Statystyka i Analiza Danych

W4: Estymacja punktowa i przedziałowa

dr hab. inż. Katarzyna Filipiak, prof. PP

Instytut Matematyki
Politechnika Poznańska

2023/2024

Próba prosta

Obserwację przed jej pobraniem modelujemy jako zmienną losową X o rozkładzie $f(x)$ - rozkładzie populacji.

Próba (losowa) prosta o liczebności n – zbiór n niezależnych zm. losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ o takim samym rozkładzie $f(x)$ jak interesująca zm. losowa X w populacji.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ – zm. losowe reprezentujące nieznane pomiary, które w procesie losowania próby zamienią się w pierwszą, drugą, $\ldots, n$tą obserwację

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ – obserwacje (realizacje zm. losowych $X_1, X_2, \ldots, X_n$)

Estymacja

θ - nieznany parametr w rozkładzie populacji, $f(x)$

Estymator θ – statystyka podająca sposób obliczania oceny parametru θ:

$$\widehat{\Theta} = \widehat{\Theta}(X_1, X_2, \ldots X_n)$$

Estymator jest zmienną losową (a więc posiada swój rozkład)!

Ocena parametru θ:

$$\hat{\theta} = \widehat{\Theta}(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

Estymacja punktowa średniej populacyjnej

Obserwowana cecha w populacji – zmienna losowa X o rozkładzie z nieznaną średnią populacyjną μ

Parametr: średnia populacyjna μ

Próba: $X_1, X_2, \ldots, X_n$

Estymator μ: średnia z próby, tzn. $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

Obserwacje: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Ocena μ: $\overline{x}$

$$\boxed{\widehat{\mu} = \overline{x}}$$

Przykład 1

Inżynier mechanik, który zaprojektował urządzenie do fizjoterapii, wybrał do badania 12 pacjentów i sprawdził, ile czasu spędzają korzystając z nowego urządzenia. Otrzymał następujące wyniki (w godzinach):

8; 12; 26; 10; 23; 21; 16; 22; 18; 17; 36; 9.

Oceń średni czas korzystania z urządzenia danego typu przez wszystkich pacjentów poddanych terapii.

$$\text{time} = \mathsf{c}(8, 12, 26, 10, 23, 21, 16, 22, 18, 17, 36, 9)$$

Estymacja przedziałowa

Niech $(1-\alpha)$ będzie określonym „dużym” prawdopodobieństwem i niech statystyki (zmienne losowe) L oraz U będą funkcjami próby $X_1, X_2, \ldots, X_n$ takimi, że

$$P(L < \theta < U) = 1 - \alpha.$$

Wówczas przedział losowy (L, U) nazywamy $(1-\alpha)100\%$ **przedziałem ufności** dla parametru θ a wartość $(1-\alpha)$ nazywamy **współczynnikiem ufności** przedziału.

Rozkłady średniej z próby – przypomnienie

(1) $X_i \sim N(\mu, \sigma)$, μ, σ – znane:

$$\overline{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$$

(2) X_i ze znanymi μ, σ, rozkład X_i nie jest normalny, n duże:

$$\overline{X} \underset{\text{app}}{\sim} N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\overline{X} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \underset{\text{app}}{\sim} N(0, 1)$$

(3) $X_i \sim N(\mu, \sigma)$, μ – znane, σ – nieznane: $\dfrac{\overline{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t_{n-1}$

Przedział ufności dla μ (1)

Założenie: $X_i \sim N(\mu, \sigma)$, μ – nieznane, σ – znane

Z ufnością $100(1-\alpha)\%$ przedział

$$\left(\overline{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

pokrywa nieznaną prawdziwą średnią populacyjną μ.

$z_{1-\alpha/2}$ – kwantyl rozkładu $N(0,1)$: $\texttt{qnorm}(1-\alpha/2)$

Przedział ufności dla μ (2)

Założenia: dowolny rozkład populacji z nieznaną średnią populacyjną μ, próba duża ($n \geqslant 30$)

Z ufnością $100(1-\alpha)\%$ przedział

$$\left(\overline{X} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

pokrywa nieznaną prawdziwą średnią populacyjną μ.

