a) $X = (-4;2\rangle \cap \mathbf{Z}$, $Y = \{x \in \mathbf{Z} : x^2 \leqslant 4\}$, $T = \{-3,-2,-1,0,1,2\}$
b) $X = (2;7) \cup \{7\}$, $Y = \langle 2;7\rangle \setminus \{2\}$, $T = (2;4) \cup (4;7\rangle$
c) $X = \{x \in \mathbf{N} : |x| \leqslant 6\}$, $Y = (-7;7) \cap \mathbf{N}$, $T = \mathbf{N} \setminus (5;8\rangle$

Sprawdź, czy prawdziwa jest któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$.
a) $A = \{x \in \mathbf{R}\colon 0 < |x| < 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}\colon |x-5| \geqslant 1\}$
b) $A = \{x \in \mathbf{R}\colon |x+1| \geqslant 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}\colon |2x-6| > 16\}$
c) $A = \{x \in \mathbf{R}\colon 1 \leqslant |x| \leqslant 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}\colon \sqrt{x^2-10x+25} < 8\}$

Oblicz.
a) $(\sqrt{2}+\sqrt{6})(2\sqrt{2}-\sqrt{6})$
b) $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})(4\sqrt{3}-\sqrt{2})$
c) $(\sqrt{6}-2\sqrt{3})(2\sqrt{6}+6\sqrt{3})$
d) $(5\sqrt{2}-2\sqrt{10})(-3\sqrt{10}-2\sqrt{2})$
e) $(2\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$
f) $(\sqrt{6}+2\sqrt{3})^2-(\sqrt{6}-2\sqrt{3})^2$
g) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
h) $(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2(\sqrt{3}+\sqrt{7})$

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających obie nierówności.

a) $\begin{cases} 1\frac{1}{3}x - \frac{1}{6} > \frac{1}{2} - x \\ (x-\frac{1}{2})^2 + 0{,}75x \geqslant x^2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - (\frac{1}{8} - \frac{1}{2}x) \geqslant x - \frac{5}{4} \\ (2-x)^2 \leqslant (x+1)^2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x-\frac{1}{3}}{2} - \frac{x-\frac{1}{2}}{3} < 1 \\ (x-\frac{1}{2})^2 \geqslant x^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2 - x^2 - (x-2)^2 \leqslant 6 - 2(x+4)^2 \\ (4-x)^2 - (6-x)^2 \geqslant \frac{11}{4} - \frac{0{,}5 - \frac{1}{2}x}{2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} -4(4-x)^2 < 8 - (4-2x)^2 \\ \frac{(2x-1)^2}{4} - \frac{(\sqrt{2}x-4)(\sqrt{2}x+4)}{2} > 0{,}25 \end{cases}$

f) $\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}+1} + 4x(1-x) > \sqrt{2}x - (1-2x)^2 \\ \frac{1-x^4}{x^2+1} - 2x \geqslant 2x - (3-x)^2 \end{cases}$

Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x,y) spełniają podane warunki. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do tego zbioru?
a) $|x| \leqslant 3$ i $|y| \leqslant 2$
b) $1 \leqslant |x| \leqslant 4$ i $|y| < 1$
c) $1 \leqslant |x| \leqslant 2$ i $1 \leqslant |y| \leqslant 3$
d) $0 < |x| < 3$ i $1 < |y| < 2$

a) Liczby p i q przy dzieleniu przez 4 dają reszty odpowiednio: 1 i 3. Wykaż, że reszty z dzielenia liczb p^2 i q^2 przez 4 są równe.
b) Liczby p i q przy dzieleniu przez 5 dają reszty odpowiednio: k i l, gdzie $k < l$, a reszty z dzielenia liczb p^2 i q^2 przez 5 są równe. Wyznacz k i l.

Rozpatrzmy trzy kolejne liczby naturalne: n, $n+1$, $n+2$, gdzie $n \in \mathbf{N}$. Suma kwadratów tych liczb:

$$\begin{aligned} S &= n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = \\ &= n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 = \\ &= 3n^2 + 6n + 5 = 3(n^2 + 2n + 1) + 2 \end{aligned}$$

Ponieważ $n^2 + 2n + 1$ jest liczbą naturalną, reszta z dzielenia S przez 3 jest równa 2.

- Zauważ, że w celu wykazania, że reszta z dzielenia liczby S przez 3 jest równa 2, liczbę tę przedstawiliśmy w postaci $3k+2$, gdzie $k \in \mathbf{N}$.
- Konieczne jest rozumowanie dotyczące dowolnych kolejnych trzech liczb naturalnych. Sprawdzenie dla konkretnych liczb, np.:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14 = 3 \cdot 4 + 2$$

czy:

$$11^2 + 12^2 + 13^2 = 121 + 144 + 169 = 434 = 3 \cdot 144 + 2$$

nie jest wystarczającym uzasadnieniem.

Przykład 2
Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 4 sumy kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 3.

Trzy kolejne liczby nieparzyste można zapisać w postaci $2n+1$, $2n+3$, $2n+5$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$. Rozpatrywaną sumę oznaczamy przez S.

$$\begin{aligned} S &= (2n+1)^2 + (2n+3)^2 + (2n+5)^2 = \\ &= (4n^2 + 4n + 1) + (4n^2 + 12n + 9) + (4n^2 + 20n + 25) = \\ &= 12n^2 + 36n + 35 = 4(3n^2 + 9n + 8) + 3 \end{aligned}$$

Ponieważ $3n^2 + 9n + 8$ jest liczbą całkowitą, reszta z dzielenia S przez 4 jest równa 3.

- Zauważ, że w celu wykazania, że reszta z dzielenia liczby S przez 4 jest równa 3, liczbę S przedstawiliśmy w postaci $4k+3$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.
- Konieczne jest rozumowanie dotyczące dowolnych kolejnych trzech liczb nieparzystych. Podobnie jak w przykładzie 1 sprawdzenie dla konkretnych liczb, np.:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 9 + 25 = 35 = 4 \cdot 8 + 3$$

czy:

$$(-7)^2 + (-5)^2 + (-3)^2 = 49 + 25 + 9 = 83 = 4 \cdot 20 + 3$$

nie jest wystarczającym uzasadnieniem.