji macierzą wariancji-kowariancji

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathrm{Var}\left(\boldsymbol{R}\right).$$

Inwestor dąży maksymalizacji osiąganego zysku

$$\boldsymbol{x}'\left(\mu - r_f \mathbf{1}_n\right),$$

przy jednoczesnej minimalizacji ryzyka inwestycji

$$\min_{x} \boldsymbol{x}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{x}.$$

Model wyceny aktywów kapitałowych (CAPM)

Oznaczmy zysk z portfela rynkowego (np. WIG) symbolem R_M. Wówczas przy założeniu niezmienności ryzyka w czasie mamy

$$\mathbb{E}\left(R_i - r_f\right) = \frac{Cov\left(R_i, R_M\right)}{Var\left(R_M\right)}\mathbb{E}\left(R_M - r_f\right).$$

Oznaczmy

$$\beta_i = \frac{Cov\left(R_i, R_M\right)}{Var\left(R_M\right)}$$

Model wyceny aktywów kapitałowych

$$R_{i,t} - r_f = \alpha_i + \beta_i\left(R_{M,t} - r_f\right) + \epsilon_{i,t}.$$

Uwaga. Im wartość współczynnika β_i jest większa, tym bardziej agresywna jest polityka inwestycyjna inwestora.

Model Famy i Frencha

Chcąc lepiej opisać sytuację rynkową wprowadzamy do modelu CAMP dwa dodatkowe czynniki:

- SMB — czynnik uwzględniający wielkość spółki mierzonej kapitalizacją. Konstruowany jako różnica między stopą zwrotu z inwestycji w spółki z dużą kapitalizacją oraz stopą zwrotu z inwestycji w spółki z małą kapitalizacją.
- HML — czynnik uwzględniający iloraz wartości księgowej do wartości rynkowej ($\frac{BV}{MV}$) spółki. Konstruowany jako różnica między stopą zwrotu z inwestycji w spółki o wysokim $\frac{BV}{MV}$ oraz stopy zwrotu z inwestycji w spółki o niskim $\frac{BV}{MV}$.

Model Famy i Frencha

Model Famy i Frencha

$$R_{i,t} - r_t = \alpha_i + \beta_i^M \left(R_{M,t} - r_t\right) + \beta_i^{SMB}\mathrm{SMB}_t + \beta_i^{HML}\mathrm{HML}_t + \varepsilon_{i,t}.$$

Pytania?

Dziękuję za uwagę!