...nie z tradycją zbiory oznaczamy wielkimi literami. Aby opisać zbiór,
...y określić, jakie są jego **elementy**. Można to zrobić słownie lub (jeśli to
...iwe) wypisać jego elementy, np.:

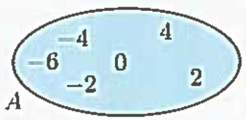
$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ – zbiór liczb naturalnych

$\{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$ – zbiór naturalnych dzielników liczby 20

...:, który ma skończoną liczbę elementów, nazywamy **zbiorem skończonym**.
...:, do którego należy nieskończenie wiele elementów, nazywamy **zbiorem
...kończonym**.
...zapisać, że element należy do zbioru, używamy symbolu $\in$, np. $7 \in \mathbf{N}$,
...zapisać, że element nie należy do zbioru – symbolu $\notin$, np. $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.
...:, do którego nie należy żaden element, nazywamy **zbiorem pustym** i ozna-
...y symbolem $\emptyset$.

...zenie 1

...iagramie przedstawiono sześcioelementowy zbiór A. Określ, czy zdanie
...prawdziwe.



... $\in A$	c) $\sqrt{16} \in A$	e) $-6 \notin A$
... $\in A$	d) $\sqrt{9} \in A$	f) $6 \notin A$

...ze innym sposobem opisania zbioru jest podanie warunku, który muszą
...iać jego elementy. Na przykład zapis $B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 \leqslant 16\}$ oznacza, że
$\{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Dwa zbiory są **równe** wtedy i tylko wtedy, gdy mają te same elementy.

...zenie 2

...zbiory A i B są równe?

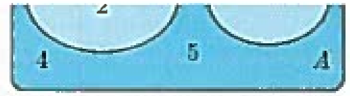
$= \{x \in \mathbf{N} : x^2 \leqslant 27\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 \leqslant 30\}$

$= \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 \leqslant 9\}$

...nicja

...iór A jest **podzbiorem** zbioru B, jeśli każdy element zbioru A jest ele-
...ntem zbioru B. Zapisujemy to: $A \subset B$. Mówimy również, że zbiór A
...t zawarty w zbiorze B. Zapis $A \not\subset B$ oznacza, że A nie jest podzbiorem
...oru B (zbiór A nie jest zawarty w zbiorze B).

...ga. Dla dowolnego zbioru A zachodzą zawierania: $A \subset A$ i $\emptyset \subset A$.
Jeśli $A \subset B$ i $B \subset A$, to zbiory A i B są równe: $A = B$.



Między tymi zbiorami zachodzą zależności:

$$B \subset A \text{ i } C \subset A$$

Ćwiczenie 3

Czy prawdziwa jest któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$?

a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

b) $A = \{-4, -2, -1, 0, 1, 2, 4\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} : x^2 \leqslant 16\}$

c) $A = \{x \in \mathbf{R} : x^2 = 12\}$, $B = \{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\}$

Zwróćmy uwagę, że dla poznanych dotychczas zbiorów liczbowych mają miejsce zawierania:

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$$

Zadania

1. Zapisz zbiory A i B, wypisując wszystkie ich elementy. Czy zachodzi któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$?
   a) $A = \{x \in \mathbf{N} : x \leqslant 5\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 \leqslant 36\}$
   b) $A = \{x \in \mathbf{Z} : -4 \leqslant x \leqslant -2\}$, $B = \{x \in \mathbf{Z} : 4 \leqslant x^2 \leqslant 16\}$
   c) $A = \{x \in \mathbf{Z} : x^2 = 49\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} : x^2 = 49\}$

2. Czy zbiory A i B mają tyle samo elementów?
   a) A – zbiór dzielników liczby 6, B – zbiór dzielników liczby 15
   b) A – zbiór dzielników liczby 36, B – zbiór dzielników liczby 48
   *c) A – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 100 podzielnych przez 2 lub przez 5, B – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 100 podzielnych przez 3 lub przez 4

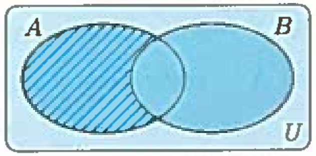
3. Liczba podzbiorów zbioru dwuelementowego $\{1, 2\}$ jest równa 2^2. Podzbiorami tymi są: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1, 2\}$. Wypisz wszystkie podzbiory:
   a) zbioru trzyelementowego $\{1, 2, 3\}$ i sprawdź, czy jest ich 2^3,
   b) zbioru czteroelementowego $\{1, 2, 3, 4\}$ i sprawdź, czy jest ich 2^4.

4. Który ze zbiorów A, B ma więcej podzbiorów?
   a) $A = \{n \in \mathbf{N} : 2 < n^3 < 125\}$, $B = \{n \in \mathbf{N} : n|125\}$
   b) $A = \{k \in \mathbf{Z} : 2 < k^2 < 15\}$, $B = \{k \in \mathbf{Z} : 1 < k^4 < 75\}$

4 i nie należą do zbioru B. Różnicę zbiorów A i B oznaczamy: $A \setminus B$.

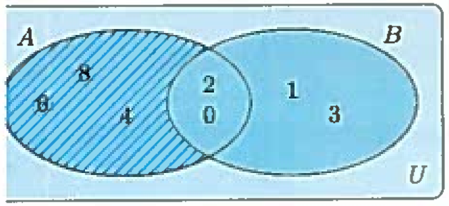
$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ i } x \notin B\}$$

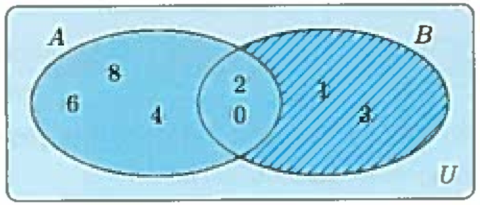
ı diagramie różnica $A \setminus B$ jest przedstawiona jako
szar zakreskowany.



zykład 3

yznacz zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeśli $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ i $B = \{0, 1, 2, 3\}$.





$\setminus B = \{4, 6, 8\}$ $B \setminus A = \{1, 3\}$

viczenie 7

yznacz zbiory $A \setminus B$ i $B \setminus A$, jeśli:

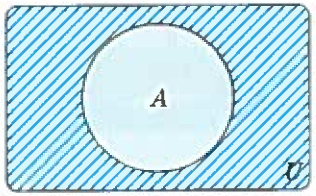
$A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$A = \{n \in \mathbf{N} : 8|n \text{ i } n \leqslant 50\}$, $B = \{n \in \mathbf{N} : 6|n \text{ i } n \leqslant 50\}$.

czególnym przypadkiem różnicy zbiorów jest **do-łnienie zbioru**, które oznaczamy przez A' i defi-ujemy jako różnicę całej przestrzeni i zbioru A:

$$A' = U \setminus A = \{x \in U : x \notin A\}$$

ɔszar zakreskowany na diagramie to zbiór A'.



viczenie 8

ɔzpatrzmy zbiór $U = \{0, 1, 2, \ldots, 10\}$ oraz jego podzbiory A i B, przy czym ı zbioru A należą liczby parzyste, a do B liczby podzielne przez 3. Uzasadnij, zachodzi równość:

$(A \cap B)' = A' \cup B'$, b) $(A \cup B)' = A' \cap B'$.

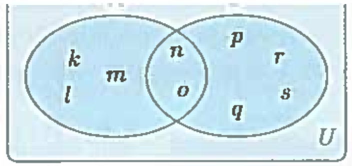
ɔdane obok równości zachodzą dla dowolnych ıiorów A, B. Nazywane są **prawami De Morgana**.

Prawa De Morgana

$(A \cap B)' = A' \cup B'$

$(A \cup B)' = A' \cap B'$

Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.



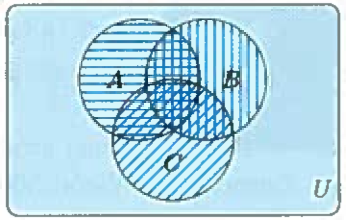
2. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, gdy:

a) $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{-3, -1, 1, 3\}$,

b) $A = \{\frac{1}{2}, 1, 2, 4\}$, $B = \{0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{4}\}$,

c) $A = \mathbf{N}$, $B = \mathbf{Z}$.

3. Na diagramie obok obszar potrójnie zakreskowany odpowiada zbiorowi $A \cap B \cap C$. Wyznacz ten zbiór, jeśli $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $C = \{1, 2, 4, 5, 7, 8\}$.



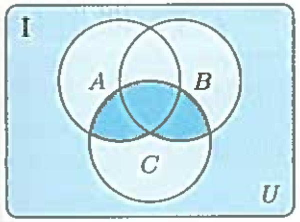
4. A jest zbiorem spółgłosek w słowie *arytmetyka*, B – zbiorem spółgłosek w słowie *geometria*, a C – zbiorem spółgłosek w słowie *algebra*. Wyznacz zbiór:

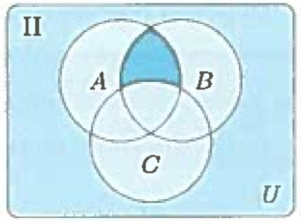
a) $A \cap B$, c) $B \setminus A$, e) $B \setminus C$, g) $A \cap B \cap C$,

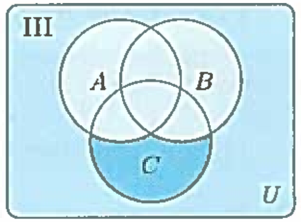
b) $A \setminus B$, d) $B \cap C$, f) $C \setminus B$, h) $A \cup B \cup C$.

5. Który z poniższych diagramów odpowiada zbiorowi:

a) $(A \cap B) \setminus C$, b) $C \setminus (A \cup B)$, c) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$?







6. Przyjmij, że żadne dwa spośród zbiorów: A, B, C nie są rozłączne i na oddzielnych diagramach przedstaw zbiory:

a) $A \cup (B \cap C)$ i $(A \cup B) \cap (A \cup C)$,

b) $A \cap (B \cup C)$ i $(A \cap B) \cup (A \cap C)$,

c) $A \cap (B \setminus C)$ i $(A \cap B) \setminus (A \cap C)$,

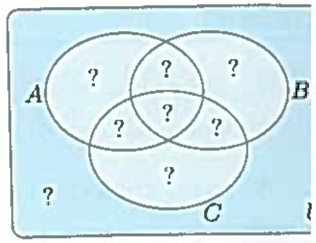
d) $B \setminus (A \cup C)$ i $(A \cup B) \setminus (A \cup C)$.

Porównaj otrzymane wyniki.

Czy wiesz, że…

Diagramy ilustrujące zależności między zbiorami – takie jak użyte w tym temacie – noszą nazwę diagramów Venna na cześć angielskiego matematyka i filozofa Johna Venna (1834–1923).

7. Dany jest zbiór $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Przerysuj przedstawiony obok diagram do zeszytu i umieść na nim liczby ze zbioru U, korzystając z podanych niżej informacji.



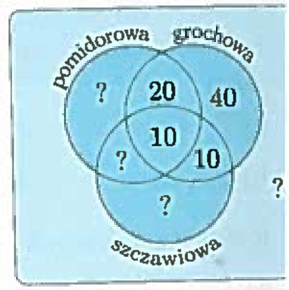
$A \cap B \cap C = \{1,2\}$, $A \cap B = \{1,2,3\}$,
$B \cap C = \{1,2,6\}$, $A \cap C = \{1,2\}$,
$A = \{1,2,3,4,9\}$, $B = \{1,2,3,6,7,8\}$, $C = \{1,2,5,6\}$.

Następnie wyznacz zbiory:

a) $A \cup B$, $A \cup C$, $A \setminus C$, $B \setminus C$,
b) $A \setminus (B \cap C)$, $(A \setminus B) \cap C$,
c) $A \cup (B \cap C)$, $(A \cup B) \cap C$,
d) $A' \cap B'$, $A' \cup C'$, $A' \cup B' \cup C$

8. W ofercie pewnej stołówki są tylko trzy zupy: pomidorowa, szczawiow i grochowa. Wśród 300 uczniów korzystających z tej stołówki przeprow dzono ankietę, której wyniki podano poniżej.

130 uczniów lubi zupę pomidorową,
110 uczniów lubi zupę szczawiową,
80 uczniów lubi zupę grochową,
40 uczniów lubi zupę pomidorową i szczawiową,
30 uczniów lubi zupę pomidorową i grochową,
20 uczniów lubi zupę szczawiową i grochową,
10 uczniów lubi wszystkie zupy.



Przerysuj do zeszytu i uzupełnij powyższy diagram. Podaj, ilu uczniów

a) nie lubi żadnej z oferowanych przez stołówkę zup,
b) lubi dokładnie jedną zupę oferowaną przez stołówkę,
c) lubi dokładnie dwie zupy oferowane przez stołówkę.

9. W 30-osobowej klasie 14 uczniów ma psa, 9 – kota, 3 – świnki morsl a 8 nie ma żadnego z wymienionych zwierząt. Uczniowie mający świ morskie nie mają innych zwierząt. Podaj, ilu uczniów ma jednocześnie i kota.

10. Naszkicuj diagramy dla zbiorów:

$$(A \cup B \cup C)',\ (A \cap B \cap C)',\ A' \cup B' \cup C',\ A' \cap B' \cap C'$$

Na ich podstawie sformułuj odpowiednie prawa rachunku zbiorów.

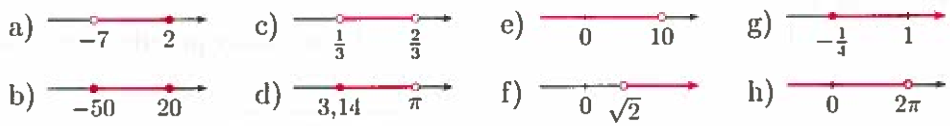
Nazwa zbioru	Oznaczenie	Warunek, który spełniają liczby x należące do zbioru	Ilustracja graficzna
przedział otwarty	$(a;\infty)$	?	a
przedział lewostronnie domknięty	$\langle a;\infty)$	$x \geqslant a$	?
?	?	$x \leqslant b$	b
?	$(-\infty;b)$	?	?

