

AiRA II, w.4

Regulatory, PI

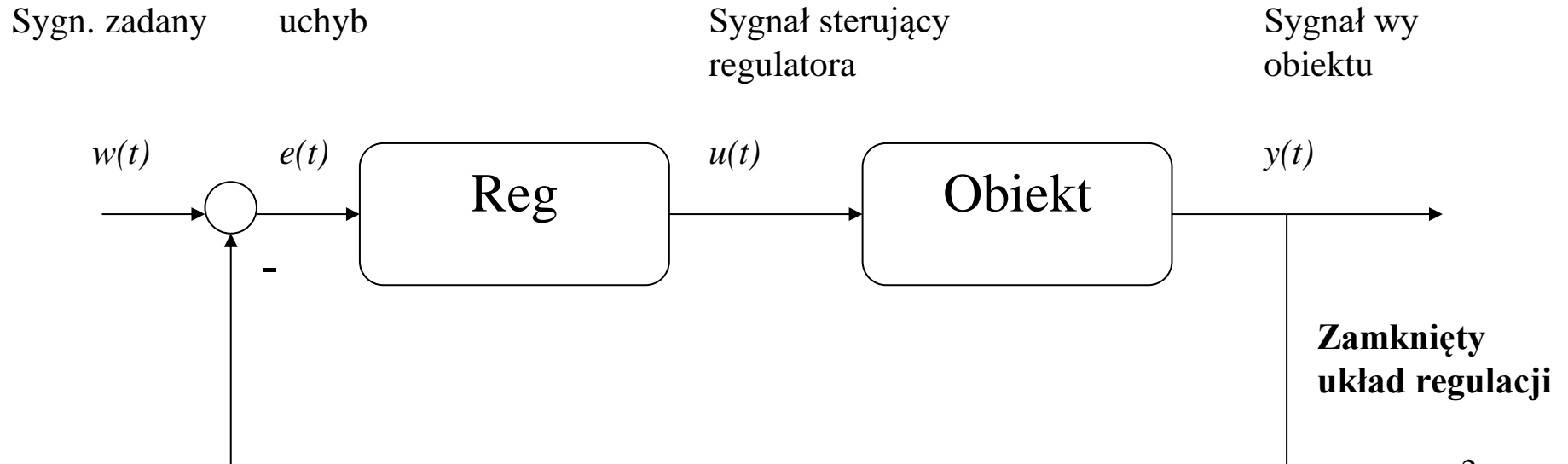
- Sterowanie w układzie otwartym / zamkniętym
- Obiekt astatyczny
- Struktura układu regulacji z regulatorem PI