$z_{1-\alpha/2}$ – kwantyl rozkładu $N(0,1)$: $\texttt{qnorm}(1-\alpha/2)$

Przedział ufności dla μ (3)

Założenie: $X_i \sim N(\mu, \sigma)$, μ – nieznane, σ – nieznane

Z ufnością $100(1-\alpha)\%$ przedział

$$\left(\overline{X} - t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

pokrywa nieznaną prawdziwą średnią populacyjną μ.

$t_{n-1,1-\alpha/2}$ – kwantyl rozkładu t_{n-1}: $\mathtt{qt}(1-\alpha/2,\ n-1)$

Przykład 1 - c.d.

Inżynier mechanik, który zaprojektował urządzenie do fizjoterapii, wybrał do badania 12 pacjentów i sprawdził, ile czasu spędzają korzystając z nowego urządzenia. Otrzymał następujące wyniki (w godzinach):

8; 12; 26; 10; 23; 21; 16; 22; 18; 17; 36; 9.

Zakładając normalność rozkładu czasu użytkowania urządzenia oceń przedziałowo z ufnością 95% średni czas korzystania z urządzenia zaprojektowanego przez inżyniera przez wszystkich pacjentów poddanych terapii.

$$\mathrm{time} = \mathtt{c}(8,\ 12,\ 26,\ 10,\ 23,\ 21,\ 16,\ 22,\ 18,\ 17,\ 36,\ 9)$$

$$n = \mathtt{length}(\mathrm{time}) = 12$$
$$\bar{x} = \mathtt{mean}(\mathrm{time}) = 18{,}17$$
$$s^2 = \mathtt{var}(\mathrm{time}) = 65{,}78788$$

$$1 - \alpha = 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0{,}05 \quad \Rightarrow \quad \alpha/2 = 0{,}025$$

$$t_{n-1,1-\alpha/2} = t_{11;0{,}975} = \mathtt{qt}(0.975, 11) = 2{,}200985$$

Przykład 1 - c.d.

$$\begin{aligned} n &= \texttt{length}(\text{time}) = 12 \\ \overline{x} &= \texttt{mean}(\text{time}) = 18{,}17 \\ s^2 &= \texttt{var}(\text{time}) = 65{,}78788 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1-\alpha &= 0{,}95 \\ t_{n-1,1-\alpha/2} &= 2{,}200985 \end{aligned}$$

$$\overline{x} \mp t_{n-1,1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{s^2}{n}}$$

Przedziały ufności dla μ w R

(1) $X_i \sim N(\mu, \sigma)$, μ - nieznane, σ – znane:

$$\texttt{z.test}(\text{dane}, \texttt{sigma.x} = \sigma, \texttt{conf.level} = 1 - \alpha)$$

(2) nieokreślony rozkład X_i, μ - nieznane, duża próba:

σ – znane

$$\texttt{zsum.test}(\texttt{mean}(\text{dane}), \quad \sigma \quad, n, \texttt{conf.level} = 1 - \alpha)$$

σ – nieznane

$$\texttt{zsum.test}(\texttt{mean}(\text{dane}), \texttt{sd}(\text{dane}), n, \texttt{conf.level} = 1 - \alpha)$$

(3) $X_i \sim N(\mu, \sigma)$, μ - nieznane, σ – nieznane:

$$\texttt{t.test}(\text{dane}, \texttt{conf.level} = 1 - \alpha)$$

UWAGA! Dla przypadku (1) i (2) wymagany jest pakiet `BSDA`

Przykład 1 - c.d.

Inżynier mechanik, który zaprojektował urządzenie do fizjoterapii, wybrał do badania 12 pacjentów i sprawdził, ile czasu spędzają korzystając z nowego urządzenia. Otrzymał następujące wyniki (w godzinach):

8; 12; 26; 10; 23; 21; 16; 22; 18; 17; 36; 9.

Zakładając normalność rozkładu czasu użytkowania urządzenia oceń przedziałowo z ufnością 95% średni czas korzystania z urządzenia zaprojektowanego przez inżyniera przez wszystkich pacjentów poddanych terapii.

```
time = c(8, 12, 26, 10, 23, 21, 16, 22, 18, 17, 36, 9)
meanCI = t.test(time, conf.level = 0.95)
meanCI$conf.int
```

```
[1] 13.01320 23.32013
attr(,"conf.level")
[1] 0.95
```

Estymacja punktowa wariancji

Obserwowana cecha w populacji – zmienna losowa X o rozkładzie z nieznaną wariancją populacyjną σ^2

Parametr: wariancja populacyjna σ^2

Próba: $X_1, X_2, \ldots, X_n$

Estymator σ^2: wariancja z próby, tzn. $S^2 = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\overline{X}^2\right)$

Obserwacje: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Ocena σ^2: s^2

$$\boxed{\hat{\sigma}^2 = s^2}$$

Przykład 1 - c.d.

