a) $x = -3$  b) $x = 4 - 2\sqrt{6}$  c) $x = 6\sqrt{2} - 8$  d) $x = \pi - 2\sqrt{3}$

Wyznacz liczby spełniające równanie.

a) $2|x| = 8$  c) $\frac{2}{3}|x| = 4$  e) $3|x| + 6 = 7$  g) $3 - 2|x| = 1$

b) $\frac{1}{2}|x| = 7$  d) $-3|x| = -\frac{3}{4}$  f) $\frac{1}{2}|x| - 1 = 3$  h) $9 - \frac{3}{4}|x| = 6$

Która nierówność jest spełniona dla wszystkich liczb rzeczywistych, a która nie zachodzi dla żadnej liczby rzeczywistej?

a) $|x| > -7$, $|x| < -7$  b) $|x| \geqslant -3$, $|x| \leqslant -3$

Zbiór rozwiązań nierówności zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci sumy przedziałów. Ile liczb całkowitych należy do tego zbioru?

a) $1 < |x| < 4$  c) $2 \leqslant |x| \leqslant 5$  e) $\frac{1}{2} \leqslant |x| < 3$  g) $\frac{5}{2} \leqslant |x| \leqslant \frac{9}{2}$

b) $0 < |x| < 6$  d) $3 \leqslant |x| \leqslant \pi$  f) $\sqrt{3} < |x| \leqslant 6$  h) $\sqrt{2} < |x| < 5$

Oblicz.

a) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(7-3\sqrt{5})^2}$  b) $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2} + \sqrt{(3\sqrt{2}-4)^2}$

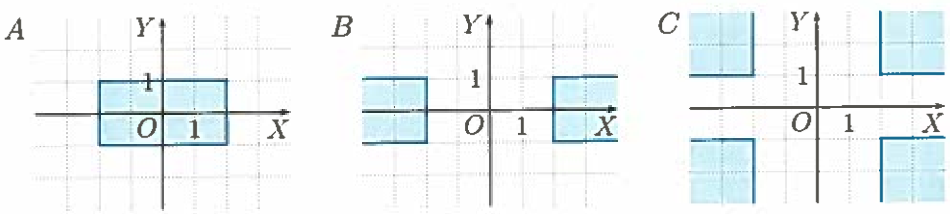
Uzasadnij, że:

a) $\sqrt{6-4\sqrt{2}} = |\sqrt{2}-2|$,  c) $\sqrt{24-8\sqrt{5}} = |2-2\sqrt{5}|$,

b) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = |\sqrt{3}-2|$,  d) $\sqrt{21-12\sqrt{3}} = |3-2\sqrt{3}|$.

Do każdego z przedstawionych zbiorów punktów płaszczyzny dopasuj warunki, które spełniają współrzędne $(x, y)$ tych punktów.

I. $|x| \geqslant 2$ i $|y| \leqslant 1$  II. $|x| \geqslant 2$ i $|y| \geqslant 1$  III. $|x| \leqslant 2$ i $|y| \leqslant 1$




Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne $(x, y)$ spełniają podane warunki.

a) $|x| \leqslant 5$ i $|y| \leqslant 1$  b) $|x| \leqslant 3$ i $|y| \geqslant 2$  c) $1 \leqslant |x| \leqslant 3$ i $|y| \leqslant 4$



Wykaż, że liczba $a = \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2} - 3\sqrt{2}$ jest całkowita.

Zauważ, że $\sqrt{(2-3\sqrt{2})^2} = |2-3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2} - 2$.

Stąd $a = 3\sqrt{2} - 2 - 3\sqrt{2} = -2$, czyli $a \in \mathbf{Z}$.

**Przykład 2**

Wykaż, że liczba $\sqrt{11-6\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ jest całkowita.

Wyrażenie $11 - 6\sqrt{2}$ próbujemy zapisać jako kwadrat różnicy metodą prób i błędów:

$(1-\sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2} \neq 11 - 6\sqrt{2}$

$(1-3\sqrt{2})^2 = 1 - 6\sqrt{2} + 18 = 19 - 6\sqrt{2} \neq 11 - 6\sqrt{2}$

$(3-\sqrt{2})^2 = 9 - 6\sqrt{2} + 2 = 11 - 6\sqrt{2}$

$\sqrt{11-6\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} + \sqrt{2} = |3-\sqrt{2}| + \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 3$, czyli dana liczba jest całkowita.

**Przykład 3**

Wykaż, że liczba $a = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$ jest wymierna.

Aby wykazać, że liczba $a$ jest wymierna, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

- Obliczamy kwadrat liczby $a$:

$$a^2 = \left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2 =$$
$$= 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})} + 4 - 2\sqrt{3} =$$
$$= 8 - 2\sqrt{16-12} = 8 - 4 = 4$$

Ponieważ $a > 0$, otrzymujemy $a = 2$ – jest to liczba wymierna.

- Zauważamy, że $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$ oraz $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2$ (sprawdź), czyli:

$a = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}+1| - |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3}-1) = 2$

co oznacza, że $a$ jest liczbą wymierną.

D **1.** Wykaż, że:

a) $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{12-6\sqrt{3}} = 5$,  b) $3\sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{19-6\sqrt{2}} = 10$.