Struktura układu regulacji

$u(t)$
Sygnał sterujący

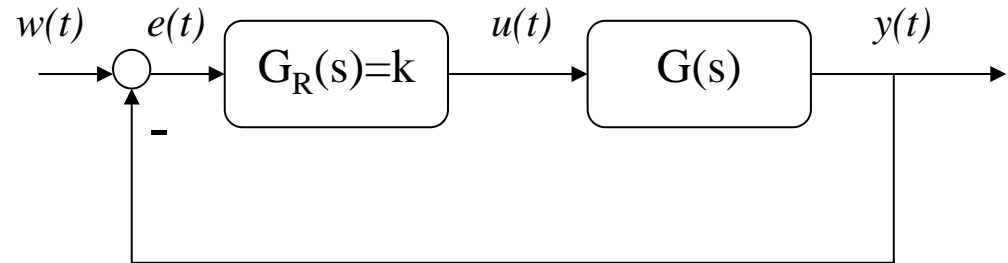
$y(t)$
Sygnał wy
obektu

**Otwarty układ
sterowania**

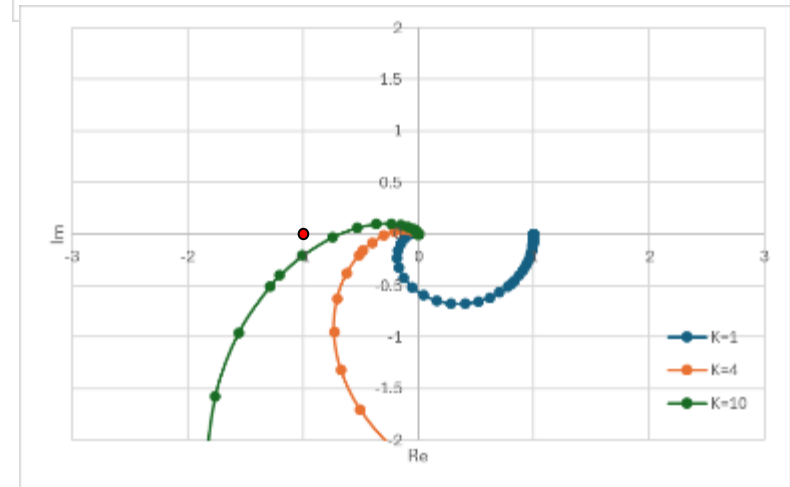
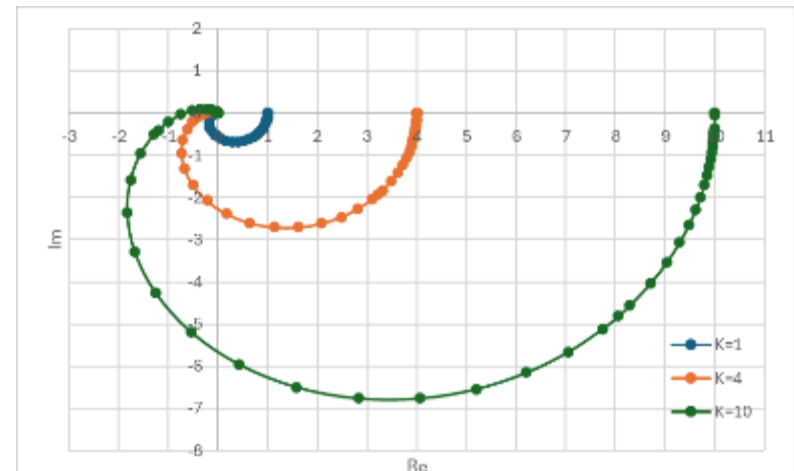
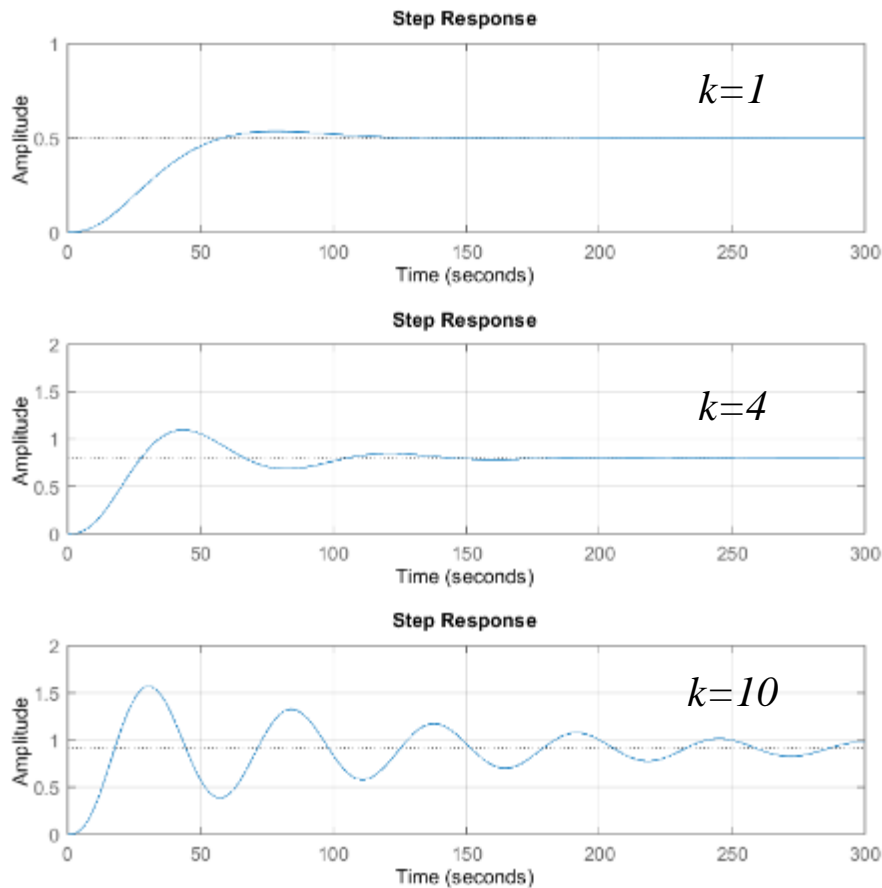