Inżynier mechanik, który zaprojektował urządzenie do fizjoterapii, wybrał do badania 12 pacjentów i sprawdził, ile czasu spędzają korzystając z nowego urządzenia. Otrzymał następujące wyniki (w godzinach):

8; 12; 26; 10; 23; 21; 16; 22; 18; 17; 36; 9.

Oceń odchylenie standardowe czasu korzystania z urządzenia danego typu przez wszystkich pacjentów poddanych terapii.

$$\text{time} = \texttt{c}(8,\ 12,\ 26,\ 10,\ 23,\ 21,\ 16,\ 22,\ 18,\ 17,\ 36,\ 9)$$

Przedział ufności dla wariancji

Założenie: $X_i \sim N(\mu, \sigma)$, σ - nieznane

Z ufnością $100(1-\alpha)\%$ przedział

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}} \right)$$

pokrywa nieznaną prawdziwą wariancję populacyjną σ^2.

$\chi^2_{n-1,\beta}$ – kwantyle rozkładu χ^2_{n-1}: $\mathtt{qchisq}(\beta, n-1)$

Przedział ufności dla σ^2 w R:

$$\mathtt{sigma.test}(\text{dane}, \mathtt{conf.level} = 1-\alpha)$$

UWAGA! Wymagany pakiet `TeachingDemos`

Przykład 1 - c.d.

Inżynier mechanik, który zaprojektował urządzenie do fizjoterapii, wybrał do badania 12 pacjentów i sprawdził, ile czasu spędzają korzystając z nowego urządzenia. Otrzymał następujące wyniki (w godzinach):

8; 12; 26; 10; 23; 21; 16; 22; 18; 17; 36; 9.

Zakłądając normalność rozkładu czasu użytkowania urządzenia oceń przedziałowo z ufnością 95% wariancję i odchylenie standardowe czasu korzystania z urządzenia danego typu przez wszystkich pacjentów poddanych terapii.

$$\text{time} = \texttt{c}(8, 12, 26, 10, 23, 21, 16, 22, 18, 17, 36, 9)$$

$$n = \texttt{length}(\text{time}) = 12 \qquad 1-\alpha = 0{,}95$$

$$s^2 = \texttt{var}(\text{time}) = 65{,}78788 \qquad \alpha = 0{,}05$$

$$\alpha/2 = 0{,}025$$

$$\begin{aligned} \chi^2_{n-1,1-\alpha/2} &= \chi^2_{11;0{,}975} = \texttt{qchisq}(0.975, 11) = 21{,}92005 \\ \chi^2_{n-1,\alpha/2} &= \chi^2_{11;0{,}025} = \texttt{qchisq}(0.025, 11) = 3{,}815748 \end{aligned}$$

Przykład 1 - c.d.

$$n = \texttt{length}(\text{time}) = 12$$
$$s^2 = \texttt{var}(\text{time}) = 65{,}78788$$

$$1 - \alpha = 0{,}95$$
$$\chi^2_{11;0{,}975} = 21{,}92005$$
$$\chi^2_{11;0{,}025} = 3{,}815748$$

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,1-\alpha/2}}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,\alpha/2}}\right)$$

Przykład 1 - c.d.

```
time = c(8, 12, 26, 10, 23, 21, 16, 22, 18, 17, 36, 9)
install.packages("TeachingDemos")
library(TeachingDemos)
varCI = sigma.test(time, conf.level =0.95)
varCI$conf.int
```

Estymacja punktowa proporcji

Obserwowana cecha w populacji – zmienna losowa X o rozkładzie $\mathrm{bin}(1, p)$ z nieznanym prawd. sukcesu p

Parametr: proporcja populacyjna p

Próba: $X_1, X_2, \ldots, X_n$

Estymator p: proporcja z próby, tzn. $\hat{p} = \frac{T}{n}$
T – liczba „sukcesów" w próbie

Obserwacje: $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Ocena p: $\hat{p}$

Przykład 2

Pewna szkoła chce poznać opinię uczniów o nowym programie nauczania. Aby to zrobić wybrano losowo próbę 150 uczniów i zapytano ich o opinię: 70 uczniów pozytywnie wypowiedziało się w sprawie nowego program nauczania. Wyznacz ocenę proporcji wszystkich uczniów pozytywnie nastawionych do nowego programu nauczania.

