Algorytmy
z powracaniem

ZNAJDOWANIE CYKLU HAMILTONA I EULERA W GRAFIE

PAWEŁ KOLEC

Cel:

Celem niniejszego sprawozdania jest przeprowadzenie analizy algorytmów z powracaniem w kontekście poszukiwania cyklu Eulera i cyklu Hamiltona. W szczególności, skoncentruję się na analizie tych algorytmów dla dwóch rodzajów grafów: grafu nieskierowanego z reprezentacją macierzy sąsiedztwa oraz grafu skierowanego z reprezentacją listy następników.

Przedstawię szczegółowo opis algorytmów z powracaniem dla poszukiwania cyklu Eulera i cyklu Hamiltona w grafach nieskierowanych z reprezentacją macierzy sąsiedztwa oraz w grafach skierowanych z reprezentacją listy następników. Przeprowadzę również analizę złożoności czasowej i przestrzennej tych algorytmów oraz porównamy ich efektywność i wydajność dla różnych typów grafów.

Wnioski z przeprowadzonych badań mogą posłużyć do lepszego zrozumienia i wyboru odpowiednich technik rozwiązywania problemów poszukiwania cyklu Eulera i Hamiltona w praktycznych zastosowaniach.

Jak działa:

Cykl Hamiltona:

Cykl Hamiltona to taki cykl w grafie, który przechodzi przez każdy wierzchołek dokładnie raz i wraca do wierzchołka początkowego. Istnienie cyklu Hamiltona w grafie oznacza, że istnieje zamknięta ścieżka, która odwiedza każdy wierzchołek grafu dokładnie raz.

Algorytm poszukiwania cyklu Hamiltona polega na przeglądaniu wszystkich możliwych permutacji wierzchołków grafu w celu znalezienia cyklu, który spełnia warunek odwiedzenia każdego wierzchołka dokładnie raz. Algorytm wykorzystuje metodę z powracaniem, aby eksplorować różne ścieżki i dokonywać wyborów w przypadku napotkania punktu martwego, czyli sytuacji, gdy dalsze poszukiwanie nie prowadzi do znalezienia rozwiązania.

Cykl Eulera:

Cykl Eulera to taki cykl w grafie, który przechodzi przez każdą krawędź grafu dokładnie raz. W przeciwieństwie do cyklu Hamiltona, cykl Eulera nie musi przechodzić przez każdy wierzchołek grafu.

Algorytm poszukiwania cyklu Eulera również opiera się na metodzie z powracaniem. Początkowo, algorytm wybiera pierwszy wierzchołek grafu jako punkt początkowy. Następnie, wędruje po krawędziach, eliminując je po przejściu. Jeżeli napotka wierzchołek, z którego nie można dalej się poruszać, wraca do poprzedniego wierzchołka, który ma jeszcze dostępne krawędzie, kontynuując eksplorację. Algorytm kończy się, gdy wszystkie krawędzie zostaną odwiedzone.

Podsumowując, poszukiwanie cyklu Hamiltona polega na znajdowaniu zamkniętej ścieżki, która przechodzi przez każdy wierzchołek grafu dokładnie raz, podczas gdy poszukiwanie cyklu Eulera polega na znalezieniu ścieżki, która przechodzi przez każdą krawędź grafu dokładnie raz.

Obie te operacje opierają się na algorytmach z powracaniem, które eksplorują różne ścieżki i wykorzystują informacje o odwiedzonych wierzchołkach lub krawędziach w celu znalezienia rozwiązania.

Złożoność obliczeniowa:

Klasy złożoności obliczeniowej badanych problemów są związane z liczbą wierzchołków w grafie. Problem poszukiwania cyklu Hamiltona należy do klasy NP-trudnych problemów, co oznacza, że nie istnieje znany algorytm efektywny w czasie wielomianowym dla wszystkich instancji tego problemu.

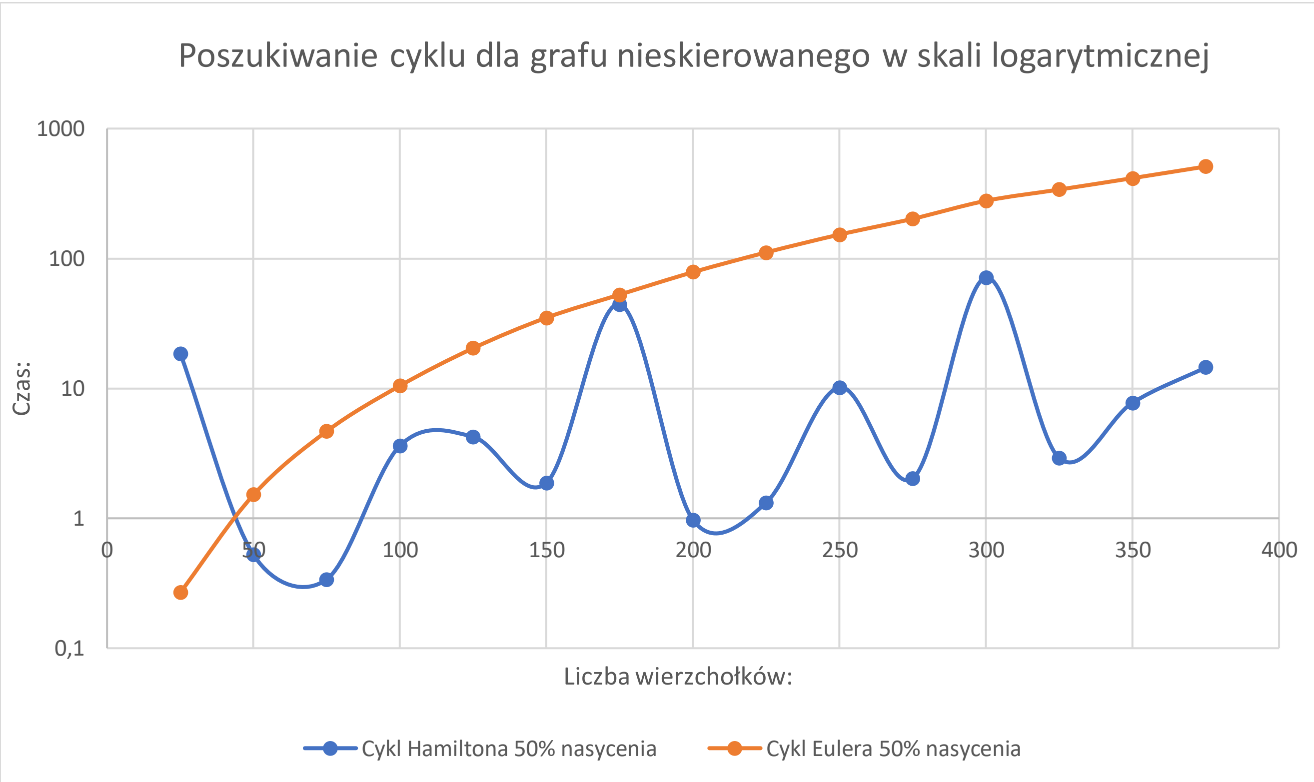
Podobnie jak problem poszukiwania cyklu Hamiltona, problem poszukiwania cyklu Eulera również jest klasyfikowany jako NP-trudny. Oznacza to, że nie istnieje znany algorytm efektywny w czasie wielomianowym dla wszystkich instancji tego problemu.