Zadania

Zapisz jako przedział zbiór liczb spełniających podany warunek.

a) $-7 \leqslant x \leqslant 0$ b) $\frac{1}{4} \leqslant x < \sqrt{2}$ c) $x \geqslant 2\frac{1}{4}$ d) $x < -\frac{1}{3}$

Zapisz symbolicznie poniższe przedziały i podaj warunki, które muszą spełniać należące do nich liczby.



Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór wszystkich:

a) liczb dodatnich, których odległość od zera jest mniejsza od 4,

b) liczb ujemnych, których odległość od zera jest nie większa niż 4,

c) liczb nieujemnych, których odległość od zera jest większa od $2\frac{1}{2}$,

d) liczb niedodatnich, których odległość od zera jest nie mniejsza niż $\sqrt{2}$.

Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór, do którego:

a) należą liczby odległe od liczby 1 o mniej niż 2,

b) należą liczby odległe od liczby -1 o mniej niż 3,

c) należą liczby odległe od liczby 3 o nie więcej niż 2,

d) odległe od liczby $-\frac{1}{4}$ o nie więcej niż $\frac{3}{2}$.

Wypisz wszystkie liczby całkowite należące do przedziału:

a) $\langle -1;4)$, b) $(0;6)$, c) $\langle -\frac{2}{3};\frac{5}{2}\rangle$, d) $\langle -\frac{25}{4};-2\rangle$.

b) $(-1;2)$, $x=-1{,}01$, $y=-0{,}(5)$, $z=1{,}(5)$

7. Ile liczb całkowitych x spełnia podany warunek?

a) $\sqrt{x} \in \langle 1;2\rangle$ b) $\sqrt{x} \in \langle 2;3\rangle$ c) $\sqrt[3]{x} \in (1;2)$ d) $\sqrt[3]{x} \in \langle -2;0)$

8. Sprawdź, czy zachodzi któraś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$.

a) $A=(-1;2)$, $B=\langle -1;3)$ c) $A=(-\frac{7}{8};\frac{15}{8})$, $B=\langle -\frac{6}{7};\frac{13}{7}\rangle$

b) $A=(-\infty;7)$, $B=(2;7)$ d) $A=(\frac{22}{7};7)$, $B=(\pi;\sqrt{50})$

9. Podaj najdłuższy przedział domknięty, którego końce są liczbami całkowitymi i który jest zawarty w przedziale:

a) $(-2\frac{1}{2};5\rangle$, b) $(-\pi;6)$, c) $\langle -3\frac{3}{4};2\frac{3}{4})$, d) $\langle -\sqrt{2};\sqrt{3}\rangle$.

10. Wskaż na osi liczbowej liczbę jednakowo odległą od końców przedziału:

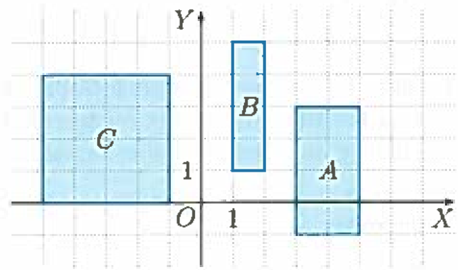
a) $\langle -3;1)$, b) $\langle -2;3)$, c) $\langle \sqrt{2};4\sqrt{2}\rangle$, d) $\langle 1\frac{1}{4};2\frac{3}{4}\rangle$.

11. Dla jakich wartości parametru p przedziały $\langle p;p+1\rangle$ oraz $\langle 2p;2p+1\rangle$ mają dokładnie jeden punkt wspólny?

12. Współrzędne (x,y) punktów należących do prostokąta A (rysunek obok) spełniają warunki: $x \in \langle 3;5\rangle$ i $y \in \langle -1;3\rangle$. Zapisz warunki, które spełniają punkty należące do:

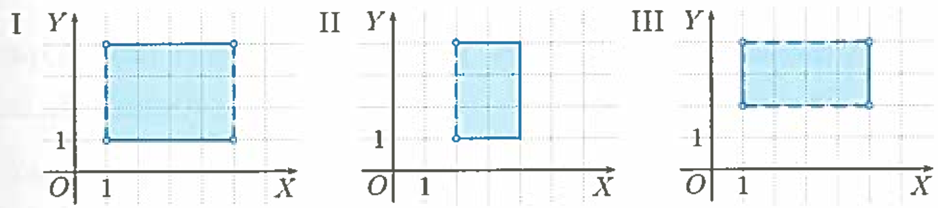
a) prostokąta B,

b) kwadratu C.



13. Na którym z poniższych rysunków przedstawiono zbiór punktów (x,y), których współrzędne spełniają warunki:

a) $x \in (2;4)$, $y \in \langle 1;4\rangle$, b) $x \in \langle 1;5\rangle$, $y \in (2;4)$, c) $x \in \langle 1;5)$, $y \in \langle 1;4\rangle$?



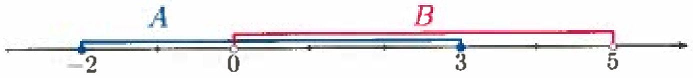
Uwaga. Linia przerywana na rysunku oznacza, że leżące na niej punkty nie należą do zbioru.

zedziały to podzbiory zbioru liczb rzeczywistych, można wykonywać na nich ialania: $\cup, \cap, \setminus$.

zykład 1

yznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, gdy $A = \langle -2; 3\rangle$ i $B = (0; 5)$.

edy wykonujemy działania na przedziałach, wygodnie jest posługiwać się ı ilustracją graficzną.



$A \cup B = \langle -2; 5)$	Sumie przedziałów A i B odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona co najmniej jednym kolorem.
$A \cap B = (0; 3\rangle$	Iloczynowi przedziałów A i B odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona dwoma kolorami.
$A \setminus B = \langle -2; 0\rangle$	Różnicy $A \setminus B$ odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona tylko kolorem niebieskim.
$B \setminus A = (3; 5)$	Różnicy $B \setminus A$ odpowiada ta część osi, która jest zaznaczona tylko kolorem czerwonym.

vaga. Wykonując działania na przedziałach, zwróć szczególną uwagę na ich końce. ı osi liczbowej używamy pustego kółka, gdy liczba odpowiadająca temu punktowi ɜ należy do zbioru, a kółka zamalowanego – gdy należy.

wiczenie 1

'yznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

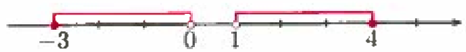
$A = (1; 4)$, $B = (2; 6)$ — c) $A = \langle 1; 3\rangle$, $B = \langle -5; 3\rangle$

$A = \langle -4; 1\rangle$, $B = \langle 1; 3)$ — d) $A = (-3; 2\rangle$, $B = (-1; 2\rangle$

zykład 2

ɔiór X zaznaczony na osi liczbowej jest sumą przedziałów $\langle -3; 0)$ i $(1; 4\rangle$.

$X = \langle -3; 0) \cup (1; 4\rangle$



wiczenie 2

ıznacz na osi liczbowej zbiór X.

$X = \langle -4; -1\rangle \cup \langle 2; 4)$ — b) $X = \langle -6; -5\rangle \cup (-3; 2) \cup \langle 4; \infty)$

$A \setminus B = \langle -2; 0) \cup (2; 3\rangle$

Różnicą zbiorów A i B jest suma przedziałów.

Ćwiczenie 3

Wyznacz zbiór $A \setminus B$.

a) $A = \langle -5; 4\rangle$, $B = (-3; -1)$ — c) $A = \langle -3; \infty)$, $B = \langle -1; 2)$

b) $A = \langle -3; 5)$, $B = \langle 2; \frac{5}{2})$ — d) $A = \mathbf{R}$, $B = \langle -3; 1\rangle$

Zadania

1. Wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

a) $A = (-3; 0)$, $B = \langle -1; 4)$ — c) $A = (-\infty; 2\rangle$, $B = \langle 0; 2)$

b) $A = (-4; 2\rangle$, $B = \langle -\frac{1}{2}; 3)$ — d) $A = \langle -1; 2\rangle$, $B = \langle 2; \infty)$

2. Ile elementów należy do zbioru X? Wykonaj odpowiednią ilustrację graficzną.

a) $X = \langle -5; 6\rangle \cap \mathbf{N}$ — b) $X = (-3; 3) \cap \mathbf{Z}$ — c) $X = (-\pi; \pi) \cap \mathbf{N}$

3. Niech $A = (-5; 3)$, $B = (-7; 4)$. Ile liczb całkowitych należy do zbioru:

a) $A \cup B$, — b) $A \cap B$, — c) $A \setminus B$, — d) $B \setminus A$?

4. Zaznacz zbiór X na osi liczbowej.

a) $X = \langle -2; 0) \cup \langle 1; 2\rangle \cup \langle 4; 6\rangle$ — c) $X = (-\infty; -4\rangle \cup \langle -2; 1) \cup \{3\}$

b) $X = (-3; -1) \cup (0; 2\rangle \cup \langle 3; \infty)$ — d) $X = (-\infty; -2\rangle \cup \{0, 1\} \cup \langle 4; \infty)$

5. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B, a następnie wyznacz zbiory: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

a) $A = (-3; 1) \cup (3; 6)$, $B = (0; 4)$ — d) $A = (-2; 0\rangle$, $B = \{0\} \cup \langle 3; 5)$

b) $A = \langle -2; 1) \cup \langle 4; 5\rangle$, $B = (0; \infty)$ — e) $A = \langle 0; 7\rangle$, $B = (1; 3) \cup \langle 8; 9\rangle$

c) $A = (-\infty; 0) \cup \langle 2; 5\rangle$, $B = (-1; 6)$ — f) $A = \langle 1; 9\rangle$, $B = (1; 2) \cup (6; 9)$

6. Zaznacz na osi liczbowej zbiory A i B. Wyznacz zbiory: $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

a) $A = \langle -5; 2\rangle$, $B = \{1, 2\}$ — c) $A = (-\infty; 4\rangle$, $B = \{0\} \cup \langle 4; \infty)$

b) $A = \langle 3; \infty)$, $B = \{2, 3, 4\}$ — d) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1\} \cup (2; \infty)$

zykład 2

zwiąż nierówność $6x + 5 < 17$.

$+5 < 17$ Od obu stron nierówności odejmujemy 5.

$6x < 12 \ / : 6$ Obie strony nierówności dzielimy przez 6.

$x < 2$

iczenie 4

zwiąż nierówność.

$3x + 7 \leqslant 34$ b) $\frac{3}{4}x - 1 > \frac{1}{3}$ c) $0{,}1x + 1 < -\frac{1}{2}$ d) $5x - 7 \geqslant 3x + 5$

Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą iczbę ujemną, to po zmianie zwrotu nierówności otrzymamy nierówność ównoważną.

zykład 3

Rozwiąż nierówność $-\frac{1}{3}x > 5$.

$\frac{1}{3}x > 5 \ / \cdot (-3)$ Mnożymy obie strony nierówności przez -3.

$x < -15$ Zmieniamy zwrot nierówności.

róć uwagę na to, że zamiast mnożyć obie strony nierówności przez liczbę mną (-3), można je pomnożyć przez 3 i przenieść odpowiednie wyrazy na ugą stronę nierówności.

Rozwiąż nierówność $-6x - 4 \leqslant -13$.

$6x - 4 \leqslant -13$ Do obu stron nierówności dodajemy 4.

$-6x \leqslant -9 \ / : (-6)$ Dzielimy obie strony nierówności przez -6.

$x \geqslant \frac{3}{2}$ Zmieniamy zwrot nierówności.

iczenie 5

zwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań nierówności.

$-3x - 7 < 2$ c) $3(x-1) \geqslant x + 5$ e) $\frac{x-3}{2} < \frac{x+2}{3}$

$-\frac{2}{3}x + 1 \leqslant 5$ d) $2(x + \frac{1}{4}) > \frac{1}{2}x + 4$ f) $\frac{2-x}{5} \leqslant \frac{x+1}{2}$

liczbę $x \in \mathbf{R}$, czy jest sprzeczna.

a) $3(2 - \frac{1}{6}x) \geqslant -0{,}5x + 1$

b) $-\frac{2}{3}(3x - 2) > \frac{1}{2}(3 - 4x)$

c) $\frac{x-2}{2} < \frac{3x-4}{6} - 1$

d) $\frac{4-3x}{3} \geqslant \frac{2-5x}{5} + 5$

e) $\frac{x-3}{2} < \frac{2x+1}{3} - \frac{x-2}{6}$

$1 - 3x < -3x$

$1 < 0x$ sprzeczność

Nierówność jest sprzeczna (nie spełnia jej żadna liczba).

b) $4x - 2 \geqslant 4x - 10$

$0x \geqslant -8$

Nierówność jest spełniona przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$.

Zadania

1. Zapisz w postaci przedziału zbiór liczb spełniających poniższy warunek (klamra oznacza, że obie nierówności mają być jednocześnie spełnione).

a) $\begin{cases} x + 9 \geqslant 13 \\ 2x - 6 < 4 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x + 6 > -9 \\ 1 - x \geqslant 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x + 3 \leqslant 4 \\ 5 - 4x \geqslant 1 \end{cases}$

2. Zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci przedziału zbiór liczb, które jednocześnie spełniają obie nierówności. Podaj najmniejszą i największą liczbę całkowitą należącą do tego przedziału.

a) $2x + 20 > 8$ i $5 < 1 - x$ c) $2x + 3 < 7$ i $3 - 4x \leqslant 19$

b) $2x + 3 > 2$ i $4x < 3$ d) $3x + 9 > -7$ i $-3x > 4x + 21$

3. Które spośród liczb: $a = 1 - \sqrt{2}$, $b = \sqrt{5} - 1$, $c = \pi + 2$, spełniają podaną nierówność?

a) $\frac{3}{4}x - \frac{2}{3} > x + \frac{1}{2}$ c) $\frac{3x-2}{5} \geqslant \frac{x+1}{3}$ e) $\frac{3x+2}{-5} < 3 - x$

b) $\frac{5}{6}x - \frac{1}{2}x \leqslant \frac{3}{8}x - \frac{1}{6}$ d) $\frac{2x+7}{3} > \frac{6-x}{2}$ f) $-3(x+3) > \frac{x-5}{-2}$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $2 - \frac{x+3}{3} < \frac{2x-3}{2}$ d) $\frac{3x+1}{4} - \frac{6-2x}{5} > -\frac{1}{20} - \frac{x-1}{2}$

b) $\frac{2-x}{2} - \frac{2x-1}{3} \leqslant 1 - x$ e) $-\frac{1}{6}x - \frac{2x-5}{4} \geqslant 3 - \frac{8x-3}{3}$

c) $\frac{x+4}{12} + 1 \geqslant \frac{x}{6} - \frac{3-x}{4}$ f) $\frac{x-1}{3} - \frac{2x-1}{6} < \frac{1}{2} - \frac{x-3}{5}$

5. Rozwiąż nierówność.

a) $\sqrt{3}x - 6 < 9 - 2\sqrt{3}x$ b) $\sqrt{2}x + 4 < \sqrt{8}x - 8$ c) $\sqrt{5}x < \frac{5\sqrt{5}}{3}x - 2\frac{2}{3}$

■ Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi następująca własność (zwana przechodniością): jeśli $a < b$ i $b < c$, to $a < c$.