Przedział ufności dla proporcji

Założenie: próba <u>duża</u> ($n \geqslant 100$)

Z ufnością $100(1-\alpha)\%$ przedział

$$\left(\widehat{p} - z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}},\ \widehat{p} + z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right)$$

pokrywa <u>nieznaną</u> prawdziwą proporcję <u>populacyjną</u> p.

$z_{1-\alpha/2}$ – kwantyl rozkładu $N(0,1)$: $\texttt{qnorm}(1-\alpha/2)$

Przedział ufności dla p w R:

$\texttt{binom.test}(T, n, \texttt{conf.level} = 1-\alpha)$

$\texttt{prop.test}(T, n, \texttt{conf.level} = 1-\alpha)$ (przybliżony)

Przykład 2 - c.d.

Pewna szkoła chce poznać opinię uczniów o nowym programie nauczania. Aby to zrobić wybrano losowo próbę 150 uczniów i zapytano ich o opinię: 70 uczniów pozytywnie wypowiedziało się w sprawie nowego program nauczania. Przyjmując współczynnik ufności 0,99 oceń przedziałowo proporcję wszystkich uczniów pozytywnie nastawionych do nowego programu nauczania.

$$n = 150, \quad T = 70 \qquad \Rightarrow \quad \widehat{p} = \frac{T}{n} = \frac{7}{15}$$

$$1 - \alpha \ = 0{,}99 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0{,}01 \quad \Rightarrow \quad \alpha/2 = 0{,}005$$

$$z_{1-\alpha/2} = z_{0{,}995} = \texttt{qnorm}(0.995) = 2{,}575829$$

$$\widehat{p} \mp z_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\tfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Przykład 2 - c.d.

$$n = 150, \quad T = 70 \qquad \Rightarrow \qquad \widehat{p} = \frac{T}{n} = \frac{7}{15} = 0{,}4666667$$

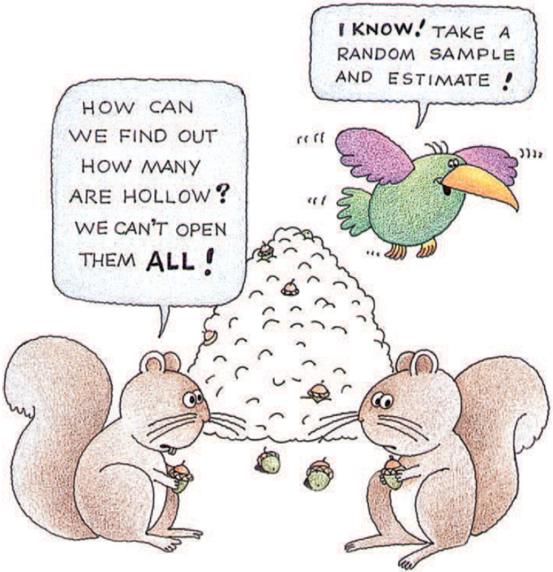
$$1 - \alpha \ = 0{,}99$$

$$\mathrm{propCI} = \mathtt{binom.test}(70,\ 150, \mathtt{conf.level} = 0.99)$$

$$\mathrm{propCI}\mathtt{\$conf.int}$$

Przykład 3

24.12.1991 *New York Times* podał, że 46% Amerykanów jest zadowolonych z polityki ekonomicznej prezydenta Busha, z marginesem błędu $\pm 3\%$. Wiedząc, że media przyjmują zazwyczaj 95% poziom ufności wyjaśnij, co oznacza podany wynik. Czy na podstawie opublikowanych wyników możemy wywnioskować, jak dużą grupę osób zapytano?


HOW CAN WE FIND OUT HOW MANY ARE HOLLOW? WE CAN'T OPEN THEM ALL!
I KNOW! TAKE A RANDOM SAMPLE AND ESTIMATE!