Układ z regulatorem proporcjonalnym

$$G(s) = \frac{1}{(30s + 1)(20s + 1)(5s + 1)}$$

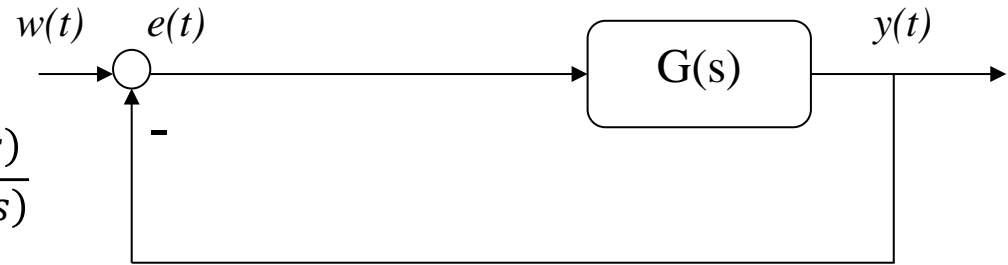


Odpowiedzi na skok jednostkowy



Obiekt astatyczny w układzie regulacji

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{L(s)}{M(s)}$$



Transmitancja uchybowa układu zamkniętego:

$$G_E(s) = \frac{1}{1 + G(s)} = \frac{1}{1 + \frac{L(s)}{M(s)}} = \frac{M(s)}{L(s) + M(s)}$$

Badanie uchybu ustalonego dla wymuszenia jednostkowego

$$X(s) = \frac{1}{s}$$

Uchyb ustalony:

$$e_{ust} = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{s} G_E(s) \right) = \frac{M(0)}{L(0) + M(0)} = \frac{a_0}{b_0 + a_0}$$

W obiekcie astatycznym jest:

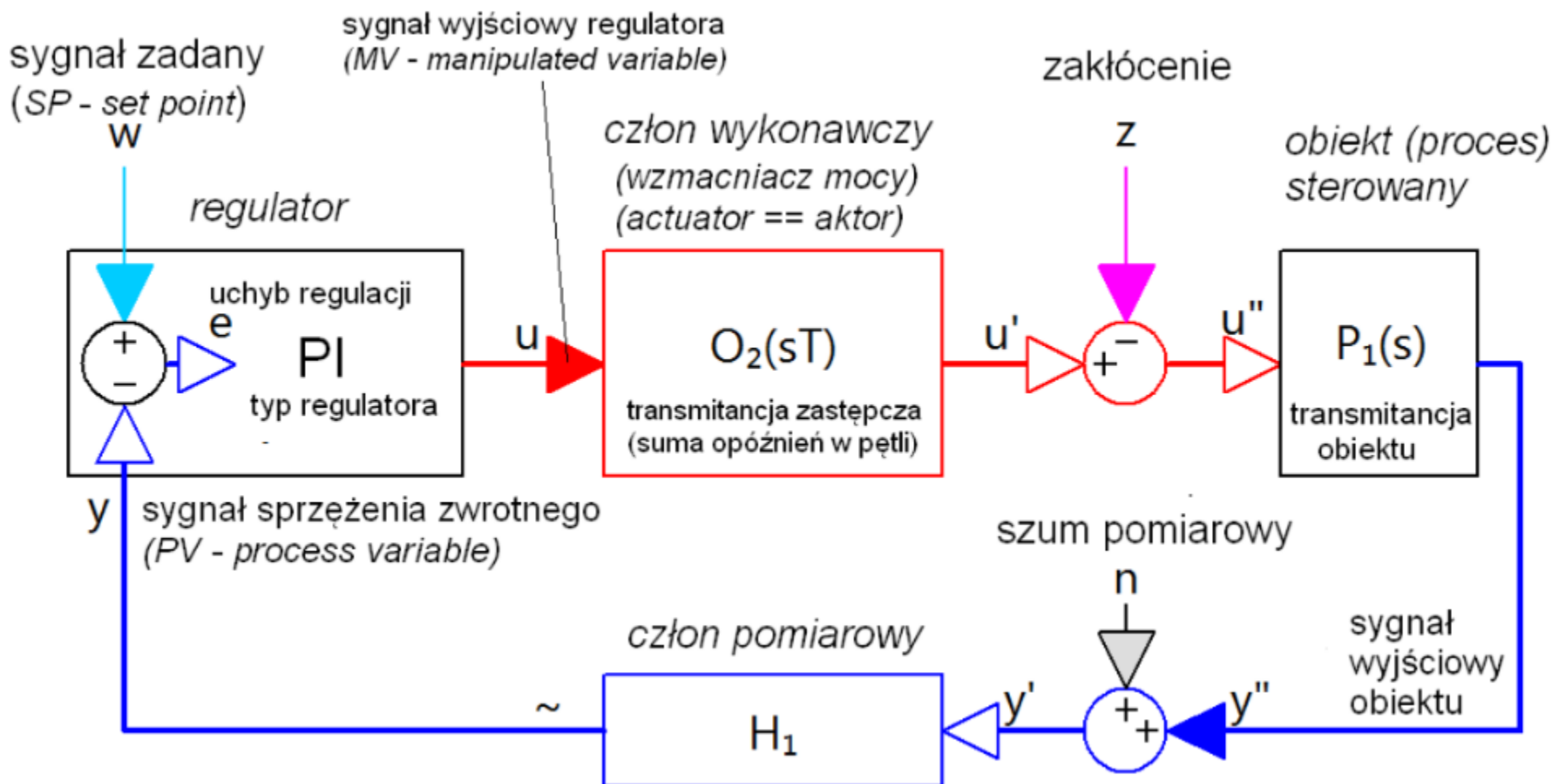
(ob astatyczny 1. rzędu)

$$G(s) = \frac{L(s)}{s \cdot M(s)}$$

$$G_E(s) = \frac{s \cdot M(s)}{L(s) + s \cdot M(s)}$$

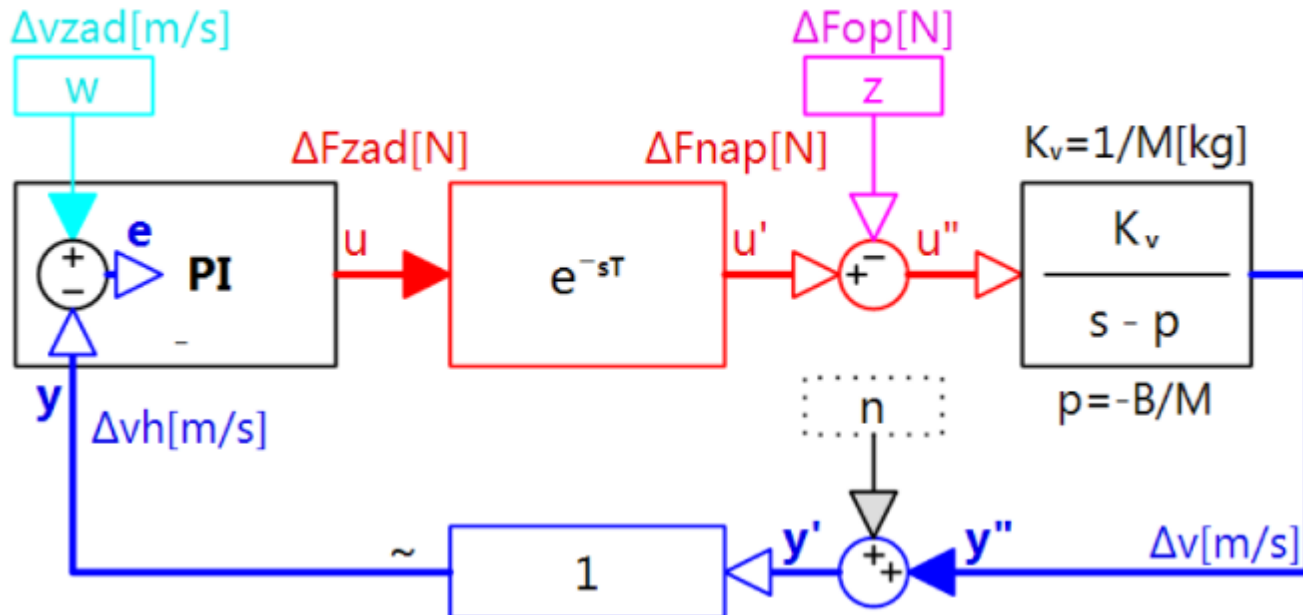
$$e_{ust} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{s} G_E(s) \right) = \frac{0 \cdot M(0)}{L(0) + 0 \cdot M(0)} = 0$$