. a) Jeśli podwoimy liczbę naturalną n, od otrzymanego iloczynu odejmiemy 11, a uzyskaną różnicę pomnożymy przez 3, to otrzymamy liczbę naturalną mniejszą od 21. Podaj możliwe wartości n.

b) Jeśli potroimy całkowitą liczbę ujemną k, do otrzymanego iloczynu dodamy 7, a następnie otrzymaną sumę pomnożymy przez 4, to otrzymamy liczbę większą od 2. Podaj możliwe wartości k.

c) Jeśli od połowy liczby naturalnej m odejmiemy trzecią część liczby m pomniejszonej o 2, to otrzymamy liczbę mniejszą od 3. Podaj możliwe wartości m.

. Wysokość prostopadłościanu jest równa k cm, a jego podstawą jest kwadrat o boku 3 cm. Jakie wartości całkowite może przyjmować k, jeśli:

a) suma długości wszystkich krawędzi tego prostopadłościanu jest większa od 38 cm i mniejsza od 46 cm,

b) pole powierzchni całkowitej tego prostopadłościanu jest większe od 40 cm^2 i mniejsze od 68 cm^2?

. Właściciel klubu chce zaprosić na koncert jeden z dwóch zespołów rockowych. Zespół Gamma zażądał za występ 2230 zł, a zespół Kappa – 1550 zł plus 8 zł od każdego uczestnika koncertu. Dla jakiej liczby uczestników tańsze będzie zaproszenie zespołu Gamma?

. Który symbol, < czy >, należy wstawić w miejsce $\boxed{?}$, aby otrzymać nierówność prawdziwą, jeśli $c < 0$ oraz $a > b$? Zapisz tę nierówność w zeszycie.

a) $-ac \boxed{?} -bc$ b) $\frac{a}{c^2} \boxed{?} \frac{b}{c^2}$ c) $\frac{a}{c^3} \boxed{?} \frac{b}{c^3}$

. Czy poniższe zdanie jest prawdziwe (odpowiedź uzasadnij)?

a) Dla dowolnych liczb p, q, jeśli $p < q$, to $p^2 < q^2$.

b) Dla dowolnych różnych od zera liczb p, q, jeśli $p < q$, to $\frac{1}{p} > \frac{1}{q}$.

. Udowodnij.

a) Jeśli $p < q$ i $r < s$, to $p(r-s) > q(r-s)$.

★ b) Jeśli $p, q, r, s > 0$ i $\frac{p}{q} < \frac{r}{s}$, to $\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s}$ oraz $\frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$.

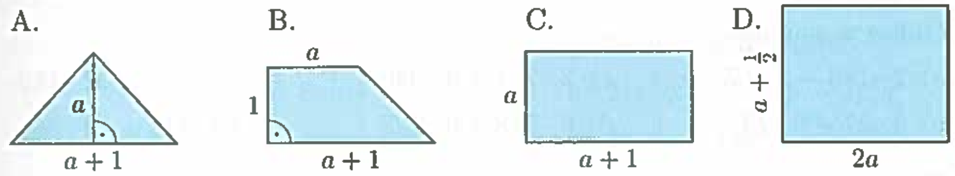
$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$$

1. Wykonaj mnożenie.

a) $(3x^2+2x-4)x^2$
b) $-2x^3\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x-2\right)$
c) $-\frac{1}{2}x^2(4x^2y-2xy^2)$
d) $\sqrt{2}x^4\left(\sqrt{8}xy+y^2\right)$
e) $(x^2y-xy+xy^2)x^2y$
f) $2\sqrt{3}xy^3\left(\sqrt{3}x^2y^2-\frac{1}{2}x^3y\right)$

2. Dopasuj do figury wzór na jej pole.

A. B. C. D.



I. $2a^2+a$ II. a^2+a III. $\frac{1}{2}a^2+\frac{1}{2}a$ IV. $a+\frac{1}{2}$

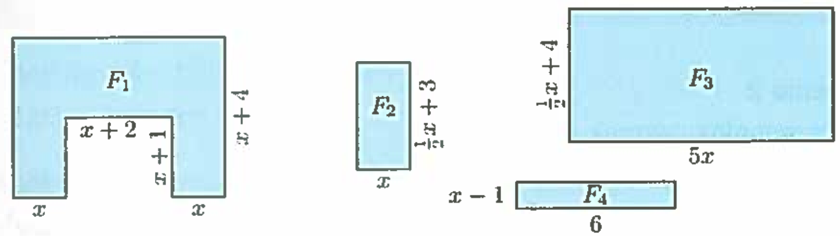
3. Wykonaj mnożenie i zredukuj wyrazy podobne.

a) $2x(3x-4)-6x(x^2+2x-3)$
b) $-\frac{1}{2}x^2(x^2-2x+6)-2x\left(\frac{1}{2}x^2-4x\right)$
c) $\sqrt{6}x^3\left(\sqrt{3}x-\sqrt{2}\right)+\sqrt{3}x\left(2x^2-4\sqrt{2}x\right)$
d) $xy^2(2x-3xy+y)+\frac{1}{4}x^2y\left(\frac{1}{2}y^2-8y\right)$
e) $-\frac{1}{2}x^3y(xy-2xy^2)-\frac{1}{8}xy^2(4x^3-16x^2y)$
f) $-\frac{1}{4}x^2y(-2x+y)-\frac{3}{4}y(x^2-x^2y)-\frac{1}{2}(x^3y+xy)$

D **4.** Uzasadnij, że wartość wyrażenia nie zależy od wartości zmiennej x.

a) $4x^2\left(x^2-\frac{3}{2}x+1\right)-3x\left(\frac{4}{3}x^3-2x^2+1\right)-4\left(x^2-\frac{3}{4}x-8\right)$
b) $\sqrt{15}x\left(2\sqrt{3}x^2-6\sqrt{5}x-\sqrt{10}\right)-2\sqrt{5}x^2\left(3x-3\sqrt{15}\right)+\sqrt{6}(5x-1)$

D **5.** Uzasadnij, że suma pól figur F_1 i F_2 równa się różnicy pól figur F_3 i F_4.



…zeń w poszczególnych wyrażeń sumy rozpoznają się jednakowe czynniki i wy…czy je przed nawias, łatwiej będzie wykonać obliczenia.

…rzykład 1

…blicz sumę $7 \cdot 49 + 7 \cdot 51$.

…yłączamy przed nawias liczbę 7:

$\cdot 49 + 7 \cdot 51 = 7 \cdot (49 + 51) = 7 \cdot 100 = 700$

Korzystamy z własności działań
$a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
zwanej rozdzielnością mnożenia względem dodawania.

…wiczenie 1

…blicz w pamięci.

$2 \cdot 183 + 2 \cdot 17$	c) $3 \cdot 251 + 3 \cdot 249$	e) $12 \cdot 228 + 12 \cdot 172$
$9 \cdot 27 + 9 \cdot 23$	d) $6 \cdot 378 + 6 \cdot 222$	f) $19 \cdot 116 + 19 \cdot 84$

…ównież w sumach algebraicznych można wyłączyć wspólny czynnik przed …awias.

…rzykład 2

…ana jest suma algebraiczna $6x^3 + 12x^2$. Wyłącz przed nawias wspólny czyn…k.

Wyłączamy przed nawias 6:	$6x^3 + 12x^2 = 6(x^3 + 2x^2)$
Wyłączamy przed nawias $6x$:	$6x^3 + 12x^2 = 6x(x^2 + 2x)$
Wyłączamy przed nawias $6x^2$:	$6x^3 + 12x^2 = 6x^2(x + 2)$
Wyłączamy przed nawias $12x^2$:	$6x^3 + 12x^2 = 12x^2\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

…, jaki czynnik wyłączymy przed nawias, zależy od konkretnego zadania.

Wyłączanie wspólnego czynnika przed nawias jest czynnością odwrotną do mnożenia jednomianu przez sumę algebraiczną.

$$a \cdot b + a \cdot c = a(b + c)$$

…wiczenie 2

…yłącz wspólny czynnik przed nawias.

$5x + 5y$	c) $9x - 27y^2$	e) $39y^2 - 26z$	g) $-48p + 36q^2$
$4b - 8a$	d) $-6x^2 + 18y^2$	f) $-11a^3 + 22b^2$	h) $75xy^3 - 125$

b) $2x^3 - 12xy,\ 2x$	d) $6pq + 18p^2q,\ 6pq$	f) $4x^2y^2 - 5x^3y^2 + 2x^2y^3,\ x^2y^2$

Przed nawias wyłączamy zwykle **czynnik liczbowy** oraz **wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższych potęgach**. Na przykład:

$$27x^3y^2 + 18x^2y^3 = 9x^2y^2(3x + 2y)$$

Ćwiczenie 4

Wyłącz przed nawias czynnik liczbowy oraz wszystkie możliwe zmienne w jak najwyższych potęgach.

a) $8x^3 - 36x^2$	d) $20ax - 15ay$	g) $2a^3b + 4a^2b - 4a^2b^2$
b) $7y^2 - 14y^4$	e) $8ab + 12bc$	h) $21p^3q^2 - 27p^2q^3 + 3p^2q^2$
c) $5x^3 + 10x^2y$	f) $4xy + 6x^2y$	i) $48x^2y + 18xy^2 - 12x^2y^2$

Zadania

1. Oblicz.

a) $4 \cdot 49 + 4 \cdot 51$	c) $113 \cdot 25 + 87 \cdot 25$	e) $10 \cdot 17 + 10 \cdot 33 + 50 \cdot 10$
b) $40 \cdot 47 + 40 \cdot 53$	d) $63 \cdot 37 + 37 \cdot 37$	f) $15 \cdot 17 + 15 \cdot 2 + 15$

2. Wyłącz podany czynnik przed nawias.

a) $a^2b + ab^3,\ ab$	c) $9a^3b^2 - 3a^2c^2,\ 3a^2$	e) $3a^3b^2 - 6a^2b,\ 3a^2b$
b) $x^3y^2 - xy^3,\ xy^2$	d) $4x^4y^4 + 8y^3z,\ 4y^3$	f) $6x^2y^4 + 8x^3y^3,\ 2x^2y^3$

3. Zapisz wyrażenie algebraiczne w postaci iloczynu, wyłączając przed nawias podany jednomian.

a) $x^2yz + xy^2z + xyz^2,\ xyz$	c) $2x^3y - 4x^2y^2 + 6x^2yz,\ 2x^2y$
b) $x^2yz^2 + xy^2z^3 - x^3yz^2,\ xyz^2$	d) $12x^4y^3 + 6x^3y^3 - 9x^5y^2,\ 3x^3y^2$

4. Przepisz do zeszytu i uzupełnij odpowiednimi jednomianami.

a) $27y^4 + 36y^3 - 54y^2 = 9y^2(3y^2 + \boxed{?} + \boxed{?})$

b) $3ab(3a + b + \boxed{?}) = 9a^2b + \boxed{?} + 6ab$

c) $12t^4 - 9t^3 + 3t^2 = \boxed{?} \cdot (\boxed{?} - 3t + 1)$

5. Oblicz wartość podanego wyrażenia, jeśli $a + b = 15$.

a) $-3a - 3b$	b) $2(a + b) - 4a - 4b$	c) $a(a + b) + b(a + b)$

a) $(2a+b)(a-1)$ c) $(-2a+b)(6a-2)$ e) $(2a+b^2)(a-2b)$
b) $(3a-2b)(2b+3)$ d) $(3+4a)(-2b-1)$ f) $(a^2-3b)(2b-3a)$

Wykonaj mnożenie.

a) $(x+2y+3)(x-2)$ c) $(x^2+y)(x+y+2)$ e) $2x(x-2y)(3+y)$
b) $(2x-y+1)(2x-3)$ d) $(x-y)(x^2-2x+1)$ f) $-4x(2x-y)(2x+y)$

Uprość wyrażenie.

a) $(a+3)(a-4)+(a-3)(a+4)$ d) $3y^2-2x(x+2y)-(x-y)(2x+y)$
b) $(2a-b)(a+3b)-(a-4b)(2a+b)$ e) $2x^2+3(x(x+2)-x(x-3))$
c) $-4a^2+3a(a-1)+(2a-1)(a+3)$ f) $-4x^2-6(y^2-(x-2y)(x+y))$

Uprość wyrażenie i oblicz jego wartość dla $x=-0{,}5$.

a) $(x+2)(6(x+4)-5(x+6))$ b) $-2(x^4+x^2)+x^3(x+1)+(x^2-2)(x^2+3)$

Dany jest prostokąt o bokach długości a i $a+2$.

a) Przedstaw wzór na pole tego prostokąta w postaci sumy algebraicznej.

b) Krótszy bok tego prostokąta przedłużono o 1, a dłuższy skrócono o 1, w wyniku czego powstał kwadrat. Wyznacz różnicę między polem kwadratu a polem prostokąta.

a) Dany jest kwadrat o boku długości $x+3$. O ile zmniejszy się pole tej figury, gdy jeden jej bok zmniejszymy o 2, a drugi o 1?

b) Dany jest trójkąt o podstawie równej $a+3$ i wysokości opuszczonej na tę podstawę równej $a+4$. O ile zwiększy się pole trójkąta, gdy wysokość zwiększymy o 2?

c) Dany jest prostokąt o bokach długości $x+4$ i $2x+3$. O ile zwiększy się pole tego prostokąta, jeśli jeden z jego boków zwiększymy o 2, a drugi o 1? Rozpatrz dwa przypadki.