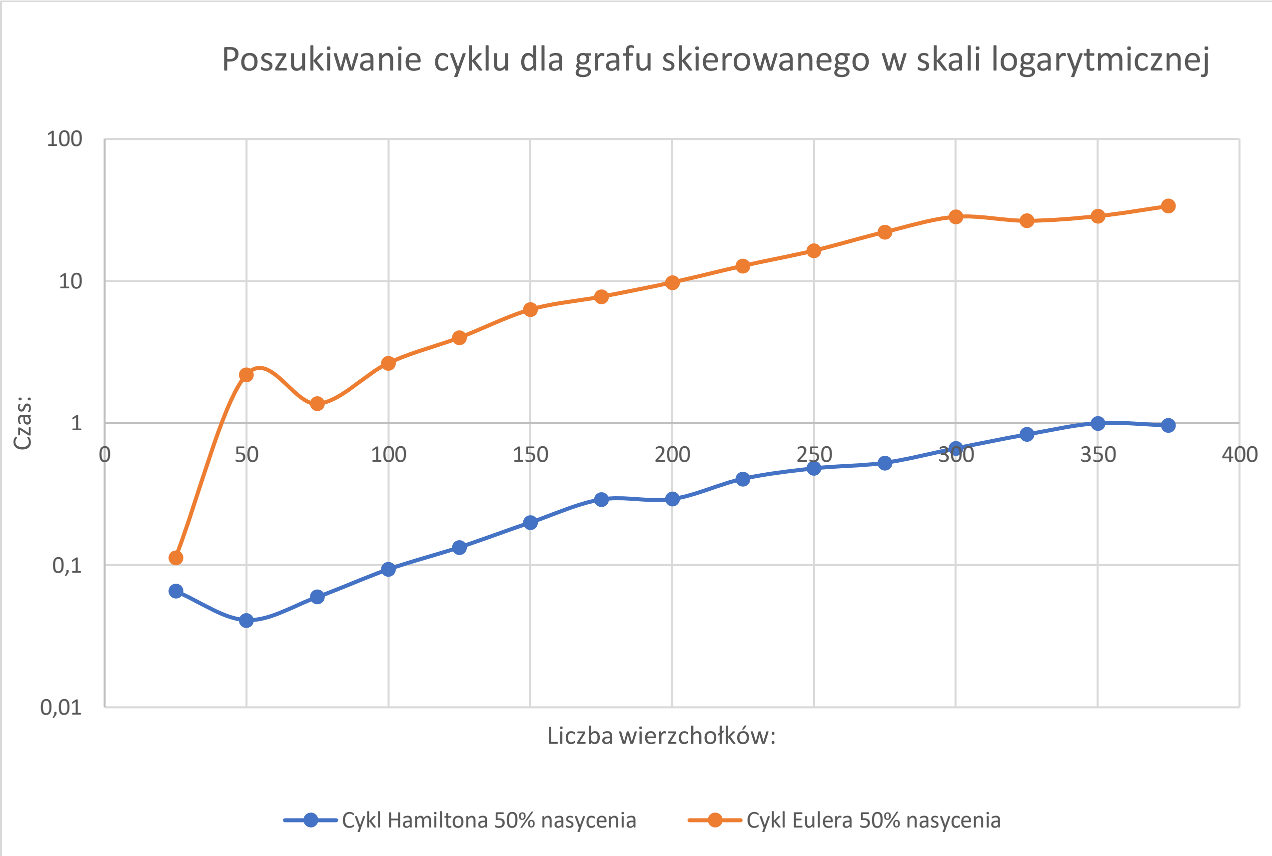
Klasyfikacja NP-trudności oznacza, że nie mamy ogólnie znanego efektywnego sposobu rozwiązania tych problemów, szczególnie dla dużych grafów. Algorytmy z powracaniem są jednym z podejść do rozwiązywania tych problemów, ale złożoność czasowa tych algorytmów rośnie wykładniczo wraz ze wzrostem liczby wierzchołków grafu. Dlatego dla dużych grafów, poszukiwanie cyklu Hamiltona i cyklu Eulera może być praktycznie niemożliwe do wykonania w rozsądnym czasie.

Podsumowując, badane problemy poszukiwania cyklu Hamiltona i cyklu Eulera w grafach, zarówno nieskierowanych jak i skierowanych, są klasyfikowane jako NP-trudne.

