, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, szczególną rolę odgrywają zdania, których wartość logiczna zawsze jest równa 1 (są zawsze prawdziwe). Takie zdania nazywamy **prawami rachunku zdań**.

Przykład 1

Wykaż, że zdanie: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$ – *zaprzeczenie koniunkcji jest równoważne alternatywie zaprzeczeń* – jest prawem rachunku zdań.

W tym celu sporządzamy tabelę.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

W ostatniej kolumnie, bez względu na wartość logiczną zdań p i q, zawsze otrzymujemy, że zdanie jest prawdziwe, zatem jest ono prawem rachunku zdań. Zdanie to jest znane jako jedno z **praw De Morgana**.

Wykaż, że zdanie jest prawem rachunku zdań.

$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q))$ drugie z praw De Morgana

Wykaż, że zdanie jest prawem rachunku zdań.

a) $(\sim p) \vee p$ prawo wyłączonego środka

b) $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ prawo podwójnego przeczenia

c) $\sim(p \wedge \sim p)$ prawo sprzeczności

d) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ prawo odrywania

e) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ prawo transpozycji

f) $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ prawo zaprzeczenia implikacji

Sprawdź, czy podane zdanie jest prawem rachunku zdań.

a) $(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
b) $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
c) $[(\sim p \vee \sim q) \wedge p] \Rightarrow \sim q$
d) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
e) $((p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
f) $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$

Zestaw I

1. Wśród 180 studentów przeprowadzono ankietę dotyczącą znajomości języków obcych. Otrzymano następujące wyniki: 90 studentów zna język angielski, 81 – niemiecki, 75 – rosyjski, 45 – angielski i niemiecki, 25 – angielski i rosyjski, 20 – niemiecki i rosyjski, a 4 – wszystkie trzy języki. Ilu spośród ankietowanych studentów nie zna żadnego z tych języków?

2. Dane są zbiory: A – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 15, B – zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3, $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, D – zbiór liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1. Wypisz wszystkie elementy zbioru:

a) $A \cap B$, b) $A \setminus C$, c) $A \cap B \cap C$, d) $A \setminus (B \cup C)$, e) $A \cap (D \setminus B)$, f) $A \setminus (B \setminus D)$.

3. Wyznacz zbiory: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

a) $A = \langle -1; 4 \rangle$, $B = (2; 5)$
b) $A = \langle 2; 7)$, $B = (3; 5 \rangle$
c) $A = \langle -4; 2 \rangle$, $B = \langle 2; 9)$
d) $A = (-\infty; 0 \rangle \cup (1; 2)$, $B = \langle 0; 4 \rangle$
e) $A = (-\infty; -1) \cup \langle 3; 5 \rangle$, $B = (-2; 4)$
f) $A = (-1; 2 \rangle \cup (5; \infty)$, $B = \langle 0; 5)$

4. Wykonaj mnożenie.

a) $(a + 2b + 3)(a - 2)$
b) $(2a - b + c)(2a - 3b)$
c) $(a + 2b - 3c)(2a - 3b)$
d) $-4(x^2 - 2y)(2x^2 - y)$
e) $2x(3x^2 - 2y)(2y - 3x^2)$
f) $(x + y)(x^2 + y^2)(x - y)$

5. Wskaż liczbę całkowitą k, dla której $x \in \langle k; k+1)$.

a) $x = \sqrt[3]{17}$ b) $x = \sqrt[3]{-25}$ c) $x = (3 - 2\sqrt{2})^2$ d) $x = \sqrt{27 - 10\sqrt{2}}$

6. Ile liczb naturalnych spełnia nierówność?

a) $\frac{2x+1}{2} - 2 < x - \frac{x-3}{3}$
b) $\frac{1}{2}x - \frac{6x-3}{4} \geqslant -2 - \frac{2x-1}{3}$
c) $\frac{x-1}{4} - \frac{2x-1}{5} \geqslant \frac{x-3}{2} - \frac{2-x}{5}$
d) $\frac{2-x}{2} - \frac{1}{3}x > \frac{1-4x}{5} - \frac{3-x}{2}$

7. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających obie nierówności.

a) $|x| > 1$ i $|x| \leqslant 9$ b) $|x| \geqslant 2$ i $|x - 2| < 4$ c) $|x| < 4$ i $|x + 1| \geqslant 2$

8. Dane są zbiory: $A = \{x \in \mathbf{R} : |x - 3| < 4\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : |x + 2| \geqslant 3\}$ i $C = \{x \in \mathbf{R} : |x| \geqslant 3\}$. Zaznacz na osi liczbowej zbiór:

a) $A \cap B$, b) $A \setminus B$, c) $B \setminus A$, d) $(A \cup C) \setminus B$, e) $(A \setminus B) \cup C$.