Oblicz.

a) $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})(4\sqrt{3}-8\sqrt{2})$ c) $(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3})-(4-\sqrt{6})$
b) $(2\sqrt{5}-4\sqrt{2})(2\sqrt{2}+\sqrt{5})$ d) $(\sqrt{5}+2\sqrt{3})(2\sqrt{5}-\sqrt{3})+(6-3\sqrt{15})$

Uzasadnij, że dla dowolnej liczby x wartość wyrażenia jest nieujemna.

a) $(3x-6)(4x-2)-(6x+3)(2x-6)$
b) $(3x-2)(2x-1)-(5x-2)(x-1)$

b) $(x-4)(x+6)=x(x-4)$ e) $(2x+1)(x+3)=(x-4)(2x-3)$
c) $(2-x^2)(x^2-3)=x+5x^2-x^4$ f) $(2x^2+x-3)(x-4)=x^2(2x-7)$

10. Rozwiąż nierówność.

a) $x^2-(x+3)(x-3)\leqslant 6x$ c) $(2x-1)(3x-1)-(3x-2)(2x-3)\geqslant 0$
b) $(4-x)(2x+3)+2x^2<6$ d) $(4-6x)(2x+1)+(4x-5)(3x-1)>x$

11. Ile liczb naturalnych spełnia podaną nierówność?

a) $(3x+1)(2-x)+x(3x-5)\geqslant x$
b) $2x^2-(2x+1)(x-3)>6x-7$
c) $(3x+3)(2x-1)+4x<6(x+2)(x-1)+9$
d) $\left(x+1\frac{1}{2}\right)(2x+1)\geqslant\left(2x+\frac{1}{2}\right)(x-1)+6x$

12. a) Dane są dwa prostokąty: P_1 o wymiarach $(2x+30)$ cm $\times$ $(x+20)$ cm oraz P_2 o wymiarach $(2x+10)$ cm $\times$ $(x+10)$ cm. Różnica pól prostokątów P_1 i P_2 jest równa 900 cm^2. Oblicz obwody tych prostokątów.

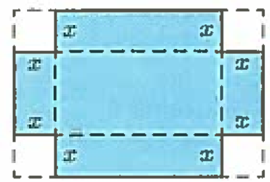
b) Dane są dwa prostokąty o wymiarach $(6-x)$ cm $\times$ $(2x-5)$ cm oraz $(x+5)$ cm $\times$ $(2x-1)$ cm. Suma ich pól jest równa 69 cm^2. Oblicz różnicę między polem większego i mniejszego prostokąta.

c) Dane są dwa czworokąty: kwadrat o boku $(2x+7)$ cm oraz prostokąt o wymiarach $(4x+1)$ cm $\times$ $(x+3)$ cm. Pole kwadratu jest o 91 cm^2 większe od pola prostokąta. Oblicz różnicę między obwodami kwadratu i prostokąta.

13. Wykonaj mnożenie.

a) $(x+1)(x-1)(x^2-1)(x^4-1)$ c) $(a+b)(a^2-ab+b^2)(a^3-b^3)$
b) $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)$ d) $(a-b)(a^2+ab+b^2)(a^3-b^3)$

D **14.** a) Z prostokątnego arkusza tektury o bokach 30 cm i 20 cm wycięto w rogach kwadraty o boku x cm. Pozostałą część sklejono i otrzymano otwarte pudełko. Uzasadnij, że pojemność tego pudełka wyraża się wzorem: $V=4x^3-100x^2+600x$.



b) Z kwadratowego arkusza tektury o boku równym 40 cm wycięto w rogach kwadraty o boku x cm. Pozostałą część sklejono i otrzymano otwarte pudełko. Zapisz w postaci sumy algebraicznej wzór opisujący pojemność tego pudełka.

... Wzory skróconego mnożenia

...rdzenie

...dowolnych liczb rzeczywistych a i b:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ **kwadrat sumy**

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ **kwadrat różnicy**

...zenie 1

...aż, że dla dowolnych liczb a i b prawdziwe są podane wyżej wzory.

...y na kwadrat sumy i kwadrat różnicy można zilustrować następująco:

$$(\bigcirc+\square)^2 = \bigcirc^2 + 2\cdot\bigcirc\cdot\square + \square^2$$
$$(\bigcirc-\square)^2 = \bigcirc^2 - 2\cdot\bigcirc\cdot\square + \square^2$$

...ład 1

$...+5)^2 = x^2 + 2\cdot x\cdot 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

$...x+2)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x\cdot 2 + 2^2 = 9x^2 + 12x + 4$

$...x-3y)^2 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 - 12xy + 9y^2$

...zenie 2

...sz w postaci sumy algebraicznej.

$...+1)^2$ c) $(x-3)^2$ e) $(2x+1)^2$ g) $(4x-1)^2$

$...+2)^2$ d) $(x-5)^2$ f) $(\frac{1}{2}x+2)^2$ h) $(2x-\frac{1}{2})^2$

...zenie 3

...sz w postaci sumy algebraicznej.

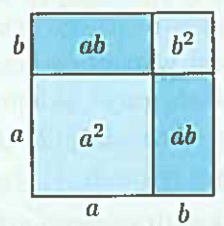
$...+2y)^2$ d) $(3x+\frac{1}{2}y)^2$

$...x-y)^2$ e) $(2x-\frac{1}{4}y)^2$

$...x+2y)^2$ f) $(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y)^2$

Na rysunku przedstawiono interpretację geometryczną wzoru:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



Podaj analogiczną interpretację geometryczną wzoru:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

...zenie 4

...cz.

$...\sqrt{7}+1)^2$ d) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$

$...\sqrt{5}-3)^2$ e) $(\sqrt{6}+\sqrt{15})^2$

$...-\sqrt{3})^2$ f) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{6}\right)^2$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b:

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ **różnica kwadratów**

D **Ćwiczenie 5**

Wykaż, że dla dowolnych liczb a i b prawdziwy jest podany wyżej wzór.

Przykład 2

a) $(x - \boxed{6})(x + \boxed{6}) = x^2 - \boxed{6}^2 = x^2 - 36$

b) $(2x-3y)(2x+3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2$

Ćwiczenie 6

Zapisz w postaci sumy algebraicznej.

a) $(x-3)(x+3)$ c) $(2x-4)(2x+4)$ e) $(3x-4y)(3x+4y)$

b) $(x+7)(x-7)$ d) $(6+5x)(5x-6)$ f) $(\frac{1}{2}x+3y)(3y-\frac{1}{2}x)$

Przykład 3

$(7-\sqrt{3})(7+\sqrt{3}) = 49 - 3 = 46$

Ten przykład rozwiązany za pomocą kalkulatora wyglądałby następująco:

$$(7-\sqrt{3})(7+\sqrt{3}) \approx (7-1{,}732050808)(7+1{,}732050808) =$$
$$= 5{,}267949192 \cdot 8{,}732050808 \approx 46$$

Ćwiczenie 7

Oblicz.

a) $(5-\sqrt{7})(5+\sqrt{7})$ c) $\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ e) $(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

b) $(\sqrt{5}+1)(1-\sqrt{5})$ d) $(2\sqrt{2}-3)(3+2\sqrt{2})$ f) $\left(\sqrt{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sqrt{5}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Zadania

1. Uprość wyrażenie.

a) $(x-3)(x+3)+(2+x)(2-x)$ d) $(5y+1)(1-5y)-(1+5y)^2$

b) $(x+\frac{3}{2})(x-\frac{3}{2})-(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$ e) $(2x-y)(2x+y)+(3x+2y)(3x-2y)$

c) $(2y-3)^2-(3y-2)(3y+2)$ f) $(y+3x)(3x-y)-(x-5y)(x+5y)$

2. Oblicz wartość wyrażenia:

a) $(x+1)(x-1)+(x+2)(x-2)-(x+3)(x-3)$ dla $x=\sqrt{3}$,

b) $(1-2x)(1+2x)+(1-3x)(1+3x)-(1-4x)(4x+1)$ dla $x=\sqrt{5}$,

c) $(2x-1)^2-(2x-1)(1+2x)-(2x+1)^2$ dla $x=\sqrt{2}$.

$(\sqrt{3}-1)^2-(2-\sqrt{3})^2$ f) $(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})+(\sqrt{6}-\sqrt{5})^2$

$(2\sqrt{3}-\frac{3}{2})^2-(2\sqrt{3}+\frac{3}{2})^2$ g) $(2\sqrt{5}-\sqrt{10})^2-(2\sqrt{5}+1)(1-2\sqrt{5})$

$(\frac{1}{3}+3\sqrt{2})^2-(\frac{1}{3}-3\sqrt{2})^2$ h) $(\sqrt{6}-2\sqrt{3})^2-(5\sqrt{2}-1)(1+5\sqrt{2})$

›licz.

$\sqrt{\sqrt{2}+1}\cdot\sqrt{\sqrt{2}-1}$ c) $\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}$

$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$ d) $\sqrt{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

›licz pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi a.

$a=3+\sqrt{2}$ b) $a=2\sqrt{3}-1$ c) $a=\sqrt{6}+\sqrt{2}$

›licz obwód trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych a i b.

$a=4-\sqrt{2},\ b=4+\sqrt{2}$ b) $a=8+\sqrt{2},\ b=4-2\sqrt{2}$

›licz.

$\left(\sqrt{4-\sqrt{7}}+\sqrt{4+\sqrt{7}}\right)^2$ c) $\left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^2$

$\left(\sqrt{2+\sqrt{5}}-\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)^2$ d) $\left(\sqrt{\sqrt{7}+\sqrt{3}}-\sqrt{\sqrt{7}-\sqrt{3}}\right)^2$

›licz wartość wyrażenia:

$(2x+3y)(2x-3y)-(2x-3y)^2$ dla $x=\sqrt{\sqrt{10}-3},\ y=\sqrt{\sqrt{10}+3}$,

$(\sqrt{3}x-y)^2-(x-\sqrt{3}y)^2$ dla $x=\sqrt{6}+\sqrt{2},\ y=\sqrt{6}-\sqrt{2}$,

$(\sqrt{2}x-\sqrt{3}y)^2-(\sqrt{2}x-\sqrt{5}y)(\sqrt{2}x+\sqrt{5}y)$ dla $x=\sqrt{5}-4,\ y=\sqrt{6}$,

$(x^2-4y^2)^2-(4y^2-x^2)^2$ dla $x=\frac{1}{\sqrt{2}-1},\ y=\frac{1}{\sqrt{2}+1}$.

zasadnij, że dla każdej liczby naturalnej n liczba:

$(n+1)^2-n^2$ jest nieparzysta, c) $(n+\frac{1}{2})^2-(n-\frac{1}{2})^2$ jest parzysta,

$(2n+1)^2$ jest nieparzysta, d) n^3-n jest podzielna przez 6.

'yprowadź wzór:

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac$$

skazówka. Pogrupuj wyrazy i skorzystaj ze wzoru na kwadrat sumy.

'ykaż, że:

jeśli $c\neq 0$ i $(a+b-c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab$, to $a=-b$,

) jeśli $b\neq 0$ i $(a-b+c)^2=a^2+c^2-2ab+2ac$, to $b=2c$.

Wzór na różnicę kwadratów: $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ można zastosować do usuwania niewymierności z mianownika.

Przykład 1

$$\frac{5}{\sqrt{2}-1}=\frac{5}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\frac{5\sqrt{2}+5}{2-1}=5\sqrt{2}+5$$

Ćwiczenie 1

Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{6+\sqrt{2}}$ b) $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5}+4}$ c) $\frac{2}{4-3\sqrt{2}}$ d) $\frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+2}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

Wzory skróconego mnożenia wykorzystujemy przy rozwiązywaniu równań i nierówności.

Ćwiczenie 2

Przeczytaj podany obok przykład.
Rozwiąż równanie.

a) $x^2-(2-x)^2=8$
b) $(3x+1)^2-9x^2=7$
c) $(x+1)^2-(x+1)(x-1)=12$

Rozwiąż równanie.

$$(x-4)(x+4)-(x-3)^2=17$$
$$x^2-16-(x^2-6x+9)=17$$
$$x^2-16-x^2+6x-9=17$$
$$6x-25=17$$
$$6x=42$$
$$x=7$$

Ćwiczenie 3

Rozwiąż nierówność.

a) $4x^2-(2x+1)^2<3$ c) $(2x+1)(2x-1)>4x^2-9x$

b) $(3-x)^2\geqslant x^2+12$ d) $2-(2x-1)^2\leqslant(3-2x)(2x+3)$

Przykład 2

Dla jakich wartości x wyrażenie x^2+4x+4 przyjmuje wartość równą 0?

$x^2+4x+4=(x+2)^2$, więc:
$x^2+4x+4=0\Leftrightarrow(x+2)^2=0\Leftrightarrow x=-2$

Symbol $\Leftrightarrow$ czytamy: „wtedy i tylko wtedy, gdy".

Ćwiczenie 4

Dla jakich wartości x podane wyrażenie przyjmuje wartość równą 0?

a) $x^2+8x+16$ c) $4x^2-4x+1$ e) $4x^2+12x+9$

b) x^2-6x+9 d) $25x^2+10x+1$ f) $9x^2-3x+\frac{1}{4}$

…cezną.

…kład 3

…ozwiąż równanie $(x+3)^2 = 6x$.

$$x^2 + 6x + 9 = 6x$$
$$x^2 = -9$$

Kwadrat liczby rzeczywistej nie może być liczbą ujemną.

…m równanie jest sprzeczne – nie jest spełnione przez żadną liczbę $x \in \mathbf{R}$.

…ozwiąż nierówność $(2x-1)^2 < 4x(x-1)$.

$$4x^2 - 4x + 1 < 4x^2 - 4x$$
$$1 < 0$$

…m nierówność jest sprzeczna – nie jest spełniona przez żadną liczbę $x \in \mathbf{R}$.

…nanie lub nierówność spełnione przez każdą liczbę rzeczywistą nazywamy …aniem tożsamościowym** (krótko: **tożsamością**) lub **nierównością tożsamo-…wą**.

…kład 4

…ozwiąż równanie $(x+3)^2 - (x-3)^2 = 12x$.

$$(x+3)^2 - (x-3)^2 = 12x$$
$$x^2 + 6x + 9 - (x^2 - 6x + 9) = 12x$$
$$12x = 12x$$

…m równanie jest tożsamościowe – jest spełnione przez każdą liczbę $x \in \mathbf{R}$.

