Ekonometria Dynamiczna

Szeregi czasowe: podstawowe definicje i miary

mgr Paweł Jamer[1]

2 marca 2015

[1] pawel.jamer@gmail.com

Proces Stochastyczny

Niech:

- $(\Omega, \mathcal{F}, \boldsymbol{P})$ — przestrzeń probabilistyczna;
- $\mathbb{T}$ — zbiór indeksów (zwykle czas).
  - $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{Z}$ — czas dyskretny.
  - $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}$ — czas ciągły.

Proces stochastyczny

Procesem stochastycznym nazwiemy taką funkcję

$$(t, \omega) \mapsto X_t(\omega), t \in \mathbb{T}, \omega \in \Omega,$$

że dla każdego ustalonego $t \in \mathbb{T} : X_t(\omega)$ jest zmienną losową.

Proces Stochastyczny

Proces stochastyczny

Procesem stochastycznym nazwiemy taką funkcję

$$(t, \omega) \mapsto X_t(\omega), t \in \mathbb{T}, \omega \in \Omega,$$

że dla każdego ustalonego $t \in \mathbb{T} : X_t(\omega)$ jest zmienną losową.

Uwaga. Wyżej zdefiniowany proces stochastyczny oznaczać będziemy zazwyczaj pisząc X_t albo $\{X_t\}$ lub używając zapisu akcentującego zakres indeksów postaci $\{X_t\}_{t\in\mathbb{T}}$ albo $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$.

Oznaczenia:

- $\mathcal{S} = \{X_t(\omega) : t \in \mathbb{T}, \omega \in \Omega\}$ — przestrzeń stanów.
- $s \in \mathcal{S}$ — stan procesu.
- $t \mapsto X_t(\omega)$ — trajektoria (realizacja) procesu.

Szereg Czasowy

Szereg czasowy

Szeregiem czasowym nazywamy proces stochastyczny X_t, którego zbiór indeksów $\mathbb{T}$ reprezentuje czas.

Uwaga. Wiele źródeł definiuje szereg czasowy jako *realizację* procesu stochastycznego, którego zbiór indeksów $\mathbb{T}$ reprezentuje czas.

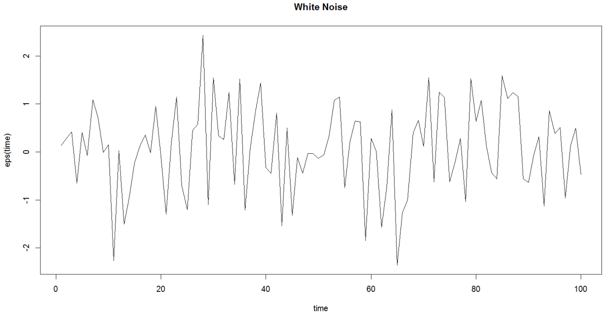
Uwaga. Będziemy rozpatrywać przede wszystkim przypadek $\mathbb{T} = \mathbb{Z}_+$, zakładając niejawnie taktowanie tym samym odcinkiem czasowym. W praktyce zdarzają się odstępstwa od tego założenia (np. notowania giełdowe).

Przykład (biały szum)

Szereg czasowy ϵ_t niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie taki, że

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\epsilon_t) &= 0, \\ \mathrm{Var}(\epsilon_t) &= \sigma^2 \end{aligned}$$

nazywać będziemy **białym szumem** i oznaczać $\mathrm{WN}(0, \sigma^2)$.

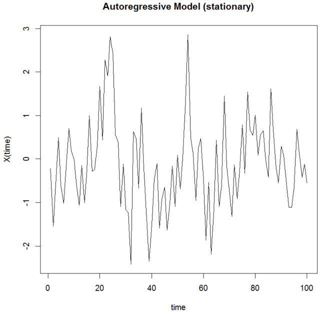


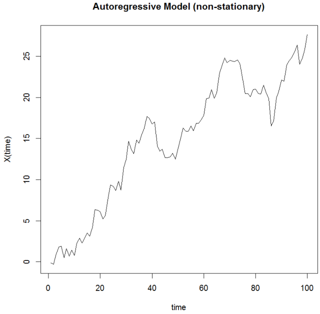
Przykład (model autoregresyjny)

Szereg czasowy

$$X_t = \rho X_{t-1} + \epsilon_t,$$

gdzie $\epsilon_t \sim \mathrm{WN}\left(0, \sigma^2\right)$, nazwiemy szeregiem **autoregresyjnym rzędu 1** i oznaczymy $\mathrm{AR}\left(1\right)$.