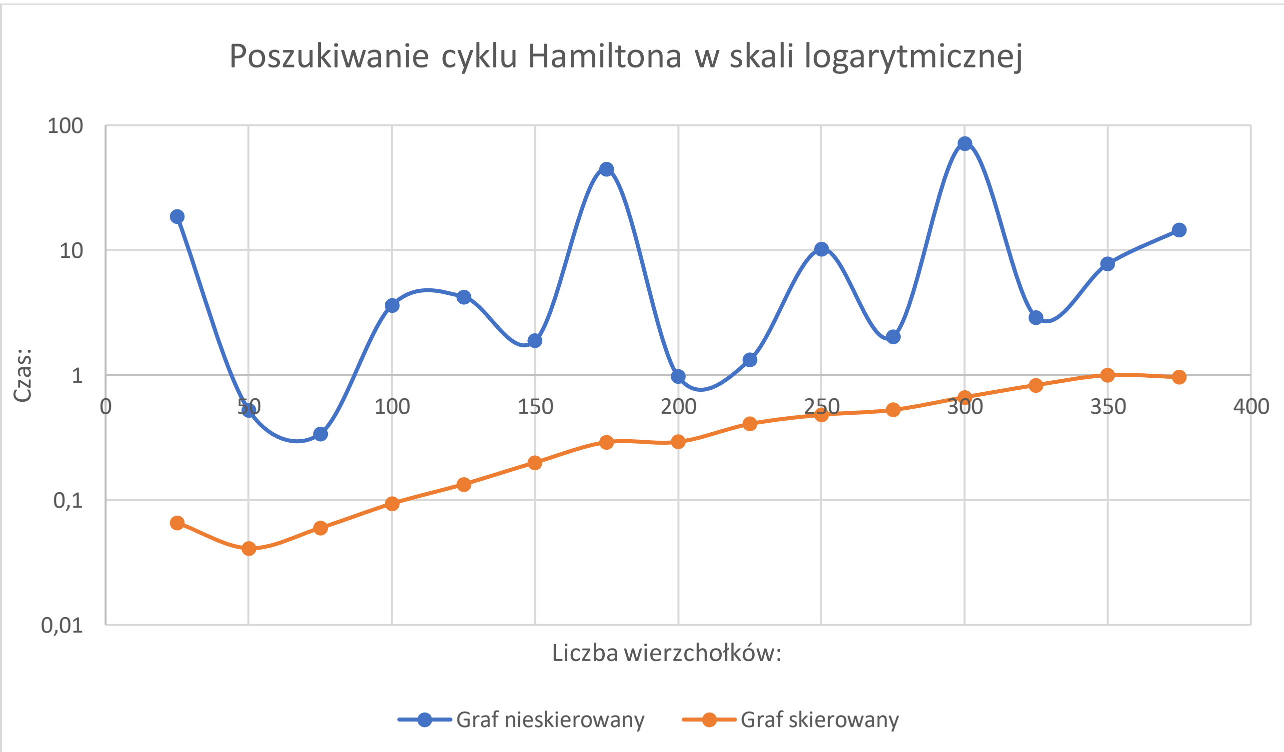
Wyniki pomiarów:

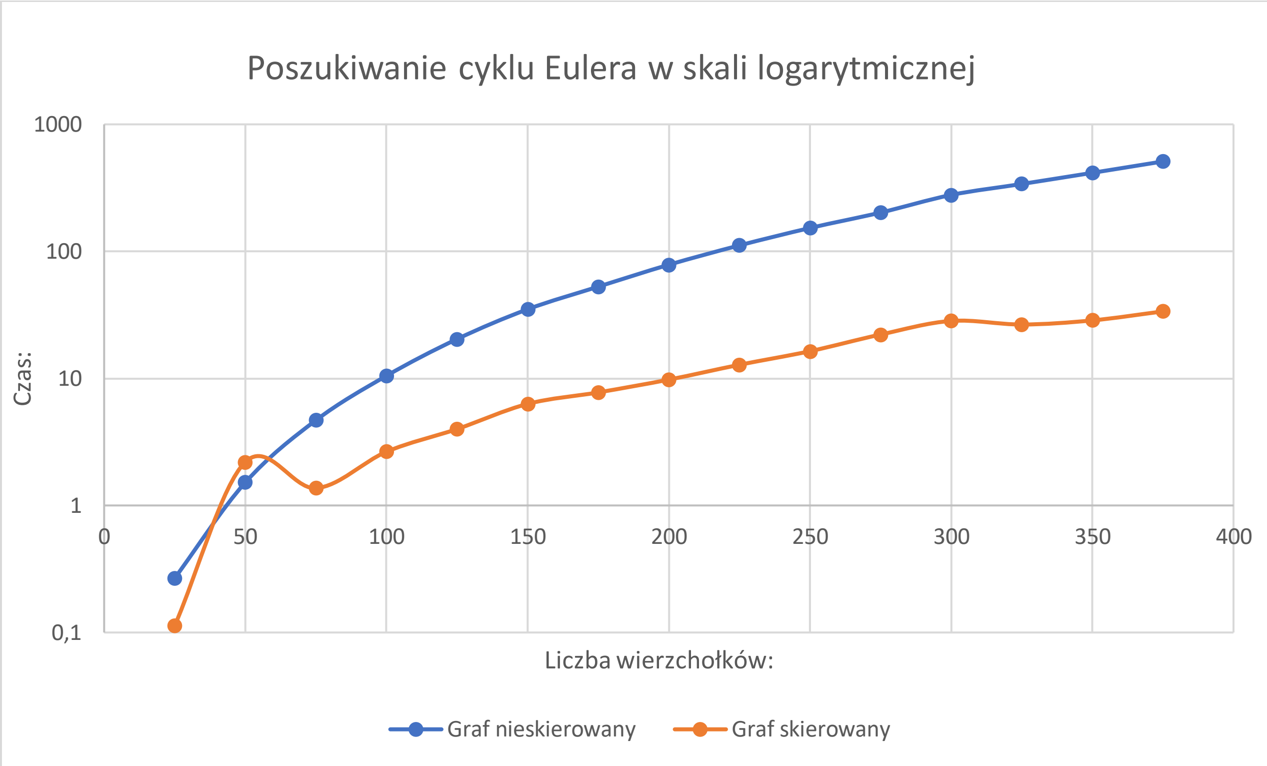
Poszukiwanie cyklu Hamiltona i Eulera dla grafu nieskierowanego oraz skierowanego dla grafu o nasyceniu 50% w zależności od liczby wierzchołków:



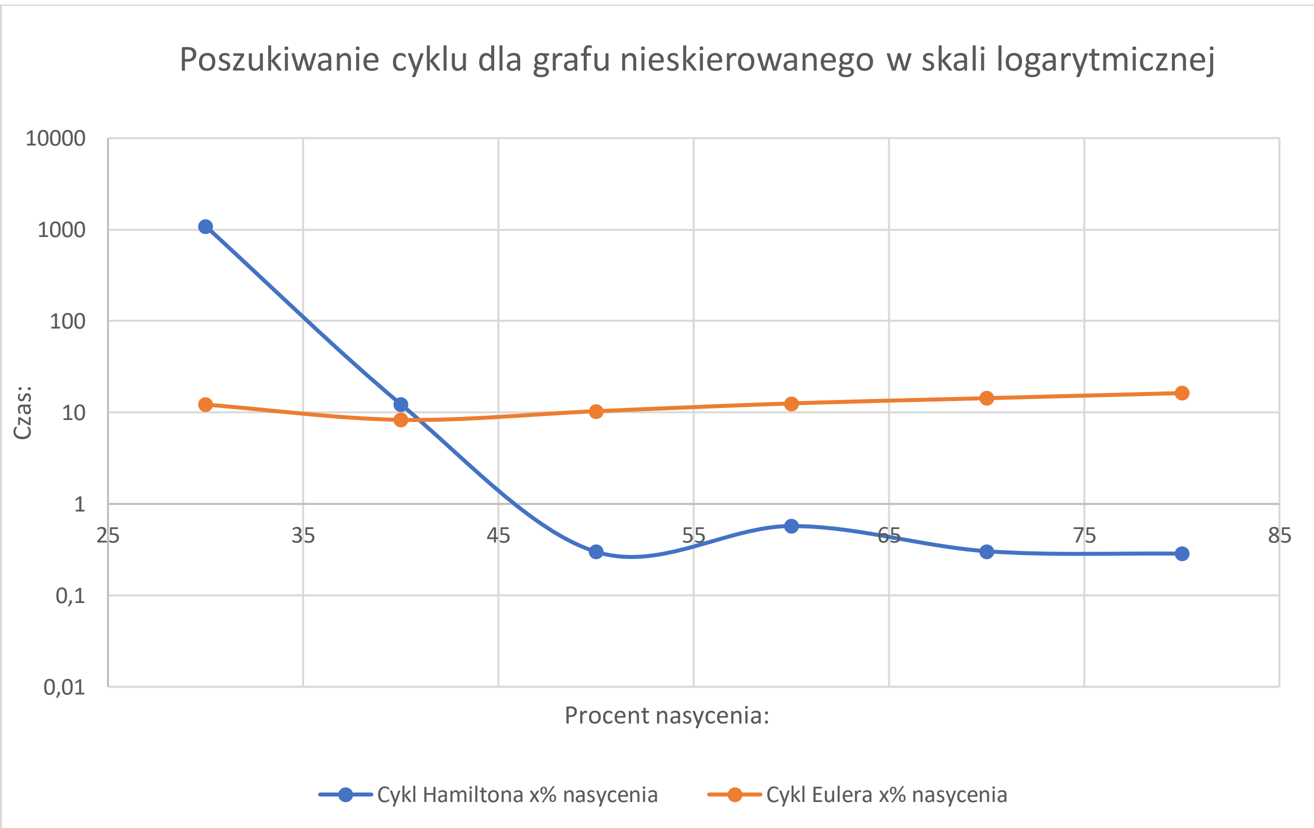


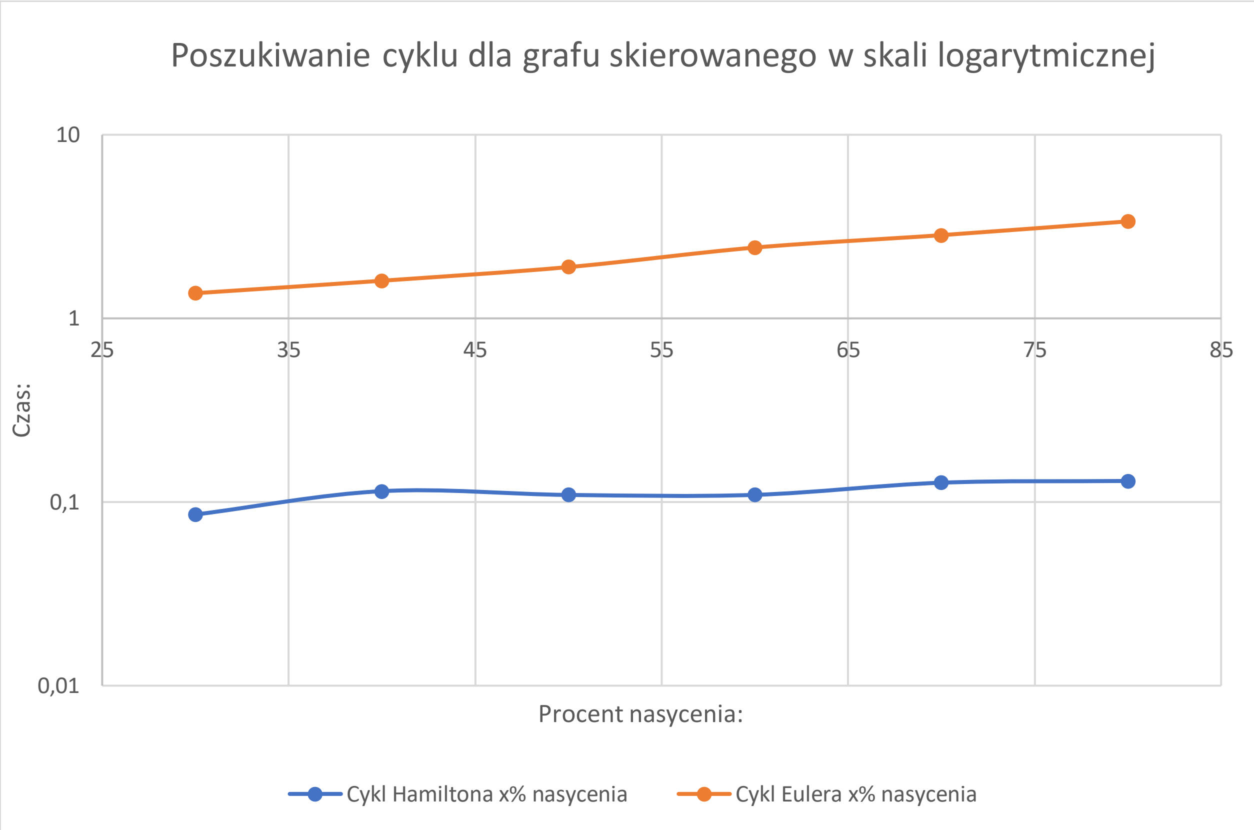
Poszukiwanie cyklu Hamiltona i Eulera przy stałym nasyceniu w zależności od liczby wierzchołków dla grafu skierowanego i nieskierowanego:



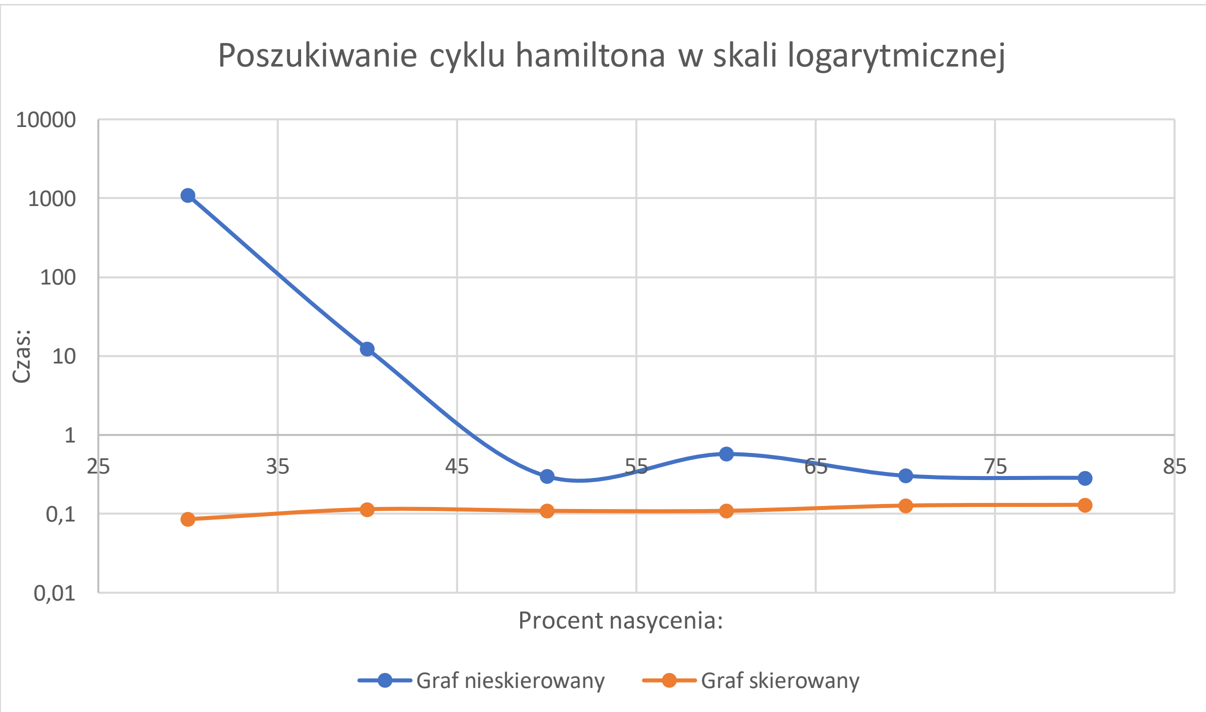


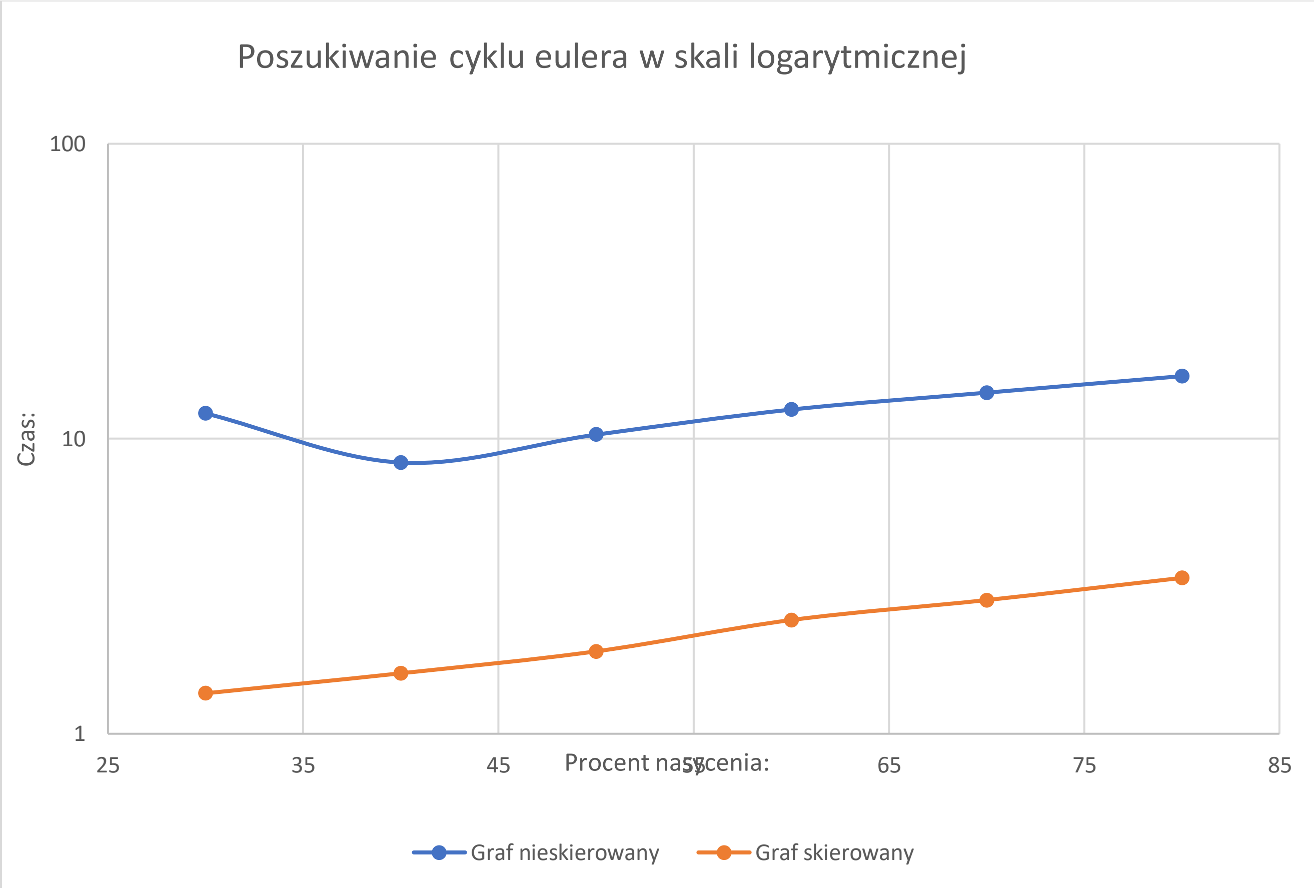
Poszukiwanie cyklu Hamiltona i Eulera dla grafu nieskierowanego oraz skierowanego w zależności od procentu nasycenia grafu:





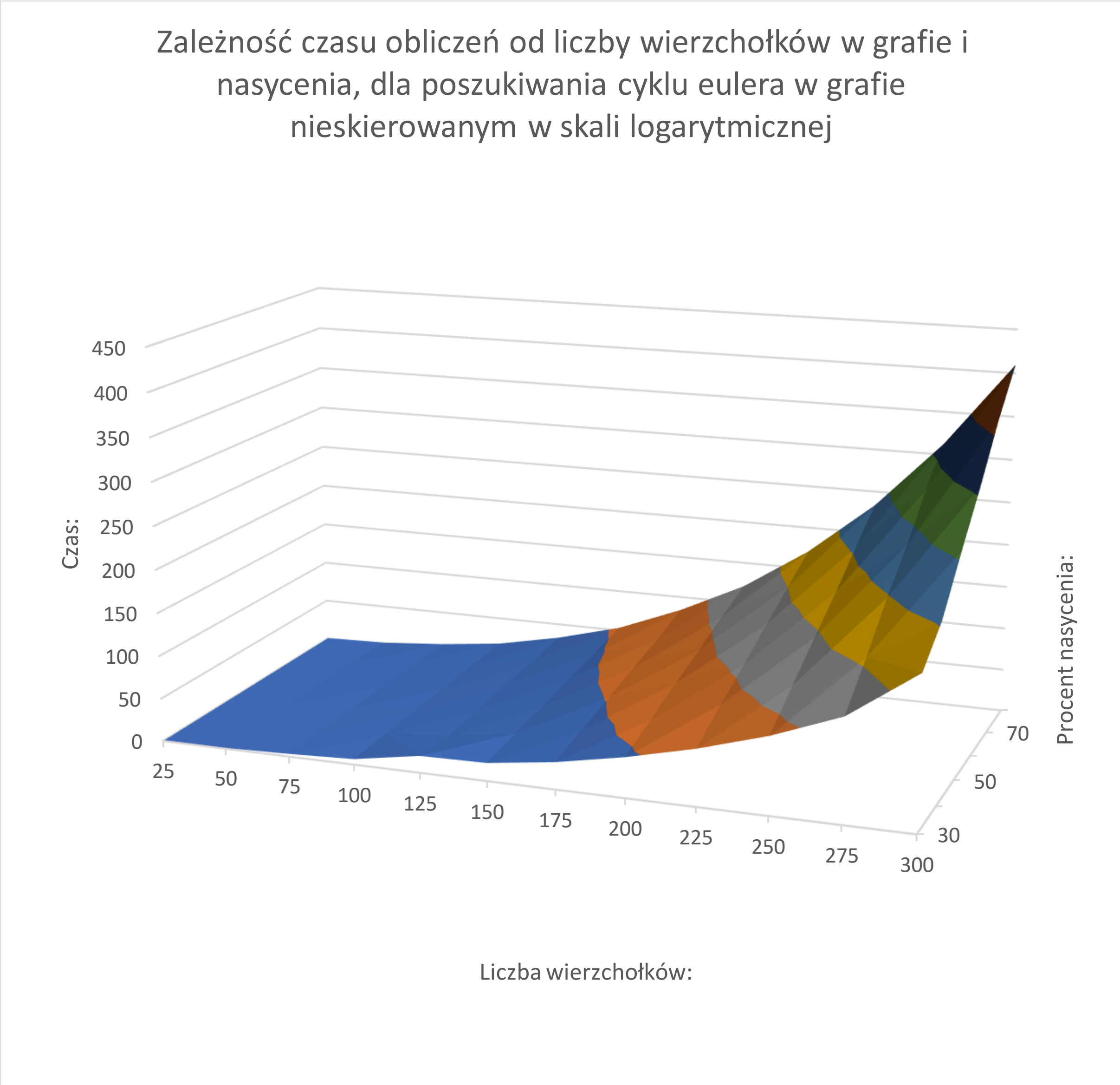
Poszukiwanie cyklu Hamiltona i Eulera dla grafu nieskierowanego oraz skierowanego w zależności od procentu nasycenia grafu:

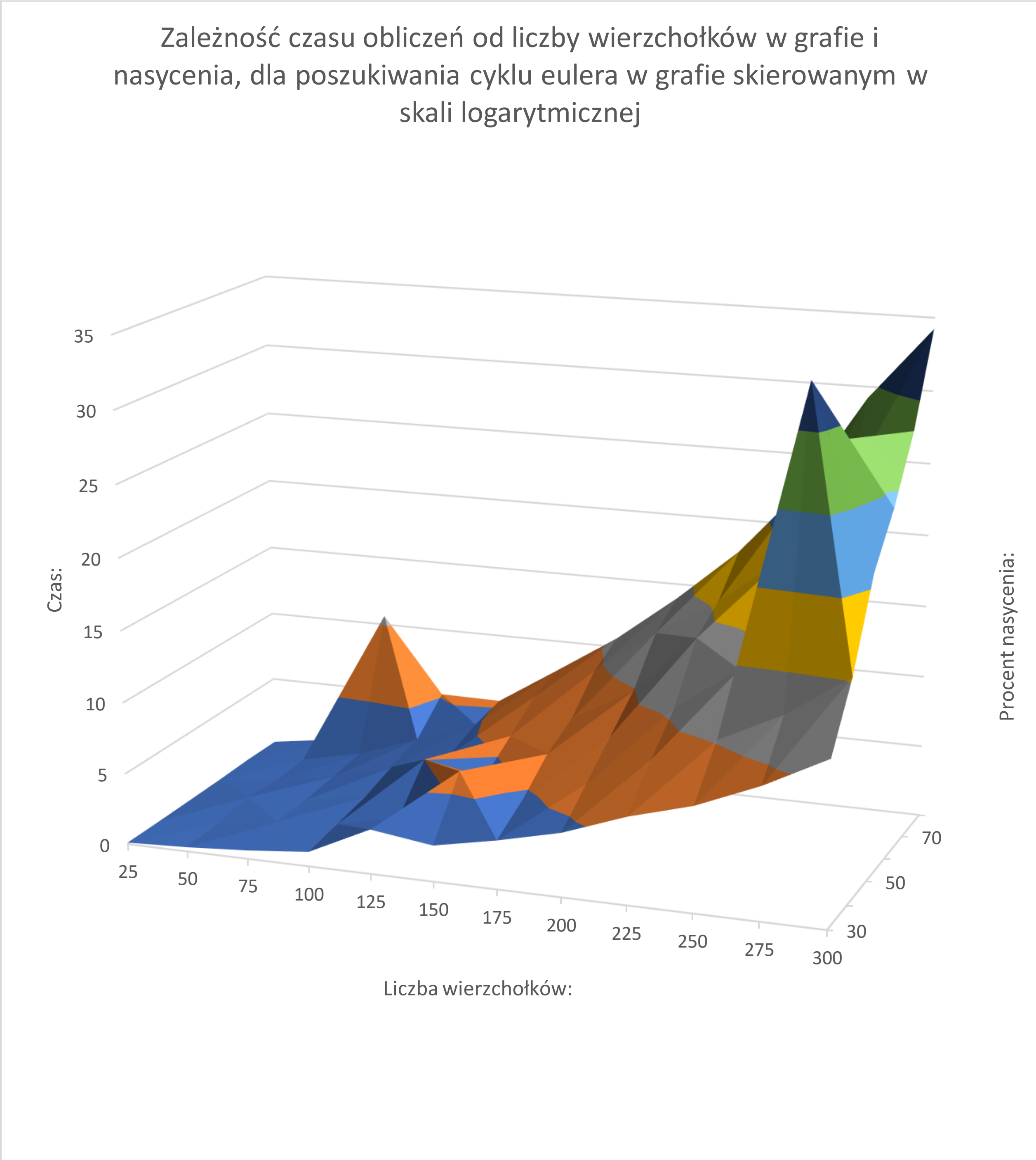


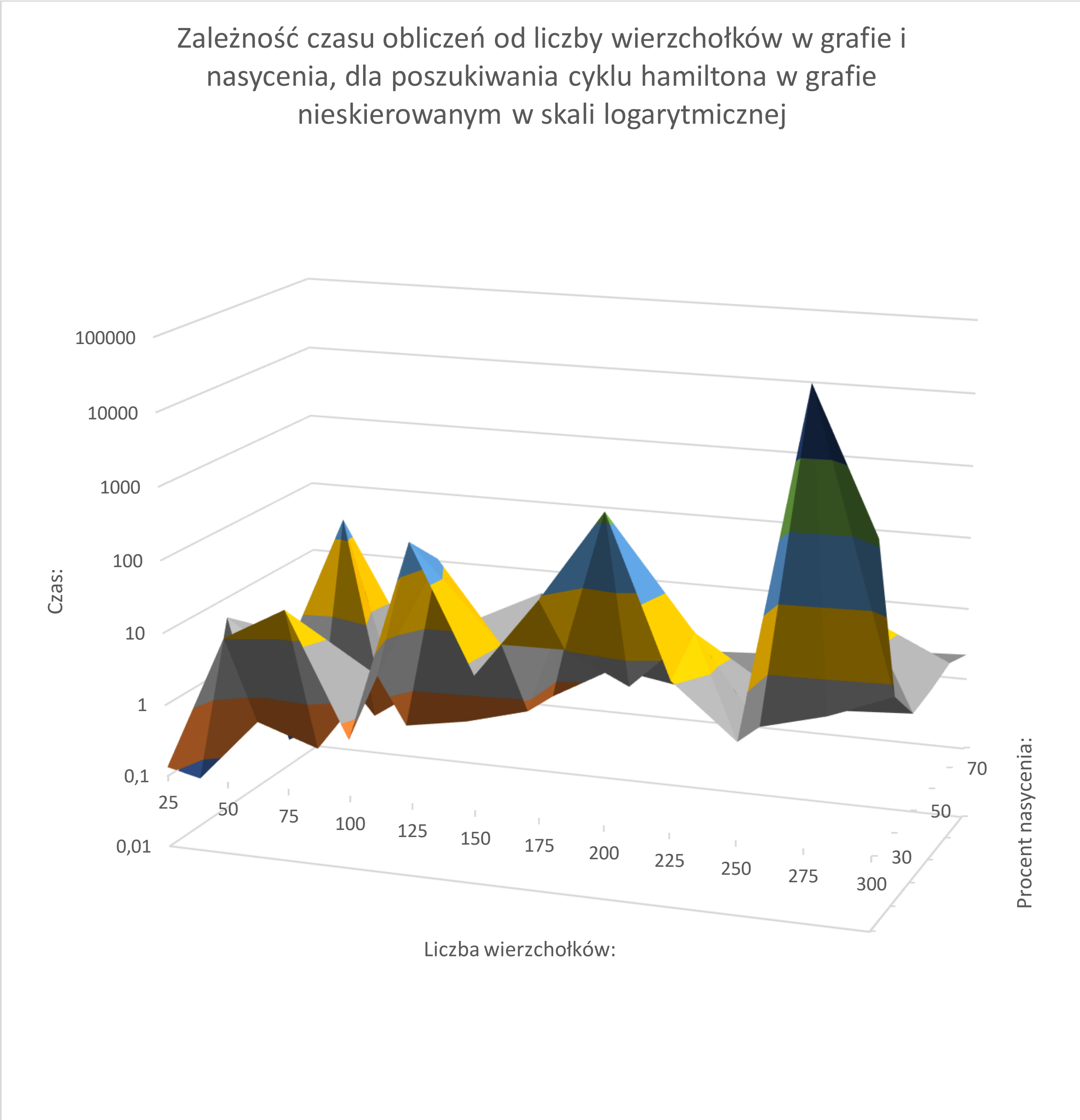


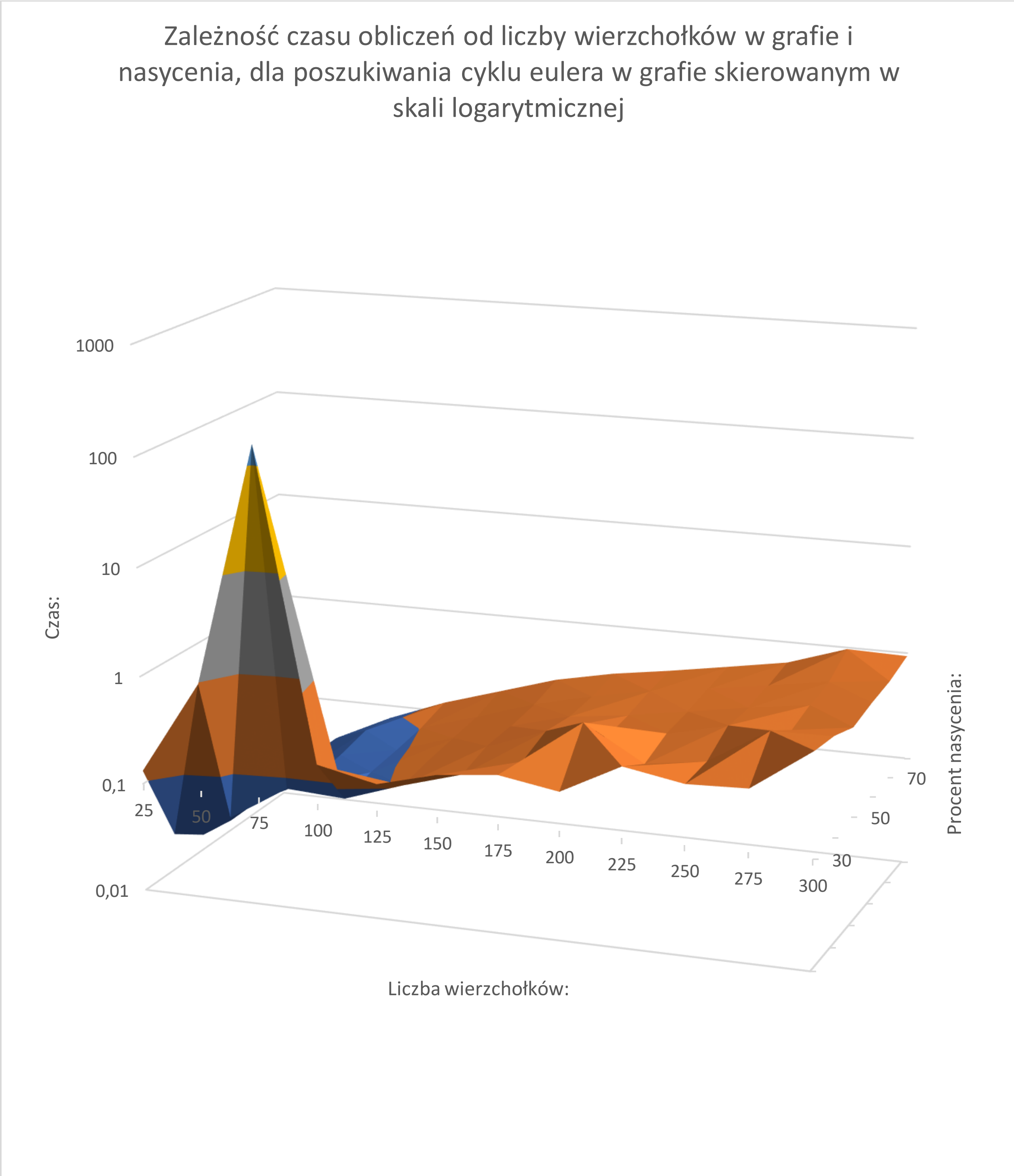
Poszukiwanie cyklu eulera w skali logarytmicznej
100
10
1
Czas:
25
35
45
55
65
75
85
Procent nasycenia:
Graf nieskierowany
Graf skierowany

Zależność czasu obliczeń od liczby wierzchołków w grafie i nasycenia, dla poszukiwania cyklu Eulera i Hamiltona w grafie nieskierowanym i skierowanym:




Zależność czasu obliczeń od liczby wierzchołków w grafie i nasycenia, dla poszukiwania cyklu eulera w grafie skierowanym w skali logarytmicznej
Czas:
35
30
25
20
15
10
5
0
25
50
75
100
125
150
175
200
225
250
275
300
Liczba wierzchołków:
30
50
70
Procent nasycenia:


Zależność czasu obliczeń od liczby wierzchołków w grafie i nasycenia, dla poszukiwania cyklu hamiltona w grafie nieskierowanym w skali logarytmicznej
100000
10000
1000
100
10
1
0,1
0,01
Czas:
25
50
75
100
125
150
175
200
225
250
275
300
Liczba wierzchołków:
70
50
30
Procent nasycenia:



Zależność czasu obliczeń od liczby wierzchołków w grafie i nasycenia, dla poszukiwania cyklu eulera w grafie skierowanym w skali logarytmicznej
1000
100
10
1
0,1
0,01
Czas:
25
50
75
100
125
150
175
200
225
250
275
300
Liczba wierzchołków:
30
50
70
Procent nasycenia:

Wnioski:

Obserwacje dotyczące działania zaimplementowanych algorytmów dla grafów o różnym nasyceniu wskazują na to, że czas wykonania algorytmów zależy w dużej mierze od struktury i charakterystyki konkretnego grafu. Każdy przypadek i graf mogą mieć różne właściwości, co wpływa na złożoność obliczeniową i czas działania algorytmów.

Cykl Eulera:

Algorytm poszukiwania cyklu Eulera oparty na DFS ma złożoność obliczeniową O(m), gdzie m to liczba krawędzi w grafie. Jednak warto zauważyć, że to jest złożoność oczekiwana i może się różnić w praktyce w zależności od grafu.

Wybór reprezentacji maszynowej grafu dla tego algorytmu zależy od charakterystyki grafu.