…ozwiąż nierówność $(x-2)(x+2) + 5 > 0$.

$$(x-2)(x+2) + 5 > 0$$
$$x^2 - 4 + 5 > 0$$
$$x^2 > -1$$

Kwadrat liczby rzeczywistej zawsze jest większy od liczby ujemnej.

…m nierówność jest tożsamościowa – spełniona dla każdego $x \in \mathbf{R}$.

…czenie 5

…wdź, czy równanie jest tożsamościowe lub sprzeczne.

…$6-x)^2 - (2-x)^2 = -8x$ b) $(x-4)^2 + 4x = (x-2)^2 + 12$

…czenie 6

…wdź, czy nierówność jest tożsamościowa lub sprzeczna.

…$x+1)^2 - 2 \leqslant (x-1)(1+x) + 2x$ b) $6x - (3x-1)^2 \geqslant (2x+3)^2$

…działu $(0;4)$?

a) $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$ d) $\frac{2}{1-2\sqrt{2}}$ g) $\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$ j) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

b) $\frac{1}{3-\sqrt{2}}$ e) $\frac{6}{3+2\sqrt{3}}$ h) $\frac{4}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ k) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$

c) $\frac{3}{2+\sqrt{5}}$ f) $\frac{8}{3\sqrt{2}-4}$ i) $\frac{10}{\sqrt{7}-\sqrt{2}}$ l) $\frac{1+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}$

2. Rozwiąż równanie.

a) $(x-5)(x+5) = x^2 - 100x$ d) $4(x+2)^2 - (2x-1)^2 = 20x + 10$

b) $(3-x)^2 - \left(x+\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$ e) $\left(6+\frac{1}{3}x\right)\left(-\frac{1}{3}x+6\right) + \left(\frac{1}{3}x-4\right)^2 = 4$

c) $4\left(\frac{1}{2}x-3\right)^2 = (6-x)^2$ f) $(-4x-3)(4x-3) + 8\left(1-\sqrt{2}x\right)^2 = 1$

3. Rozwiąż nierówność. Zaznacz na osi liczbowej zbiór rozwiązań.

a) $4(x-3)^2 - (2x-5)^2 \geqslant 2$ d) $-9(2-x)^2 - (1-3x)(3x+1) \leqslant 11$

b) $9\left(\frac{2}{3}x-1\right)^2 > (1-2x)^2 - 8x$ e) $\left(\frac{1}{4}x+2\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{2}x\right)\left(1+\frac{1}{2}x\right) \geqslant 0$

c) $2(x+2)^2 - (\sqrt{2}x-2)^2 \geqslant 0$ f) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x+1\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x-1\right) < \frac{(x-1)^2}{2}$

4. Wyznacz przedział będący zbiorem liczb spełniających obie nierówności.

a) $\begin{cases} (x+1)^2 > x^2 + 1 \\ (x-1)^2 < (2-x)^2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} (2x+5)(5-2x) + (2x-3)^2 - 2 > 0 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 < x - (2-x)(2+x) \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{x-3}{4} < \frac{x+1}{2} \\ (2x-3)^2 \leqslant (5-2x)^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x - \frac{4x-2}{3} \geqslant x - 6 \\ 1 - (2x-1)(1+2x) < -2x - (2x-1)^2 \end{cases}$

5. Oblicz.

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}} + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$$

6. Usuń niewymierność z mianownika.

a) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}$ b) $\frac{2}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ c) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

D **7.** Udowodnij równość: $\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^{-1} = \sqrt{1+x^2} - x$.

D **8.** Wykaż, że jeśli $\frac{x}{y} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, to $\frac{x}{y} = \frac{x+y}{x}$.

Liczba $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ to złota liczba (patrz str. 61).

efinicja

Liczbę $|a|$ zdefiniowaną za pomocą wzoru:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{jeśli } a \geqslant 0 \\ -a & \text{jeśli } a < 0 \end{cases}$$

nazywamy **wartością bezwzględną** liczby a.

Oznaczenie $|a|$ wprowadził Karl Weierstrass w 1841 roku.

Zwróć uwagę, że $|a|$ jest zawsze liczbą nieujemną: $|a| \geqslant 0$ dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$.

zykład 1

$|3{,}5| = 3{,}5$ b) $|-3{,}5| = -(-3{,}5) = 3{,}5$ c) $|1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$

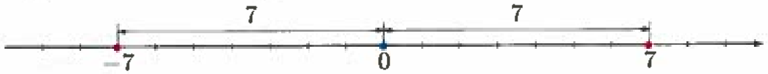
wiczenie 1

odaj wartość bezwzględną liczby.

5 b) -5 c) $\sqrt{3}-1$ d) $\sqrt{3}-3$ e) $4-3\sqrt{2}$ f) $5-2\sqrt{5}$

Interpretacja geometryczna wartości bezwzględnej

artość bezwzględna liczby x to jej odległość na osi liczbowej od liczby 0.



czby -7 i 7 leżą w tej samej odległości od 0 na osi liczbowej i mają tę samą rtość bezwzględną, równą 7.

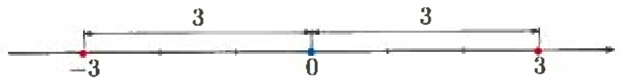
$$|-7| = 7 \quad \text{i} \quad |7| = 7$$

Dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$:
$|-a| = |a|$

zykład 2

ozwiąż równanie $|x| = 3$.

oniważ zgodnie z interpretacją geometryczną wartość bezwzględna liczby x st równa jej odległości na osi liczbowej od 0, jedynymi liczbami spełniającymi wnanie są -3 oraz 3.



wiczenie 2

odaj, dla jakich wartości x spełnione jest równanie.

$|x| = 2$ b) $|x| = 10$ c) $|x| = 0$ d) $|x| = -3$

Przypomnijmy, że:

- $\sqrt{a^2} = a$ dla $a \geqslant 0$
- $\sqrt{a^2} = -a$ dla $a < 0$

Dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$:
$\sqrt{a^2} = |a|$

Na przykład: $\sqrt{5^2} = |5| = 5$ oraz $\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5$.

Ćwiczenie 4

Oblicz.

a) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ b) $\sqrt{(4-2\sqrt{3})^2}$ c) $\sqrt{(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})^2}$

Korzystając z interpretacji geometrycznej, możemy rozwiązywać niektóre nierówności z wartością bezwzględną.

Przykład 3

a) Rozwiąż nierówność $|x| < 5$.

Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x, których odległość od 0 jest mniejsza od 5.

Nierówność jest spełniona dla $-5 < x < 5$, zatem $x \in (-5; 5)$.

b) Rozwiąż nierówność $|x| \geqslant 2$.

Zaznaczamy na osi liczbowej zbiór tych liczb x, których odległość od 0 jest większa lub równa 2.

Nierówność jest spełniona dla $x \leqslant -2$ oraz dla $x \geqslant 2$, zatem:

$$x \in (-\infty; -2\rangle \cup \langle 2; \infty)$$

Ćwiczenie 5

Rozwiąż nierówność i zaznacz na osi liczbowej jej zbiór rozwiązań.

a) $|x| < 8$ b) $|x| \leqslant \sqrt{2}$ c) $|x| > 3$ d) $|x| \geqslant \pi$

Ćwiczenie 6

Rozwiąż nierówność.

a) $|x| \geqslant 0$ b) $|x| \leqslant 0$ c) $|x| > 0$ d) $|x| < 0$

a) $x = -3$ b) $x = 4 - 2\sqrt{6}$ c) $x = 6\sqrt{2} - 8$ d) $x = \pi - 2\sqrt{3}$

Wyznacz liczby spełniające równanie.

a) $2|x| = 8$ c) $\frac{2}{3}|x| = 4$ e) $3|x| + 6 = 7$ g) $3 - 2|x| = 1$

b) $\frac{1}{2}|x| = 7$ d) $-3|x| = -\frac{3}{4}$ f) $\frac{1}{2}|x| - 1 = 3$ h) $9 - \frac{3}{4}|x| = 6$

Która nierówność jest spełniona dla wszystkich liczb rzeczywistych, a która nie zachodzi dla żadnej liczby rzeczywistej?

a) $|x| > -7$, $|x| < -7$ b) $|x| \geqslant -3$, $|x| \leqslant -3$

Zbiór rozwiązań nierówności zaznacz na osi liczbowej i zapisz w postaci sumy przedziałów. Ile liczb całkowitych należy do tego zbioru?

a) $1 < |x| < 4$ c) $2 \leqslant |x| \leqslant 5$ e) $\frac{1}{2} \leqslant |x| < 3$ g) $\frac{5}{2} \leqslant |x| \leqslant \frac{9}{2}$

b) $0 < |x| < 6$ d) $3 \leqslant |x| \leqslant \pi$ f) $\sqrt{3} < |x| \leqslant 6$ h) $\sqrt{2} < |x| < 5$

Oblicz.

a) $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} + \sqrt{(7-3\sqrt{5})^2}$ b) $\sqrt{(2\sqrt{2}-3)^2} + \sqrt{(3\sqrt{2}-4)^2}$

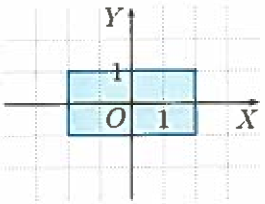
Uzasadnij, że:

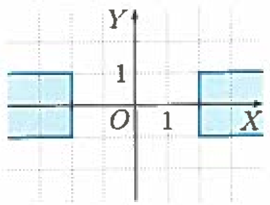
a) $\sqrt{6-4\sqrt{2}} = |\sqrt{2}-2|$, c) $\sqrt{24-8\sqrt{5}} = |2-2\sqrt{5}|$,

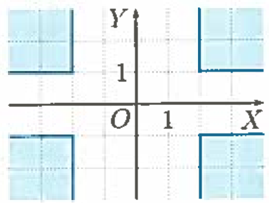
b) $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = |\sqrt{3}-2|$, d) $\sqrt{21-12\sqrt{3}} = |3-2\sqrt{3}|$.

Do każdego z przedstawionych zbiorów punktów płaszczyzny dopasuj warunki, które spełniają współrzędne (x, y) tych punktów.

I. $|x| \geqslant 2$ i $|y| \leqslant 1$ II. $|x| \geqslant 2$ i $|y| \geqslant 1$ III. $|x| \leqslant 2$ i $|y| \leqslant 1$

A


B


C


Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają podane warunki.

a) $|x| \leqslant 5$ i $|y| \leqslant 1$ b) $|x| \leqslant 3$ i $|y| \geqslant 2$ c) $1 \leqslant |x| \leqslant 3$ i $|y| \leqslant 4$

Wykaż, że liczba $a = \sqrt{(2-3\sqrt{2})^2} - 3\sqrt{2}$ jest całkowita.

Zauważ, że $\sqrt{(2-3\sqrt{2})^2} = |2-3\sqrt{2}| = 3\sqrt{2} - 2$.

Stąd $a = 3\sqrt{2} - 2 - 3\sqrt{2} = -2$, czyli $a \in \mathbb{Z}$.

Przykład 2

Wykaż, że liczba $\sqrt{11-6\sqrt{2}} + \sqrt{2}$ jest całkowita.

Wyrażenie $11 - 6\sqrt{2}$ próbujemy zapisać jako kwadrat różnicy metodą prób i błędów:

$(1-\sqrt{2})^2 = 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 3 - 2\sqrt{2} \neq 11 - 6\sqrt{2}$

$(1-3\sqrt{2})^2 = 1 - 6\sqrt{2} + 18 = 19 - 6\sqrt{2} \neq 11 - 6\sqrt{2}$

$(3-\sqrt{2})^2 = 9 - 6\sqrt{2} + 2 = 11 - 6\sqrt{2}$

$\sqrt{11-6\sqrt{2}} + \sqrt{2} = \sqrt{(3-\sqrt{2})^2} + \sqrt{2} = |3-\sqrt{2}| + \sqrt{2} = 3 - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 3$,

czyli dana liczba jest całkowita.

Przykład 3

Wykaż, że liczba $a = \sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}$ jest wymierna.

Aby wykazać, że liczba a jest wymierna, możemy postąpić na jeden z poniższych sposobów.

- Obliczamy kwadrat liczby a:

$$a^2 = \left(\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}}\right)^2 =$$
$$= 4 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})} + 4 - 2\sqrt{3} =$$
$$= 8 - 2\sqrt{16-12} = 8 - 4 = 4$$

Ponieważ $a > 0$, otrzymujemy $a = 2$ – jest to liczba wymierna.

- Zauważamy, że $4 + 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}+1)^2$ oraz $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2$ (sprawdź), czyli:

$a = \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = |\sqrt{3}+1| - |\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}+1-(\sqrt{3}-1) = 2$

co oznacza, że a jest liczbą wymierną.

D **1.** Wykaż, że:

a) $\sqrt{7+4\sqrt{3}} + \sqrt{12-6\sqrt{3}} = 5$, b) $3\sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{19-6\sqrt{2}} = 10$.

1. Rozwiąż równanie.

a) $|2x-8|=4$ c) $|\frac{1}{2}x-1|=3$ e) $|10-x|=4$
b) $|4x+2|=6$ d) $|\frac{2}{3}x+4|=2$ f) $|1-3x|=6$

2. Rozwiąż nierówność.

a) $|2x+4|\leqslant 8$ d) $|2-\frac{1}{3}x|<1$ g) $|2x-4|\leqslant 0$
b) $|3x-9|\geqslant 6$ e) $|\frac{5}{2}x+10|\geqslant 5$ h) $|x+11|>0$
c) $|2x+\frac{1}{2}|>2$ f) $|0{,}75+\frac{5}{4}x|<\frac{1}{4}$ i) $|x-3|\geqslant -1$

3. Rozwiąż równanie.

a) $\sqrt{(x+5)^2}=5$ c) $\sqrt{x^2-2x+1}=1$ e) $\sqrt{\frac{1}{4}+x+x^2}=4$
b) $\sqrt{(3-x)^2}=2$ d) $\sqrt{4x^2+4x+1}=3$ f) $\sqrt{9x^2-12x+4}=6$

4. Rozwiąż nierówność.

a) $|x|\leqslant\sqrt{(4-2\sqrt{2})^2}+\sqrt{(4-3\sqrt{2})^2}$

b) $|x+1|\geqslant\sqrt{(3-2\sqrt{3})^2}-\sqrt{(2\sqrt{3}-2)^2}$

5. Jakie liczby x spełniają równanie?

a) $|x-3|=x-3$ c) $|x+\sqrt{2}|=-x-\sqrt{2}$
b) $|3x-6|=6-3x$ d) $\sqrt{(x-2)^2}=x-2$

6. Uprość wyrażenie dla $x<0$.

a) $\sqrt{x^2}+x$ b) $\sqrt{(x-3)^2}-\sqrt{x^2}$ c) $\sqrt{x^2-4x+4}+x$

7. Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej, uzasadnij, że jeśli $a<b$, to zbiorem rozwiązań nierówności $|x-a|<|x-b|$ jest przedział $(-\infty;\frac{a+b}{2})$.

