# Metody rozwiązywania układów równań liniowych

Koniunkcję pewnej liczby równań liniowych w skład których wchodzi ten sam zestaw zmiennych nazywa się układem równań liniowych. Układ takowy można zapisać w postaci równania macierzowego:

Bądź jego ogólnej reprezentacji macierzowej:

Ze względu na wygodę, w przykładach umieszczanych w literaturze często stosowana jest również reprezentacja w postaci macierzy rozszerzonej:

Ze względu na czytelność, powyższa forma będzie stosowana w pozostałej części tego dokumentu.

Zostało zaproponowanych wiele metod ich rozwiązywania. Oprogramowanie komputerowe służące do ich rozwiązywania nazywane jest solwerami.

Metody służące do rozwiązywania układów równań liniowych można podzielić na dwie główne kategorie[3]:

1. Metody iteracyjne
2. Metody bezpośrednie

Do metod bezpośrednich zaliczana jest między innymi metoda eliminacji Gaussa oraz metoda faktoryzacji (dekompozycji) LU.

## Metoda eliminacji Gaussa

Metoda eliminacji Gaussa składa się z dwóch zasadniczych faz.

1. Faza eliminacji w przód
2. Faza podstawiania wstecz

### Eliminacja w przód

Pierwsza z nich opiera się na liniowej operacji algebraicznej[5]: każde równanie w układzie równań liniowych może zostać zastąpione nowym, powstałym z połączenia tego równania z dowolnym innym występującym w tym układzie.

Przedstawiając układ równań w postaci macierzowej, daje to podstawy do stosowania jednej z macierzowych operacji elementarnych, czyli dodawania lub odejmowania od siebie wierszy bądź ich wielokrotności.

Celem fazy eliminacji w przód jest doprowadzenie układu równań w postaci macierzowej do górnej macierzy trójkątnej (znanej również jako macierz schodkowa). Dokonuje się tego eliminując - przy pomocy operacji elementarnych – pewną liczbę niewiadomych z poszczególnych równań, reprezentowanych przez wiersze w macierzy [1,5].

### Eliminacja w przód - przykład

Prześledźmy przykład fazy eliminacji w przód za [1]. Dany jest układ równań w postaci macierzy rozszerzonej:

Jest to układ równań wygenerowany przez prosty problem metody elementów skończonych. Na pierwszy rzut oka widać że jest symetryczna oraz pasmowa – mimo że pasmo to jest bardzo szerokie. Są to dwie przydatne właściwości macierzowych postaci równań opisujących problemy metody elementów skończonych.

Pierwszym krokiem eliminacji w przód jest wyeliminowanie zmiennych oraz przy pomocy pierwszego wiersza macierzy pomnożonego przez odpowiednią liczbę. Po przeprowadzeniu tej operacji, macierz wygląda następująco:

Następnym krokiem jest postąpienie analogicznie w stosunku do zmiennych oraz .

Ostatnim krokiem w przypadku tej przykładowej macierzy jest zredukowanie wyrazu .

### Eliminacja w przód - wnioski

Analizując przebieg tego przykładu można wysnuć dwa pomocne wnioski.

Dla każdego równania, czyli wiersza macierzy, można – przy założeniu wykonywania operacji w sposób sekwencyjny – wyznaczyć ilość operacji elementarnych które są konieczne do doprowadzenia go do pożądanej postaci. W powyższym przykładzie dla wiersza 1 było to zero operacji elementarnych, wiersz numer 2 wymagał jednej operacji elementarnej, zaś wiersze 3 i 4 – po dwie. Wychodząc z powyższego wniosku postawić można kolejny - iż dla danej macierzy można szybko wyznaczyć maksymalną ilość operacji elementarnych konieczną do sprowadzenia jej do macierzy schodkowej przypadającej na wiersz. Jak łatwo zauważyć, ta ilość operacji jest związana bezpośrednio z szerokością pasma macierzy: .

//TODO: SZERZEJ UJĄĆ W ROZDZIALE ZWIĄZANYM Z WYDAJNOŚCIĄ

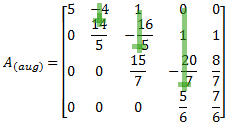
Drugi wniosek wyprowadzić można z faktu, iż eliminacja w przód sprowadza macierz do postaci macierzy schodkowej. Cechą charakterystyczną tej macierzy jest to, iż pierwszy wyraz niezerowy w danym wierszu musi znajdować się na diagonali macierzy; bezpośrednio oznacza to, że żadne dwa wiersze nie mogą mieć identycznego pierwszego wyrazu niezerowego.

### Podstawianie wstecz

Rozwiązanie równania w postaci macierzy schodkowej w eliminacji Gaussa przeprowadzane jest metodą podstawiania wstecz. Jest to możliwe dzięki temu, iż w macierzy schodkowej dokładnie jeden wiersz ma tylko jeden wyraz niezerowy, czyli stanowi reprezentację równania w postaci

Które sprowadzić można do postaci

Wyniki każdego rozwiązanego w ten sposób równania wprowadzane są do pozostałych równań; w macierzy postaci schodkowej można to rozpatrzyć w następujący sposób:



Faza podstawienia wstecz sprowadza się więc do kolejnego rozwiązania równań w kolejności . Warto w tym miejscu zwrócić uwagę na fakt, iż każde równanie jest zależne od równań . Ta zależność jest istotna w analizie możliwości zrównoleglenia faz eliminacji Gaussa dla równoległego solwera na platformie GPU.

### Analiza możliwości zrównoleglenia solwera

## Literatura

[1] Bathe, K. J., *Finite element procedures in engineering analysis*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1982.

[2] Bernstein, A.J., Analysis of Programs for Parallel Processing, Electronic Computers, IEEE Transactions on (Volume: EC-15 , Issue: 5), 757-763, October 1966.

[3] Jamil, N., A Comparison of Direct and Indirect Solvers for Linear Systems of Equations, Int. J. Emerg. Sci., 2(2), 310-321, June 2012

[4] NVIDIA, NVIDIA CUDA C Programming Guide, July 2013

[5] Rońda J., Oliver G.J., Introduction to numerical methods with Matlab procedures, 2010.