Ważne jest podkreślenie, że zwiększenie liczby krawędzi w grafie powoduje liniowy wzrost czasu obliczeń (O(m)). Jednakże, to jak szybko algorytm znajdzie cykl zależy od struktury konkretnego grafu. Istnieją grafy o dużej liczbie krawędzi, dla których algorytm znajduje cykl Eulera bardzo szybko, podczas gdy dla innych grafów może to zająć znacznie więcej czasu.

Cykl Hamiltona:

Problem znalezienia cyklu Hamiltona należy do klasy problemów silnie NP-trudnych, a złożoność obliczeniowa wynosi O(n!), gdzie n to liczba wierzchołków w grafie. Ta złożoność oznacza, że czas wykonania algorytmu rośnie wykładniczo wraz z rozmiarem grafu.

Znalezienie cyklu Hamiltona wymaga przeglądania ogromnej przestrzeni rozwiązań, co sprawia, że czas wykonania jest bardzo długi.

Wybór odpowiedniej reprezentacji maszynowej grafu dla algorytmu z powracaniem również zależy od struktury grafu

Warto zaznaczyć, że czas wykonania algorytmu poszukiwania cyklu Hamiltona może się znacznie różnić w zależności od grafu. Niektóre grafy mogą mieć łatwo odnajdywalne cykle Hamiltona, podczas gdy inne mogą mieć bardziej skomplikowaną strukturę, co znacznie wydłuża czas wykonania algorytmu. W praktyce istnieją grafy o dużej liczbie wierzchołków, dla których znalezienie cyklu Hamiltona jest bardzo trudne lub nawet niemożliwe do osiągnięcia w rozsądnym czasie.

Podsumowanie:

Czas wykonania algorytmów zależy nie tylko od liczby wierzchołków i krawędzi, ale także od struktury grafu. Grafy o prostych i regularnych strukturach mogą być łatwiejsze do przeszukania, podczas gdy grafy o skomplikowanych i gęstych strukturach mogą wymagać znacznie więcej czasu.

Podsumowując, obserwacje wskazują na to, że czas wykonania algorytmów poszukiwania cykli w grafach zależy od wielu czynników, takich jak struktura grafu, liczba wierzchołków, liczba krawędzi oraz wybrana reprezentacja maszynowa. Nie ma jednego rozwiązania pasującego do wszystkich przypadków, dlatego ważne jest uwzględnienie specyfiki konkretnego grafu i dostosowanie strategii poszukiwań odpowiednio do danego problemu.