8. Wykaż, że wyrażenie przyjmuje stale tę samą wartość dla podanych wartości x.

a) $|-x|+|2-x|-|3-2x|$ dla $x\geqslant 2$
b) $\sqrt{x^2+6x+9}+|-x|-|-2x-6|$ dla $x\leqslant -3$

9. Wykaż, że jeśli $0\leqslant a\leqslant b$, to $\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}-\sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}=2\sqrt{a}$.

Logika matematyczna

Sposoby budowania zdań w języku, którym porozumiewamy się na co dzień są określone przez reguły gramatyki. W matematyce podobną rolę odgrywają reguły **logiki matematycznej**. Odnoszą się one do zdań, którym można w jednoznaczny sposób przypisać wartość logiczną: **prawdy** lub **fałszu**. Stosowane są oznaczenia: 1 (prawda), 0 (fałsz).

Na przykład:

a) *$\sqrt{2}$ jest liczbą wymierną.* fałsz 0
b) *Każdy prostokąt jest równoległobokiem.* prawda 1
c) *Każdy równoległobok jest prostokątem.* fałsz 0

Uwaga. Reguły logiki można stosować również do zdań o treści niematematycznej.

Ze zdań składowych (będziemy je oznaczać literami: $p, q, r, \ldots$) możemy tworzyć zdania złożone przy użyciu spójników logicznych: „nie", „lub", „i", „jeżeli..., to...", „wtedy i tylko wtedy, gdy...".

Negacja zdania

Rozpatrzmy dwa zdania: zdanie p i jego zaprzeczenie – zdanie *Nieprawda, że p*, co zapisujemy $\sim p$. Na przykład:

p: *7 jest liczbą ujemną.* 0
$\sim p$: *Nieprawda, że 7 jest liczbą ujemną.* 1

Zdanie p jest fałszywe, zdanie $\sim p$ – prawdziwe.

Zwróć uwagę, że z dwóch zdań, p i $\sim p$, zawsze jedno jest prawdziwe, a jedno fałszywe.

p	$\sim p$
1	0
0	1

Jeśli zdanie p jest prawdziwe, to zdanie $\sim p$ jest fałszywe.
Jeśli zdanie p jest fałszywe, to zdanie $\sim p$ jest prawdziwe.

1. Jeżeli zdanie p ma postać $\sqrt{8}<3$, to zdanie $\sim p$ ma postać $\sqrt{8}\geqslant 3$. Wartości logiczne zdań p i $\sim p$ to odpowiednio 1 i 0.

a) Sformułuj zdanie $\sim p$, jeżeli p ma postać $\sqrt{625}\neq 25$. Określ wartości logiczne zdań p i $\sim p$.

b) Sformułuj zdanie p, jeżeli $\sim p$ ma postać *100 jest liczbą nieparzystą.* Określ wartości logiczne zdań p i $\sim p$.

, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, szczególną rolę odgrywają zdania, których wartość lo-
czna zawsze jest równa 1 (są zawsze prawdziwe). Takie zdania nazywamy
:awami rachunku zdań.

rzykład 1

/ykaż, że zdanie: $\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$ – *zaprzeczenie koniunkcji*
st równoważne alternatywie zaprzeczeń – jest prawem rachunku zdań.

/ tym celu sporządzamy tabelę.

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow ((\sim p) \vee (\sim q))$
1	1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	1	1	1

/ ostatniej kolumnie, bez względu na wartość logiczną zdań p i q, zawsze trzymujemy, że zdanie jest prawdziwe, zatem jest ono prawem rachunku dań. Zdanie to jest znane jako jedno z **praw De Morgana**.

Wykaż, że zdanie jest prawem rachunku zdań.

$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow ((\sim p) \wedge (\sim q))$ drugie z praw De Morgana

Wykaż, że zdanie jest prawem rachunku zdań.

a) $(\sim p) \vee p$ prawo wyłączonego środka
b) $\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$ prawo podwójnego przeczenia
c) $\sim(p \wedge \sim p)$ prawo sprzeczności
d) $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ prawo odrywania
e) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$ prawo transpozycji
f) $\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ prawo zaprzeczenia implikacji

Sprawdź, czy podane zdanie jest prawem rachunku zdań.

a) $(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
b) $[(p \Rightarrow q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$
c) $[(\sim p \vee \sim q) \wedge p] \Rightarrow \sim q$
d) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
e) $((p \vee q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
f) $((p \wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \Rightarrow r))$

1. Wśród 180 studentów przeprowadzono ankietę dotyczącą znajomości języków obcych. Otrzymano następujące wyniki: 90 studentów zna język angielski, 81 – niemiecki, 75 – rosyjski, 45 – angielski i niemiecki, 25 – angielski i rosyjski, 20 – niemiecki i rosyjski, a 4 – wszystkie trzy języki. Ilu spośród ankietowanych studentów nie zna żadnego z tych języków?

2. Dane są zbiory: A – zbiór liczb naturalnych mniejszych od 15, B – zbiór liczb naturalnych podzielnych przez 3, $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$, D – zbiór liczb naturalnych, które przy dzieleniu przez 4 dają resztę 1. Wypisz wszystkie elementy zbioru:

a) $A \cap B$,
b) $A \setminus C$,
c) $A \cap B \cap C$,
d) $A \setminus (B \cup C)$,
e) $A \cap (D \setminus B)$,
f) $A \setminus (B \setminus D)$.

3. Wyznacz zbiory: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$ i $B \setminus A$.

a) $A = \langle -1; 4 \rangle$, $B = (2; 5)$
b) $A = \langle 2; 7)$, $B = (3; 5 \rangle$
c) $A = \langle -4; 2 \rangle$, $B = \langle 2; 9)$
d) $A = (-\infty; 0 \rangle \cup (1; 2)$, $B = \langle 0; 4 \rangle$
e) $A = (-\infty; -1) \cup \langle 3; 5 \rangle$, $B = (-2; 4)$
f) $A = (-1; 2 \rangle \cup (5; \infty)$, $B = \langle 0; 5)$

4. Wykonaj mnożenie.

a) $(a + 2b + 3)(a - 2)$
b) $(2a - b + c)(2a - 3b)$
c) $(a + 2b - 3c)(2a - 3b)$
d) $-4(x^2 - 2y)(2x^2 - y)$
e) $2x(3x^2 - 2y)(2y - 3x^2)$
f) $(x + y)(x^2 + y^2)(x - y)$

5. Wskaż liczbę całkowitą k, dla której $x \in \langle k; k + 1)$.

a) $x = \sqrt[3]{17}$
b) $x = \sqrt[3]{-25}$
c) $x = (3 - 2\sqrt{2})^2$
d) $x = \sqrt{27 - 10\sqrt{2}}$

6. Ile liczb naturalnych spełnia nierówność?

a) $\frac{2x+1}{2} - 2 < x - \frac{x-3}{3}$
b) $\frac{1}{2}x - \frac{6x-3}{4} \geqslant -2 - \frac{2x-1}{3}$
c) $\frac{x-1}{4} - \frac{2x-1}{5} \geqslant \frac{x-3}{2} - \frac{2-x}{5}$
d) $\frac{2-x}{2} - \frac{1}{3}x > \frac{1-4x}{5} - \frac{3-x}{2}$

7. Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających obie nierówności.

a) $|x| > 1$ i $|x| \leqslant 9$
b) $|x| \geqslant 2$ i $|x - 2| < 4$
c) $|x| < 4$ i $|x + 1| \geqslant 2$

8. Dane są zbiory: $A = \{x \in \mathbf{R} : |x - 3| < 4\}$, $B = \{x \in \mathbf{R} : |x + 2| \geqslant 3\}$ i $C = \{x \in \mathbf{R} : |x| \geqslant 3\}$. Zaznacz na osi liczbowej zbiór:

a) $A \cap B$,
b) $A \setminus B$,
c) $B \setminus A$,
d) $(A \cup C) \setminus B$,
e) $(A \setminus B) \cup C$.

a) $X = (-4;2) \cap \mathbf{Z}$, $Y = \{x \in \mathbf{Z} : x^2 \leqslant 4\}$, $T = \{-3,-2,-1,0,1,2\}$
b) $X = (2;7) \cup \{7\}$, $Y = \langle 2;7) \setminus \{2\}$, $T = (2;4) \cup (4;7)$
c) $X = \{x \in \mathbf{N} : |x| \leqslant 6\}$, $Y = (-7;7) \cap \mathbf{N}$, $T = \mathbf{N} \setminus (5;8)$

Sprawdź, czy prawdziwa jest którąś z zależności: $A \subset B$, $B \subset A$.
a) $A = \{x \in \mathbf{R}: 0 < |x| < 2\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}: |x-5| \geqslant 1\}$
b) $A = \{x \in \mathbf{R}: |x+1| \geqslant 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}: |2x-6| > 16\}$
c) $A = \{x \in \mathbf{R}: 1 \leqslant |x| \leqslant 3\}$, $B = \{x \in \mathbf{R}: \sqrt{x^2-10x+25} < 8\}$

Oblicz.

a) $(\sqrt{2}+\sqrt{6})(2\sqrt{2}-\sqrt{6})$	e) $(2\sqrt{3}-\sqrt{2})^2+(2\sqrt{3}+\sqrt{2})^2$
b) $(\sqrt{3}+2\sqrt{2})(4\sqrt{3}-\sqrt{2})$	f) $(\sqrt{6}+2\sqrt{3})^2-(\sqrt{6}-2\sqrt{3})^2$
c) $(\sqrt{6}-2\sqrt{3})(2\sqrt{6}+6\sqrt{3})$	g) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2-(\sqrt{6}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
d) $(5\sqrt{2}-2\sqrt{10})(-3\sqrt{10}-2\sqrt{2})$	h) $(\sqrt{7}-\sqrt{3})(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2(\sqrt{3}+\sqrt{7})$

Zaznacz na osi liczbowej zbiór liczb spełniających obie nierówności.

a) $\begin{cases} 1\frac{1}{3}x - \frac{1}{6} > \frac{1}{2} - x \\ (x-\frac{1}{2})^2 + 0{,}75x \geqslant x^2 \end{cases}$
d) $\begin{cases} 2 - x^2 - (x-2)^2 \leqslant 6 - 2(x+4)^2 \\ (4-x)^2 - (6-x)^2 \geqslant \frac{11}{4} - \frac{0{,}5-\frac{1}{3}x}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - (\frac{1}{8} - \frac{1}{2}x) \geqslant x - \frac{5}{4} \\ (2-x)^2 \leqslant (x+1)^2 \end{cases}$
e) $\begin{cases} -4(4-x)^2 < 8 - (4-2x)^2 \\ \frac{(2x-1)^2}{4} - \frac{(\sqrt{2}x-4)(\sqrt{2}x+4)}{2} > 0{,}25 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x-\frac{1}{3}}{2} - \frac{x-\frac{1}{2}}{3} < 1 \\ (x-\frac{1}{2})^2 \geqslant x^2 - \frac{1}{2} \end{cases}$
f) $\begin{cases} \frac{x}{\sqrt{2}+1} + 4x(1-x) > \sqrt{2}x - (1-2x)^2 \\ \frac{1-x^4}{x^2+1} - 2x \geqslant 2x - (3-x)^2 \end{cases}$

Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów płaszczyzny, których współrzędne (x, y) spełniają podane warunki. Ile punktów o obu współrzędnych całkowitych należy do tego zbioru?

a) $|x| \leqslant 3$ i $|y| \leqslant 2$	c) $1 \leqslant |x| \leqslant 2$ i $1 \leqslant |y| \leqslant 3$
b) $1 \leqslant |x| \leqslant 4$ i $|y| < 1$	d) $0 < |x| < 3$ i $1 < |y| < 2$

a) Liczby p i q przy dzieleniu przez 4 dają reszty odpowiednio: 1 i 3. Wykaż, że reszty z dzielenia liczb p^2 i q^2 przez 4 są równe.

b) Liczby p i q przy dzieleniu przez 5 dają reszty odpowiednio: k i l, gdzie $k < l$, a reszty z dzielenia liczb p^2 i q^2 przez 5 są równe. Wyznacz k i l.

Rozpatrzmy trzy kolejne liczby naturalne: n, $n+1$, $n+2$, gdzie $n \in \mathbf{N}$. Suma kwadratów tych liczb:

$$S = n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 =$$
$$= n^2 + n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4 =$$
$$= 3n^2 + 6n + 5 = 3(n^2 + 2n + 1) + 2$$

Ponieważ $n^2 + 2n + 1$ jest liczbą naturalną, reszta z dzielenia S przez 3 jest równa 2.

- Zauważ, że w celu wykazania, że reszta z dzielenia liczby S przez 3 jest równa 2, liczbę tę przedstawiliśmy w postaci $3k+2$, gdzie $k \in \mathbf{N}$.
- Konieczne jest rozumowanie dotyczące dowolnych kolejnych trzech liczb naturalnych. Sprawdzenie dla konkretnych liczb, np.:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14 = 3 \cdot 4 + 2$$

czy:

$$11^2 + 12^2 + 13^2 = 121 + 144 + 169 = 434 = 3 \cdot 144 + 2$$

nie jest wystarczającym uzasadnieniem.

Przykład 2

Uzasadnij, że reszta z dzielenia przez 4 sumy kwadratów trzech kolejnych liczb nieparzystych jest równa 3.

