czną.

kład 3

ozwiąż równanie $(x+3)^2 = 6x$.

$$x^2 + 6x + 9 = 6x$$
$$x^2 = -9$$

Kwadrat liczby rzeczywistej nie może być liczbą ujemną.

m równanie jest sprzeczne – nie jest spełnione przez żadną liczbę $x \in \mathbf{R}$.

ozwiąż nierówność $(2x-1)^2 < 4x(x-1)$.

$$4x^2 - 4x + 1 < 4x^2 - 4x$$
$$1 < 0$$

m nierówność jest sprzeczna – nie jest spełniona przez żadną liczbę $x \in \mathbf{R}$.

nanie lub nierówność spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą nazywamy **aniem tożsamościowym** (krótko: **tożsamością**) lub **nierównością tożsamo-wą**.

kład 4

ozwiąż równanie $(x+3)^2 - (x-3)^2 = 12x$.

$$(x+3)^2 - (x-3)^2 = 12x$$
$$x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 6x + 9) = 12x$$
$$12x = 12x$$

m równanie jest tożsamościowe – jest spełnione przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$.

ozwiąż nierówność $(x-2)(x+2) + 5 > 0$.

$$(x-2)(x+2) + 5 > 0$$
$$x^2 - 4 + 5 > 0$$
$$x^2 > -1$$

Kwadrat liczby rzeczywistej zawsze jest większy od liczby ujemnej.

m nierówność jest tożsamościowa – spełniona dla każdego $x \in \mathbf{R}$.

czenie 5

wdź, czy równanie jest tożsamościowe lub sprzeczne.

$6-x)^2 - (2-x)^2 = -8x$ b) $(x-4)^2 + 4x = (x-2)^2 + 12$

czenie 6

wdź, czy nierówność jest tożsamościowa lub sprzeczna.

$x+1)^2 - 2 \leqslant (x-1)(1+x) + 2x$ b) $6x - (3x-1)^2 \geqslant (2x+3)^2$

działu $(0;4)$?

a) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$ d) $\frac{2}{1-2\sqrt{2}}$ g) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ j) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

b) $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$ e) $\frac{6}{3+2\sqrt{3}}$ h) $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ k) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

c) $\frac{3}{2+\sqrt{5}}$ f) $\frac{8}{3\sqrt{2}-4}$ i) $\frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$ l) $\frac{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

2. Rozwiąż równanie.

a) $(x-5)(x+5) = x^2 - 100x$ d) $4(x+2)^2 - (2x-1)^2 = 20x + 10$

b) $(3-x)^2 - \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$ e) $\left(6 + \frac{1}{3}x\right)\left(-\frac{1}{3}x + 6\right) + \left(\frac{1}{3}x - 4\right)^2 = 4$

c) $4\left(\frac{1}{2}x - 3\right)^2 = (6-x)^2$ f) $(-4x-3)(4x-3) + 8\left(1 - \sqrt{2}x\right)^2 = 1$

3. Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań.

a) $4(x-3)^2 - (2x-5)^2 \geqslant 2$ d) $-9(2-x)^2 - (1-3x)(3x+1) \leqslant 11$

b) $9\left(\frac{2}{3}x - 1\right)^2 > (1-2x)^2 - 8x$ e) $\left(\frac{1}{4}x + 2\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}x\right)\left(1 + \frac{1}{2}x\right) \geqslant 0$

c) $2(x+2)^2 - (\sqrt{2}x - 2)^2 \geqslant 0$ f) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + 1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - 1\right) < \frac{(x-1)^2}{2}$

4. Wyznacz przedział będący zbiorem liczb spełniających obie nierówności.

a) $\begin{cases} (x+1)^2 > x^2 + 1 \\ (x-1)^2 < (2-x)^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (2x+5)(5-2x) + (2x-3)^2 - 2 > 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - 4 < x - (2-x)(2+x) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x-3}{4} < \frac{x+1}{2} \\ (2x-3)^2 \leqslant (5-2x)^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - \frac{4x-2}{3} \geqslant x - 6 \\ 1 - (2x-1)(1+2x) < -2x - (2x-1)^2 \end{cases}$

5. Oblicz.

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

6. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}$ b) $\frac{2}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

D **7.** Udowodnij równość: $\left(\sqrt{1+x^2} + x\right)^{-1} = \sqrt{1+x^2} - x$.

D **8.** Wykaż, że jeśli $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, to $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$.

Liczba $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ to złota liczba (patrz str. 61).