Struktura układu regulacji



Przykład układu regulacji

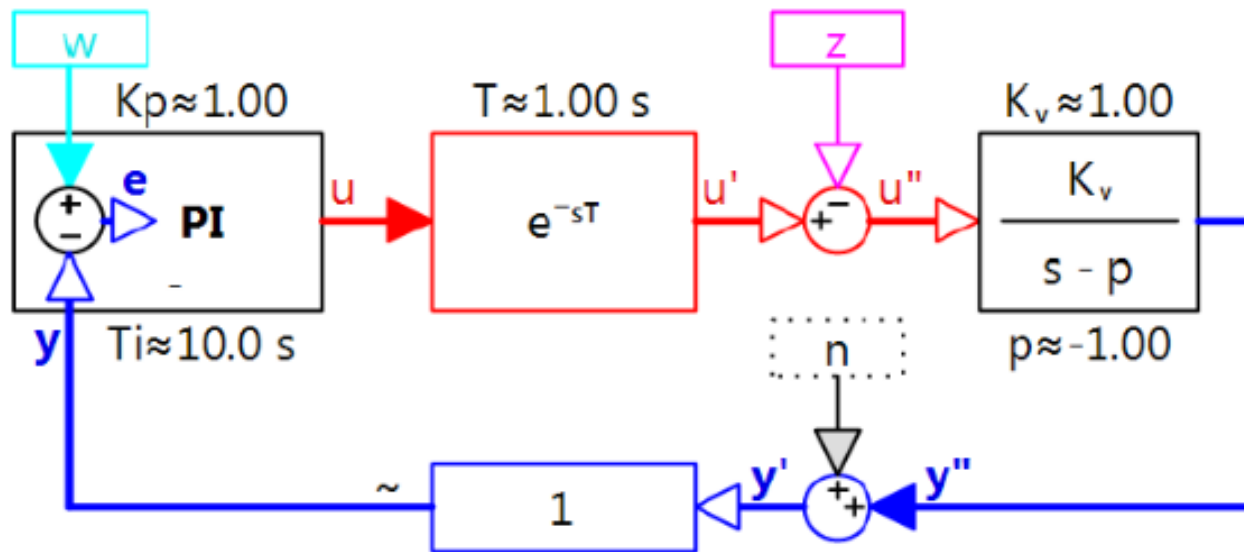
Regulacja prędkości liniowej $v(t)=v(0)+\Delta v(t)$



<i>symbol</i>	<i>nazwa</i>	<i>(jednostka miary)</i>
K_v	wzmocnienie całkowite obiektu *)	($[K_v] = [y] / [u] / 1s$)
T	sumaryczne zastępcze opóźnienie w pętli reg.	($[T] = 1s$)
K_p	wzmocnienie proporcjonalne regulatora	($[K_p] = [u] / [y]$)
T_i	stała czasowa (czas zdwojenia) regulatora PI	($[T_i] = 1s$)
K_i	wzmocnienie całkowite regulatora $K_i = K_p / T_i$	($[K_i] = [u] / [y] / 1s$)
p	biegun obiektu inercyjnego	($[p] = \text{rad} / s$)