Trzy kolejne liczby nieparzyste można zapisać w postaci $2n+1$, $2n+3$, $2n+5$, gdzie $n \in \mathbf{Z}$. Rozpatrywaną sumę oznaczamy przez S.

$$S = (2n+1)^2 + (2n+3)^2 + (2n+5)^2 =$$
$$= (4n^2 + 4n + 1) + (4n^2 + 12n + 9) + (4n^2 + 20n + 25) =$$
$$= 12n^2 + 36n + 35 = 4(3n^2 + 9n + 8) + 3$$

Ponieważ $3n^2 + 9n + 8$ jest liczbą całkowitą, reszta z dzielenia S przez 4 jest równa 3.

- Zauważ, że w celu wykazania, że reszta z dzielenia liczby S przez 4 jest równa 3, liczbę S przedstawiliśmy w postaci $4k+3$, gdzie $k \in \mathbf{Z}$.
- Konieczne jest rozumowanie dotyczące dowolnych kolejnych trzech liczb nieparzystych. Podobnie jak w przykładzie 1 sprawdzenie dla konkretnych liczb, np.:

$$1^2 + 3^2 + 5^2 = 1 + 9 + 25 = 35 = 4 \cdot 8 + 3$$

czy:

$$(-7)^2 + (-5)^2 + (-3)^2 = 49 + 25 + 9 = 83 = 4 \cdot 20 + 3$$

nie jest wystarczającym uzasadnieniem.

Jeśli wszystkie rozpatrywane przez nas zbiory są podzbiorami ustalonego zbioru X, to zbiór X nazywamy **przestrzenią**.

Jeśli X jest przestrzenią, $A \subset X$, to **dopełnieniem zbioru** A nazywamy zbiór: $A' = X \setminus A$.

Parę elementów (a, b), w której wyróżniono element a jako pierwszy nazywamy **parą uporządkowaną**. Oznaczamy ją symbolem: (a, b).

Iloczynem kartezjańskim (produktem) zbiorów A i B nazywamy zbiór wszystkich uporządkowanych par (a, b), w których pierwszym elementem jest element zbioru A, zaś drugim — element zbioru B. $(a, b) \in A \times B \Leftrightarrow (a \in A$ i $b \in B)$.

Działaniem dwuargumentowym wykonalnym w niepustym zbiorze A nazywamy przyporządkowanie każdej uporządkowanej parze elementów zbioru A dokładnie jednego elementu tego zbioru.

Jeżeli działanie $\triangle$ jest wykonalne w zbiorze A i dla każdych dwóch elementów $a, b \in A$ spełniony jest warunek $a \triangle b = b \triangle a$, to mówimy, że działanie $\triangle$ jest **przemienne** w A.

Jeżeli działanie $\triangle$ jest wykonalne w zbiorze A i dla każdych trzech elementów $a, b, c \in A$ spełniony jest warunek $(a \triangle b) \triangle c = a \triangle (b \triangle c)$, to mówimy, że działanie $\triangle$ jest **łączne** w A.

Jeżeli działanie $\triangle$ jest wykonalne w zbiorze A i istnieje element $e \in A$ taki, że dla każdego $a \in A$ spełniony jest warunek $a \triangle e = e \triangle a = a$, to e nazywamy **elementem neutralnym** działania $\triangle$.

Zadania

1.1. Podaj wszystkie elementy zbioru A jeśli:
a) $A = \{x : x$ jest liczbą naturalną dwucyfrową$\}$;
b) $A = \{x : x \in N$ i x jest dzielnikiem liczby $12\}$;
c) $A = \{x : x$ jest uczniem twojej klasy i x uczy się języka angielskiego$\}$;
d) $A = \{x : x$ jest stolicą państwa w Europie$\}$;
e) $A = \{x : x \in C$ i $0 \leqslant x < 6\}$;
f) $A = \{x : x \in N$ i x jest wielokrotnością liczby 3 i $x < 23\}$.

1.2. Zbiór $M = \{3, 6, 9, 12, 15\}$ można również określić następująco: $M = \{x : x \in N_+$ i x jest wielokrotnością 3 i $x < 16\}$

W podobny sposób określ zbiory:
$A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17\}$;
$B = \{1, 3, 5, 15\}$;
$C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

1.3. Podaj pięć elementów każdego z następujących zbiorów:
$A = \{x : x$ jest potęgą liczby 2 o wykładniku naturalnym$\}$;
$B = \{x : x \in C$ i x jest liczbą nieparzystą$\}$;
$C = \left\{x : x \in N \text{ i } -1 \leqslant x < 50\frac{1}{2}\right\}$;
$D = \left\{x : x = \frac{1}{n} \text{ i } n \in N_+\right\}$;
$E = \{x : x$ jest ssakiem$\}$.

1.4. Zbadaj, które z podanych zbiorów są równe:
$A = \{x : x \in R$ i $x^2 - 4 = 0\}$;
$B = \{x : x$ jest liczbą parzystą i $x \in C\}$;
$C = \{x : x \in R$ i $|x| = 2\}$;
$D = \{-2, 2\}$;
$E = \{x : x = 2k$ i $k \in C\}$.

1.5. Sprawdź, czy zbiór A jest podzbiorem zbioru B, jeśli:
a) $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $B = \{x : x \in N$ i x jest liczbą parzystą$\}$;
b) $A = (x : x$ jest mieszkańcem Warszawy$\}$;
$B = \{x : x$ jest mieszkańcem Polski$\}$;
c) $A = \{x : x = n(n+1)$ i $n \in N\}$; $B = \{x : x \in C$ i $x \geqslant 0\}$;
d) $A = \{x : x$ jest uczniem twojej klasy$\}$;
$B = \{x : x$ ma więcej niż 12 lat$\}$.

1.6. Przez C_n oznaczamy zbiór wszystkich liczb całkowitych podzielnych przez $n (n \in N_+)$
Dla każdej z podanych par zbiorów określ, czy jeden ze zbiorów jest zawarty w drugim:
a) C_2 i C_3, d) C_5 i C_7,
b) C_3 i C_6, e) C_4 i C_6.
c) C_6 i C_9,

1.7. Podaj wszystkie podzbiory zbioru $A = \{2, 3, 4\}$.
Pamiętaj, że $A \subset A$ i $\emptyset \subset A$.

1.8. Ile podzbiorów ma zbiór o n elementach gdy:
a) $n = 1$, d) $n = 4$,
b) $n = 2$, e) $n = 5$,
c) $n = 3$, f) $n = 6$?

d) suma pięciu kolejnych liczb parzystych jest podzielna przez 10.

2.11. Napisz wyrażenia:
a) kwadrat sumy liczb a, b,
b) kwadrat różnicy liczb a, b,
c) sumę kwadratów liczb a, b,
d) różnicę kwadratów liczb a, b,

2.12. Uzasadnij, że:
a) różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb naturalnych jest liczbą nieparzystą,
b) różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych jest liczbą podzielną przez 4,
c) różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest liczbą podzielną przez 8.

2.13. Podaj i uzasadnij wzory na kwadrat sumy i kwadrat różnicy dwóch wyrażeń a i b.

2.14. Podaj i uzasadnij wzory na sześcian sumy i sześcian różnicy dwóch wyrażeń a i b.

2.15. Uzasadnij, że nie istnieją liczby naturalne dodatnie p, m takie, że $2m^2 = p^2$.

2.16. Uzupełnij poniższą tabelę zaznaczając wykonalność działań:

Zbiór \ Działania	Dodawanie	Odejmowanie	Mnożenie	Dzielenie
N	tak	nie		
C				
W				
$R \setminus W$				
R				
R_+				
liczby parzyste				
liczby nieparzyste				
liczby podzielne przez 5				
$M = \{x : x \in R \text{ i } 0 < x < 1\}$				

2.17. Jaką liczbą (wymierną czy niewymierną) jest:
a) suma liczby wymiernej i niewymiernej (patrz odpowiedź),
b) iloczyn liczby wymiernej i niewymiernej,
c) różnica liczby wymiernej i niewymiernej,
d) suma liczb postaci $a+b\sqrt{2}$, gdy $a, b \in W$,
e) iloczyn liczb postaci $a+b\sqrt{3}$ i $a-b\sqrt{3}$, gdy $a, b \in W$?

2.18. Liczba $a+b+c \in W$, zaś $a+b \in R \setminus W$. Wykaż, że co najmniej dwie z liczb a, b, c są niewymierne.

2.19. Liczby $a+b$ i $a-b$ są wymierne. Wykaż, że liczby a i b są wymierne.

2.20. Dlaczego dzielenie przez zero nie jest wykonalne?

2.21. Nie wykonując obliczeń, wstaw w miejsce kropek znak < lub > tak, aby otrzymać nierówność prawdziwą.

a) $2\frac{1}{3}+3\frac{1}{4}$ ... $2\frac{1}{4}+3\frac{1}{4}$,   c) $4\frac{5}{8}\cdot 2$ ... $6\frac{3}{4}\cdot 2$,

b) $-5\frac{2}{3}-2\frac{1}{7}$ ... $-4\frac{1}{2}-2\frac{1}{7}$,   d) $8\frac{2}{3}:\left(-\frac{1}{2}\right)$ ... $\frac{1}{8}:\left(-\frac{1}{2}\right)$.

2.22. Oblicz:

$$\frac{8\cdot 4\frac{1}{4}-11\frac{1}{5}:9\frac{1}{3}-\left(-2\frac{1}{3}\right):\frac{5}{3}}{14:2\frac{2}{9}+8\frac{2}{5}\cdot 1\frac{2}{7}}=$$

2.23. Oblicz:

$$0{,}05-\frac{\left(2\frac{4}{5}-1{,}9\right):3\frac{3}{4}}{\left[3\frac{1}{6}-(-1{,}25)\right]\cdot 2{,}4+(-5{,}8)}=$$

2.24. Oblicz:

$$\frac{30\cdot 4\frac{1}{4}+11\frac{1}{5}:5\frac{3}{5}}{14:2\frac{2}{9}+8\frac{2}{5}\cdot 14\frac{2}{3}}:\frac{1:6+12:5}{2\frac{1}{2}\cdot 15-4\frac{13}{15}\cdot 7\frac{3}{5}}=$$

2.25. Oblicz:

$$\left[2{,}1:\frac{\left(4{,}5\cdot 1\frac{2}{3}+3{,}75\right)\cdot\frac{7}{135}}{1-\frac{10}{27}:\frac{5}{6}}\right]:2{,}5$$

2*

2.26. Oblicz:

a) $\left(\frac{2}{5}:2\frac{1}{2}\right)\cdot\left(4\frac{1}{5}-1\frac{3}{40}\right)+1{,}35:2{,}7$

b) $\dfrac{0{,}1}{\left(140\frac{7}{30}-138\frac{5}{12}\right):18\frac{1}{6}}$

c) $\dfrac{1:5}{\left(83\frac{5}{18}-85\frac{7}{20}\right):2\frac{2}{3}}$

2.27. Oblicz:

$$\frac{\left(3\frac{1}{12}+4{,}375\right):19\frac{8}{9}}{2\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\cdot2\frac{5}{14}}$$

2.28. Oblicz:

a) 4% liczby 58,

b) $3\frac{1}{2}$% liczby $30\frac{1}{4}$,

c) 125% liczby 45,

d) 104,5% liczby 25 000,

e) 0,25% liczby 120,

f) a% liczby b.

2.29. Znajdź:

a) liczbę, której 5% wynosi 14,

b) liczbę, której 0,2% wynosi $1\frac{2}{5}$,

c) liczbę, której 128% wynosi 512,

d) liczbę, której p% wynosi a.

2.30. Jakim procentem liczby a jest liczba b, gdy:

a) $a = 14$, $b = 112$;

b) $a = 125$, $b = 50$;

c) $a = 0{,}15$, $b = 0{,}75$.

2.31. Zmieszano 2 kg stopu o zawartości 25% miedzi i 3 kg stopu o zawartości 40% miedzi. Ile procent miedzi zawiera otrzymany stop?

2.32. Zmieszano a kg stopu o zawartości p% miedzi i b kg stopu o zawartości q% miedzi. Ile procent miedzi zawiera stop?

2.33. Cenę towaru obniżono o p%. Towar ten kosztuje obecnie a zł. Ile kosztował ten towar przed obniżką?

2.34. Cenę towaru obniżono najpierw o 20%, a następnie nową cenę podwyższono o 20%. Czy końcowa cena jest równa początkowej?

2.35. Andrzej kupił 6 książek po 390 zł, 9 książek po 450 zł i 3 książki po 510 zł. Ile zapłacił przeciętnie za 1 książkę?.

2.36. Rzemieślnik kupił 12 nożyc po 1400 zł i 18 nożyc po innej cenie. Przeciętnie zapłacono za 1 nożyce 1820 zł. Jaka jest cena 1 nożyc drugiego rodzaju?

2.37. Szkoła kupiła 36 atlasów po 180 zł i inne atlasy po 240 zł. Przeciętna cena atlasu jest 218,40 zł. Ile atlasów drugiego rodzaju kupiła szkoła?

2.38. W pewnej klasie wyniki rocznej klasyfikacji są następujące:

Przedmiot	Liczba uczniów	Oceny				Średnia $\bar{x}$	Odchylenia od średniej
		bdb.	db.	dst.	ndst.		
J. polski	35	3	5	25	2		
Matematyka	35	4	8	20	3		
J. rosyjski	35	2	12	17	4		
J. angielski	19	2	3	13	1		
J. francuski	16	2	4	9	1		
Historia	35	6	6	21	2		
Biologia	35	7	10	18	—		
Geografia	35	8	8	18	1		
Fizyka	35	2	2	27	4		
Chemia	35	6	10	19	—		
W-f	35	10	14	9	—		

a) Oblicz średnią ocen z każdego przedmiotu,

b) oblicz średnią ocen ze wszystkich przedmiotów — $\bar{x}$,

c) oblicz odchylenie średniej oceny z poszczególnych przedmiotów od średniej $\bar{x}$.

2.39. Wypełnij tabelkę podaną w zadaniu poprzednim dla wyników twojej klasy z ostatniego półrocza.

a) $m = 3$, $n = 3{,}01$,

b) $m = \frac{1}{3}$, $n = \frac{1}{2}$,

c) $m = \sqrt{2}$, $n = 1{,}5$,

d) $m = 3{,}14$, $n = \pi$.

Ile takich liczb możesz wskazać?