Wartość oczekiwana

Wartość oczekiwana

Wartością oczekiwaną procesu stochastycznego X_t nazywamy funkcję

$$t \mapsto \mathbb{E}\left(X_t\right)$$

o ile dla każdego $t \in \mathbb{T} : \mathbb{E}\left|X_t\right| < \infty$.

Niech: c - stała, X, Y - zmienne losowe.

Właściwości:

- $\mathbb{E}\left(c\right) = c$,
- $\mathbb{E}\left(cX\right) = c\mathbb{E}\left(X\right)$,
- $\mathbb{E}\left(X + Y\right) = \mathbb{E}\left(X\right) + \mathbb{E}\left(Y\right)$,
- X, Y - niezależne $\Rightarrow \mathbb{E}\left(XY\right) = \mathbb{E}\left(X\right)\mathbb{E}\left(Y\right)$.

Wariancja

Wariancja

Wariancją procesu stochastycznego X_t nazywamy funkcję

$$t \mapsto \mathrm{Var}\left(X_t\right) = \mathbb{E}\left(X_t - \mathbb{E}\left(X_t\right)\right)^2$$

o ile dla każdego $t \in \mathbb{T} : \mathbb{E}\left(X_t^2\right) < \infty$.

Niech: c - stała, X, Y - zmienne losowe.
Właściwości:

- $\mathrm{Var}\left(c\right) = 0$,
- $\mathrm{Var}\left(cX\right) = c^2\mathrm{Var}\left(X\right)$,
- $\mathrm{Var}\left(X + c\right) = \mathrm{Var}\left(X\right)$,
- $\mathrm{Var}\left(X \pm Y\right) = \mathrm{Var}\left(X\right) + \mathrm{Var}\left(Y\right) \pm 2\mathrm{Cov}\left(X, Y\right)$,
- X, Y - niezależne $\Rightarrow \mathrm{Var}\left(X \pm Y\right) = \mathrm{Var}\left(X\right) + \mathrm{Var}\left(Y\right)$.

Kowariancja

Kowariancja

Kowariancją procesów stochastycznych X_t i Y_t nazwiemy funkcję

$$(s,t) \mapsto \operatorname{Cov}(X_s, Y_t) = \mathbb{E}\left(X_s - \mathbb{E}(X_s)\right)\left(Y_t - \mathbb{E}(Y_t)\right)$$

o ile dla każdego $t \in \mathbb{T} : \mathbb{E}\left(X_t^2\right) < \infty$ oraz $\mathbb{E}\left(Y_t^2\right) < \infty$.

Uwaga. Kowariancja wyraża siłę zależności liniowej występującej pomiędzy dwiema zmiennymi losowymi.

- X, Y - liniowo niezależne $\Leftrightarrow \operatorname{Cov}(X, Y) = 0$,
- X, Y - niezależne $\Rightarrow \operatorname{Cov}(X, Y) = 0$,
- X, Y - niezależne $\not\Leftarrow \operatorname{Cov}(X, Y) = 0$.

Uwaga. Kowariancję procesu stochastycznego X_t z samym sobą nazywamy **autokowariancją** i oznaczymy symbolem $\gamma_X(s,t)$.

Korelacja

Korelacja

Korelacją procesów stochastycznych X_t i Y_t nazwiemy funkcję

$$(s,t) \mapsto \operatorname{Corr}(X_s, Y_t) = \frac{\operatorname{Cov}(X_s, Y_t)}{\sqrt{\operatorname{Var}(X_s)}\sqrt{\operatorname{Var}(Y_t)}}$$

o ile dla każdego $t \in \mathbb{T} : \mathbb{E}(X_t^2) < \infty$ oraz $\mathbb{E}(Y_t^2) < \infty$.

Uwaga. Korelacja jest unormowaną miarą zależności liniowej łączącej dwie zmienne losowe.

- $\operatorname{Corr}(X, Y) = 1 \Rightarrow$ pełna dodatnia zależność liniowa,
- $\operatorname{Corr}(X, Y) = 0 \Rightarrow$ brak zależności liniowej,
- $\operatorname{Corr}(X, Y) = -1 \Rightarrow$ pełna ujemna zależność liniowa.

Uwaga. Korelację procesu stochastycznego X_t z samym sobą nazywamy **autokorelacją** i oznaczymy symbolem $\rho_X(s,t)$.

Pytania?

Dziękuję za uwagę!