efinicja

Liczbę $|a|$ zdefiniowaną za pomocą wzoru:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{jeśli } a \geqslant 0 \\ -a & \text{jeśli } a < 0 \end{cases}$$

nazywamy **wartością bezwzględną** liczby a.

Oznaczenie $|a|$ wprowadził Karl Weierstrass w 1841 roku.

Zwróć uwagę, że $|a|$ jest zawsze liczbą nieujemną: $|a| \geqslant 0$ dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$.

zykład 1

$|3{,}5| = 3{,}5$ b) $|-3{,}5| = -(-3{,}5) = 3{,}5$ c) $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$

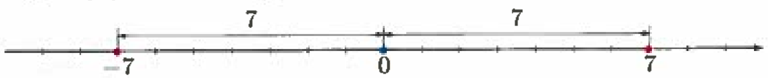
wiczenie 1

odaj wartość bezwzględną liczby.

5 b) -5 c) $\sqrt{3} - 1$ d) $\sqrt{3} - 3$ e) $4 - 3\sqrt{2}$ f) $5 - 2\sqrt{5}$

Interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej

artość bezwzględna liczby x to jej odległość na osi liczbowej od liczby 0.



czby -7 i 7 leżą w tej samej odległości od 0 na osi liczbowej i mają tę samą rtość bezwzględną, równą 7.

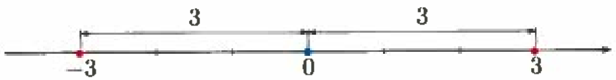
$$|-7| = 7 \quad \text{i} \quad |7| = 7$$

Dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$:
$$|-a| = |a|$$

zykład 2

ozwiąż równanie $|x| = 3$.

onieważ zgodnie z interpretacją geometryczną wartość bezwzględna liczby x st równa jej odległości na osi liczbowej od 0, jedynymi liczbami spełniającymi wnanie są -3 oraz 3.



wiczenie 2

odaj, dla jakich wartości x spełnione jest równanie.

$|x| = 2$ b) $|x| = 10$ c) $|x| = 0$ d) $|x| = -3$

Przypomnijmy, że:

- $\sqrt{a^2} = a$ dla $a \geqslant 0$
- $\sqrt{a^2} = -a$ dla $a < 0$

Dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$:
$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Na przykład: $\sqrt{5^2} = |5| = 5$ oraz $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $\sqrt{(\sqrt{3} - 2)^2}$ b) $\sqrt{(4 - 2\sqrt{3})^2}$ c) $\sqrt{(2\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^2}$

Korzystając z interpretacji geometrycznej, możemy rozwiązywać niektóre nierówności z wartością bezwzględną.

Przykład 3

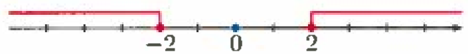
a) Rozwiąż nierówność $|x| < 5$.

Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x, których odległość od 0 jest mniejsza od 5.

Nierówność jest spełniona dla $-5 < x < 5$, zatem $x \in (-5; 5)$.

b) Rozwiąż nierówność $|x| \geqslant 2$.

Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x, których odległość od 0 jest większa lub równa 2.



Nierówność jest spełniona dla $x \leqslant -2$ oraz dla $x \geqslant 2$, zatem:

$$x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 2; \infty)$$

Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność i zaznacz na osi liczbowej jej zbiór rozwiązań.

a) $|x| < 8$ b) $|x| \leqslant \sqrt{2}$ c) $|x| > 3$ d) $|x| \geqslant \pi$

Ćwiczenie 6

Rozwiąż nierówność.

a) $|x| \geqslant 0$ b) $|x| \leqslant 0$ c) $|x| > 0$ d) $|x| < 0$