2.57. Mając dane liczby m, n wskaż trzy liczby k_1, k_2, k_3 takie, że $m < k_1 < k_2 < k_3 < n$

a) $m = 2\frac{1}{2}$; $n = 2{,}75$, c) $m = -\sqrt{3}$, $n = -\frac{1}{2}$,

b) $m = -\frac{3}{8}$; $n = 0$, d) $m = 10$, $n = 10{,}0001$.

Ile takich trójek możesz wskazać?

2.58. Wyznacz wszystkie elementy zbiorów:

a) $A = \{x : |x| = 2 \ \text{ i } \ x \in C\}$,

b) $B = \{x : |x| = 3 \ \text{ i } \ x \in N\}$,

c) $D = \{x : |x| > 2 \ \text{ i } \ x < 10 \ \text{ i } \ x \in N\}$,

d) $E = \{x : |x| < 3\frac{1}{2} \ \text{ i } \ x \in C\}$.

2.59. Dla jakich liczb (par liczb) prawdziwe są równości:

a) $|x| + 5 = |x+5|$, d) $|2x+1| = 1$,

b) $|x| \cdot |y| = |xy|$, e) $|3-x| = 4$,

c) $|x| - |y| = 0$, f) $|x| + |x+1| = 3$.

2.60. Uprość wyrażenia:

a) $x + |1-x| + 2|x-2|$, gdy $1 < x < 2$,

b) $|x| + |x+1| + |x-2|$, gdy $x < -1$,

c) $|x-1| + \frac{x}{|x|} - |x+1|$, gdy $x < -2$.

2.61. Z definicji pierwiastka arytmetycznego wynika, że:

$\sqrt{x^2} = |x|$. Korzystając z tego wzoru uprość:

a) $\sqrt{x^2} + x$,

b) $\sqrt{(x-5)^2} + \sqrt{x^2}$,

c) $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$ gdy $b \neq 0$.

d) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} + x$.

2.62. Zapisz podane wyrażenia bez symbolu wartości bezwzględnej:

a) $|m^2|$

b) $|m-n|$, gdy $m < n$,

c) $|m-n|$, gdy $m > n$,

d) $|-m|$, gdy $m < 0$.

2.63. Jakie wartości przyjmuje wyrażenie $\frac{|x|}{x}$?

2.64. Do jakiego przedziału liczbowego należy x, jeśli:

a) $|x-3| = x-3$, c) $|2x-6| = 6-2x$,

b) $|x+2| = -x-2$, d) $\sqrt{(x-4)^2} = x-4$?

2.65. Wykaż, że dla każdej pary liczb rzeczywistych x, y prawdziwe są związki:

a) $|xy| = |x| \cdot |y|$, c) $|x-y| \leqslant |x| + |y|$,

b) $|x+y| \leqslant |x| + |y|$, d) $(y \neq 0) \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

2.66. Korzystając ze wzoru podanego w zadaniu 2.61, oblicz:

a) $\sqrt{9a^2}$, d) $\sqrt{1{,}44a^8b^{12}c^4}$,

b) $\sqrt{0{,}16a^2y^2}$, e) $\sqrt{a^2+4b^2+4ab}$,

c) $\sqrt{\frac{9a^2b^2}{25x^4y^2}}$, f) $\sqrt{a^2-2ab+b^2}$.

2.67. Wyłącz czynnik przed pierwiastek i przeprowadź redukcję:

a) $3\sqrt{20} + 5\sqrt{45} - 2\sqrt{80}$,

b) $0{,}5\sqrt{50} + 0{,}8\sqrt{72} - 0{,}2\sqrt{32}$,

c) $\sqrt{x^3} + \frac{1}{2}\sqrt{36x^3} - \frac{2x}{3}\sqrt{9x}$, gdy $x > 0$,

d) $(0{,}5\sqrt{24} - 3\sqrt{40}) - (\sqrt{150} + \sqrt{54} - \sqrt{1000})$.

2.68. Wykonaj mnożenie:

a) $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})(2\sqrt{3} - \sqrt{2})$,

b) $(3\sqrt{5} - 2\sqrt{6})(2\sqrt{6} - \sqrt{5})$,

c) $(a - \sqrt{b})(2a + 2\sqrt{b})$.

2.69. Dane są liczby x i y. Oblicz: $x-y$, $x+y$, xy i $\frac{x}{y}$. Otrzymane wyniki przedstaw w postaci $a + b\sqrt{c}$.

Odpowiedzi i wskazówki

§ 1. Zbiory

1.6. Tylko $C_6 \subset C_3$.

1.12. a) m jest dzielnikiem n, b) to nie jest możliwe,
c) n jest dzielnikiem m.

1.20. a) $A \subset B$, c) $B \subset A$, e) $A \cap B = \emptyset$.
b) $A \subset B$, d) $A \subset B$.

1.27. Zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których obie współrzędne są liczbami naturalnymi.

1.29. a) Każde z tych działań jest wykonalne w zbiorze 2^X, bo wynik dowolnego z tych działań na dwóch podzbiorach zbioru X jest podzbiorem zbioru X.
b) „$\cap$" i „$\cup$".
c) elementem neutralnym działania „$\cup$" jest $\emptyset$, a elementem neutralnym działania „$\cap$" jest zbiór X.

1.31. Np. b)

$\oplus_3$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

$\odot_3$	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

1.32. 7; 1; 2; 86; 8; 76.

1.33. a) 2, b) 0, c) 8, d) 8.

1.34. a) (0, 1); (1, 0); (2, 4); (4, 2); (3, 3),
b) (0, 0); (1, 11); (11, 1); (2, 10); (10, 2); (3, 9); (9, 3); (4, 8); (8, 4); (5, 7); (7, 5); (6, 6),
c) (0, 1); (1, 0); (2, 3); (3, 2),
d) (0, 1); (1, 0); (2, 5); (5, 2); (3, 4); (4, 3).

1.35. a) 6, b) 1, c) 20, d) 9, e) 25, f) 2.

1.36. a) 1, b) 2 lub 4 lub 6, lub 0, c) 3, d) nie ma rozwiązania.

1.41. a) Tak, b) 1, 3, 2, 2, 12, 6, 36,
c) istnieje element neutralny działania $\square$; jest nim liczba 1.

1.42. a) Każde z tych działań jest przemienne; łączne są tylko działania $\triangle$ i $\circ$,
b) elementem neutralnym działania $\triangle$ jest (-1), a działania $\circ$ jest 0; działanie $\square$ nie ma elementu neutralnego,
c) w zbiorze liczb naturalnych i w zbiorze liczb całkowitych są wykonalne działania $\triangle$ i $\circ$.

§ 2. Liczby rzeczywiste

2.8. a) Parzysta, b) parzysta, c) parzysta, d) parzysta.

2.9. a) Parzysta, b) parzysta, c) nieparzysta, d) nieparzysta.

2.10. a) $n+(n+1)+(n+2) = 3n+3 = 3(n+1)$,
b) $2n+(2n+2)+(2n+4) = 6n+6 = 6(n+1)$,
c) $(2n-1)+(2n+1)+(2n+3)+(2n+5) = 8n+8 = 8\cdot(n+1)$.

2.11. a) $(a+b)^2$, b) $(a-b)^2$, c) a^2+b^2, d) a^2-b^2.

2.12. a) $(n+1)^2-n^2 = n^2+2n+1-n^2 = 2n+1$,
b) $(2n+2)^2-(2n)^2 = 4(2n+1)$,
c) $(2n+3)^2-(2n+1)^2 = 8(n+1)$.

2.15. Wsk. Rozważ w jakiej potędze występuje liczba 2 w rozkładzie na czynniki pierwsze każdej ze stron równości.

2.17. a) Wiadomo, że jeżeli $a \in W$ i $b \in W$, to $a+b \in W$ i $a-b \in W$. Przypuśćmy więc, że $a \in W$ i $b \notin W$. Niech $a+b = c$. Gdyby $c \in W$, wówczas $c-a \in W$, $c-a = b$. Otrzymalibyśmy więc: $b \in W$, co jest sprzeczne z założeniem. W takim razie $a+b \notin W$.

2.18. Gdyby każda z liczb a, b, c była wymierna, to suma $a+b$ byłaby liczbą wymierną, wbrew założeniu.

2.19. Ponieważ $a+b$ i $a-b$ są liczbami wymiernymi, to ich suma $(a+b)+(a-b) = 2a$ i różnica $(a+b)-(a-b) = 2b$ są liczbami wymiernymi. Stąd a i b są wymierne.

2.20. Korzystamy z definicji dzielenia:
$$\frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = b\cdot c.$$
Jeśli $a \neq 0$ i $b = 0$, to nie istnieje liczba c taka, że $a = 0\cdot c$.
Jeśli $a = 0$ i $b = 0$, to każda liczba c spełnia warunek $0 = 0\cdot c$. Jest to sprzeczne z def. działania.

2.22. 2.

2.23. 0.

2.24. $\frac{1}{5}$.

2.25. 0,8.

2.26. a) 1; b) 1; c) $-\frac{96}{373}$.

2.27. $\frac{21}{59}$.

2.28. a) 2,32; b) $\frac{847}{800}$; c) 56,25; d) 26125; e) 0,3; f) $\frac{1}{100}\cdot ab$.

2.29. a) 280; b) 700; c) 400; d) $\frac{a\cdot 100}{p}$.

2.30. a) 800%; b) 40%; c) 500%.

2.31. 34%.

2.32. $\frac{ap+bq}{a+b}$%.

2.33. $\frac{100a}{100-p}$ zł, $0 < p < 100$.

2.34. Końcowa cena stanowi 96% ceny początkowej.

2.35. 440 zł.

2.36. 2100 zł.

2.37. 64.

2.38. a) Średnie kolejnych cen są 3,26; 3,37; 3,34; 3,32; 3,44; 3,46; 3,69; 3,66; 3,06; 3,63; 4,03.

b) $\bar{x} = 3{,}47$. c) 15,37%.

2.41. b) 23750 zł c) 27750 zł d) 16,84%

2.42. b) 9,4%.

2.43. $\frac{246}{143}$.

2.44. 1.

2.45. a) $64a^{16}b^{26}c^{14}d^4$; b) $4x^2y^{13}z^{12}$;
c) $2a^nb^mc$; d) $-2x^2y^{n-2}z^4$.

2.46. a) $4x^2+10x$;
b) $-0{,}4x+0{,}8xy-14{,}2y$;
c) $6{,}8x-1{,}4y$;
d) $144y^2-85xy-21x^2$;
e) $4{,}8x^4-0{,}96x^3y-1{,}944x^2y^2-2{,}688xy^3-2{,}88y^4$;
f) $6x^2-61xy-35y^2+42x+48y$.

2.47. a) $7x^2-16x-7$; b) $50m^2+41n^2$;
c) $13d^2+180cd-79c^2$; d) $16x^3y-16xy^3$.

2.48. a) 13; b) -30.

2.49. a) $a^6-10a^4+27a^2-11$; c) $3x^4-3x^2$.
b) $-8a^3-32a^2+78a-18$;

2.50.

Zbiór	Kres dolny	Kres górny
A	nie istnieje	nie istnieje
B	0	1
C	1	nie istnieje
D	0	1
E	0	1
F	nie istnieje	nie istnieje

2.51.

Zbiór	Kres dolny	Kres górny
A	3	nie istnieje
B	3	nie istnieje
C	4	nie istnieje
D	-3	3
E	0	2

2.52.

Zbiór	Kres dolny	Kres górny
A	0	1
B	$-\frac{1}{3}$	1
C	-1	0
D	2	nie istnieje
E	nie istnieje	nie istnieje
F	-2	2
G	nie istnieje	0

2.53. a) Kres dolny nie istnieje, kres górny -1;
b) kres dolny 0, kres górny nie istnieje;
c) kres dolny 2, kres górny 10.

2.56. Zadanie ma nieskończenie wiele rozwiązań, np.

a) $k = 3{,}001$; b) $k = \frac{11}{30}$; c) $k = 1{,}49$; d) $k = 3{,}1401$.

2.57. Ponieważ $m < n$, więc „odległość" między tymi liczbami jest $n-m$. Między liczbami m i n zawarta jest każda liczba postaci $m+a\cdot(n-m)$, gdzie $a \in (0; 1)$.

a) $2\frac{1}{2}+a(2{,}75-2{,}5) = 2{,}5+a\cdot 0{,}25$, gdzie $a \in (0; 1)$.

Gdy $a_1 = 0{,}25$ i $a_2 = 0{,}5$ i $a_3 = 0{,}75$, to $k_1 = 2{,}5625$ i $k_2 = 2{,}625$ i $k_3 = 2{,}6875$.

2.59. a) Dla $x \geq 0$; b) dla każdej pary liczb rzeczywistych;
c) dla $x = y$ lub $x = -y$; d) dla $x = 0$ lub $x = -1$;
e) dla $x = -1$ lub $x = 7$; f) dla $x = 1$ lub $x = -2$.

2.60. a) 3; b) $-3x+1$; c) 1.

2.65. b) Wykażemy najpierw, że $|x| \leqslant c \Leftrightarrow -c \leqslant x \leqslant c$ (*).

Ponieważ $|x| = x$ lub $|x| = -x$,
więc $x = |x|$ lub $x = -|x|$ oraz $-|x| \leqslant |x|$.
Zatem $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$.
Jeśli $|x| \leqslant c$, to $-|x| \geqslant -c$ co pociąga za sobą nierówności
$-c \leqslant -|x| \leqslant x \leqslant |x| \leqslant c$ czyli $-c \leqslant x \leqslant c$.
Jeśli $-c \leqslant x \leqslant c$ to również $-c \leqslant -x \leqslant c$, czyli $-c \leqslant |x| \leqslant c$.
Aby wykazać b) zauważmy, że

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x|$$
$$-|y| \leqslant y \leqslant |y|.$$

Dodając te nierówności stronami otrzymujemy nierówności
$-(|x|+|y|) \leqslant x+y \leqslant |x|+|y|$
które na mocy (*) dają nierówność

$$|x+y| \leqslant |x|+|y|$$

c) Wynika z b) bo
$|x-y| = |x+(-y)| \leqslant |x|+|-y| = |x|+|y|$

a) i d) są wnioskami z równości $\sqrt{x^2} = |x|$ (zad. 2.61)

2.67. a) $13\sqrt{5}$; b) $6{,}5\sqrt{2}$; c) $2x\sqrt{x}$; d) $4\sqrt{10}-7\sqrt{6}$.