*) łącznie z członami: wykonawczym i pomiarowym

Uproszczony schemat układu regulacji



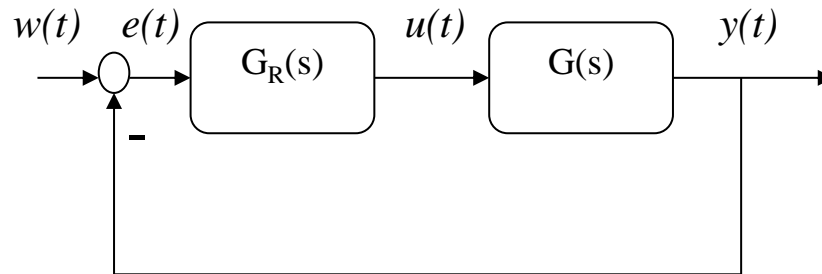
Przyjęte założenia upraszczające:

- Obiekt jest liniowy pierwszego rzędu (inercyjny lub całkujący)
- Człon wykonawczy i pomiarowy mają wzmocnienia statyczne równe jedności
- Dynamika członów wykonawczego i pomiarowego jest reprezentowana zastępczo przez sumaryczne opóźnienie ulokowane w bloku wykonawczym

Uwagi:

- Biegun transmitancji obiektu inercyjnego ($p < 0$) ma niewielki wpływ na dobór wzmocnienia K_p regulatora ; często można ten wpływ pominąć, sprowadzając obiekt do członu całkującego ($p = 0$)

Transmitancja regulatora PI



$$u(t) = K_P \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau \right)$$

$$G_R(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) = K_P + \frac{K_i}{s}$$

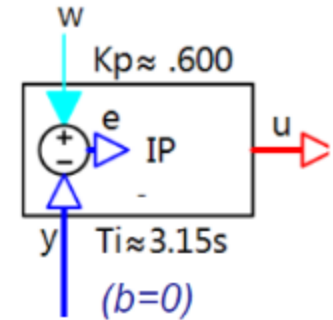
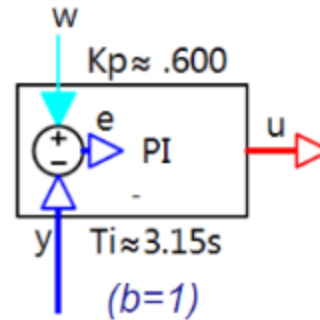
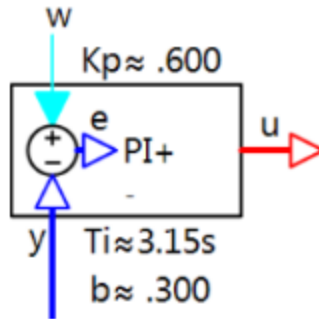
Wykresy:

Odpowiedź skokowa

Wykres na płaszczyzn. amplitudowo-fazowej

- K_p – wzmacnienie proporcjonalne
- T_i – czas zdwojenia regulatora
- K_i – wzmacnienie całkowite

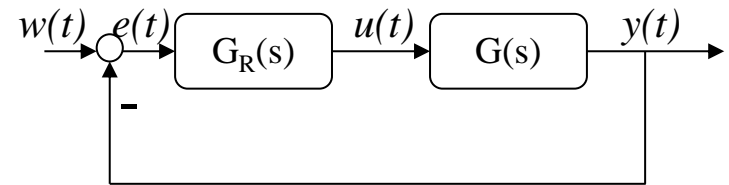
Wzory na sygnał wyjściowy regulatora PI+



$$u = K_P \left(b \cdot w - y + \frac{w - y}{sT_i} \right)$$

$$u = K_P(b \cdot w - y) + K_i \frac{w - y}{s}$$

$$K_i = \frac{K_P}{T_i}$$



- K_p – wzmacnienie proporcjonalne
 T_i – czas zdwojenia regulatora
 K_i – wzmacnienie całkowite
 b – współczynnik wagi dla sygnału w torze proporcjonalnym

Uwagi:

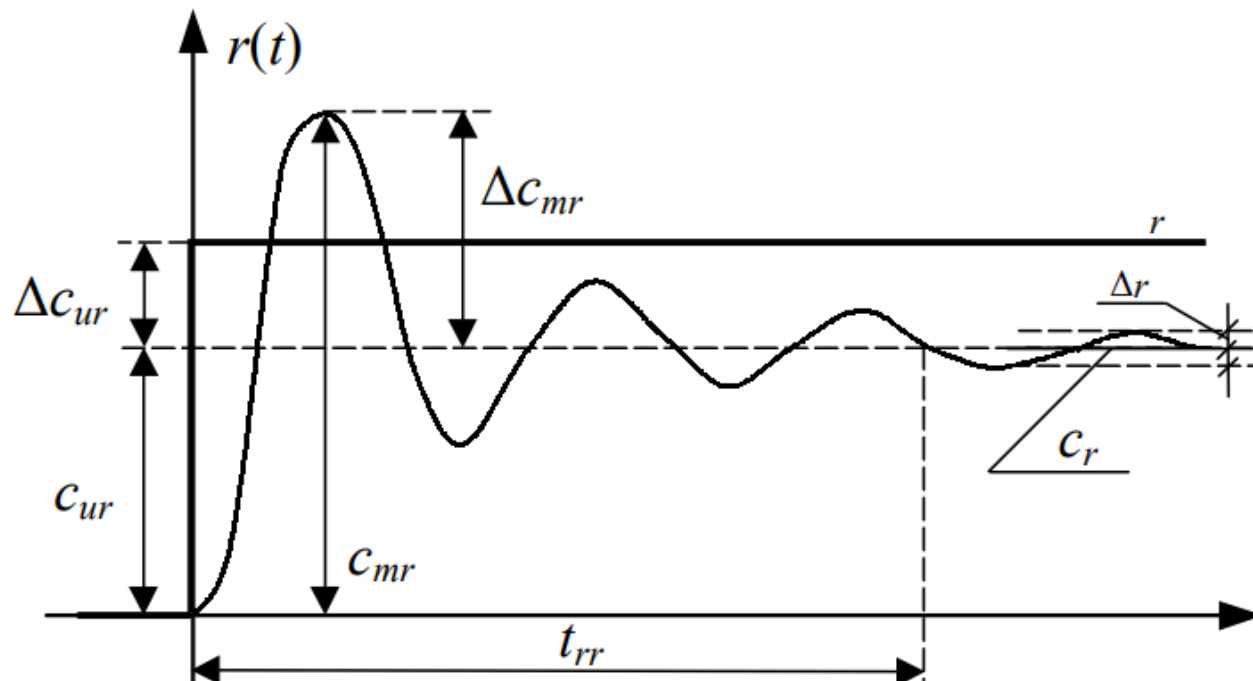
- W klasycznym regulatorze PI współczynnik wagi $b = 1$, co pozwala wyrazić sygnał wyjściowy u w funkcji uchybu regulacji $e = w - y$
- Współczynnik b nie ma znaczenia dla stabilności układu i jego reakcji na zakłócenia z, n

Dobór nastaw regulatora w liniowym zakresie pracy

Cele regulacji:

1. **Likwidacja uchybu w stanie ustalonym** (zapewniona w każdym układzie regulacji PI)
2. **Wysoka dynamika procesu regulacji** (szybkość likwidacji uchybu mierzona różnymi wskaźnikami jakości regulacji)
3. **Odporność na zmiany parametrów układu** (gwarancja stabilnej pracy w różnych warunkach, najprostszymi miarami odporności są marginesy stabilności: GM, PM, DM)

Cele 2 i 3 są wzajemnie sprzeczne i wymagają kompromisu w doborze nastaw regulatora.



Dobór nastaw regulatora w liniowym zakresie pracy

Cele regulacji:

1. **Likwidacja uchybu w stanie ustalonym** (zapewniona w każdym układzie regulacji PI)
2. **Wysoka dynamika procesu regulacji** (szybkość likwidacji uchybu mierzona różnymi wskaźnikami jakości regulacji)
3. **Odporność na zmiany parametrów układu** (gwarancja stabilnej pracy w różnych warunkach, najprostszymi miarami odporności są marginesy stabilności: GM, PM, DM)

Cele 2 i 3 są wzajemnie sprzeczne i wymagają kompromisu w doborze nastaw regulatora.

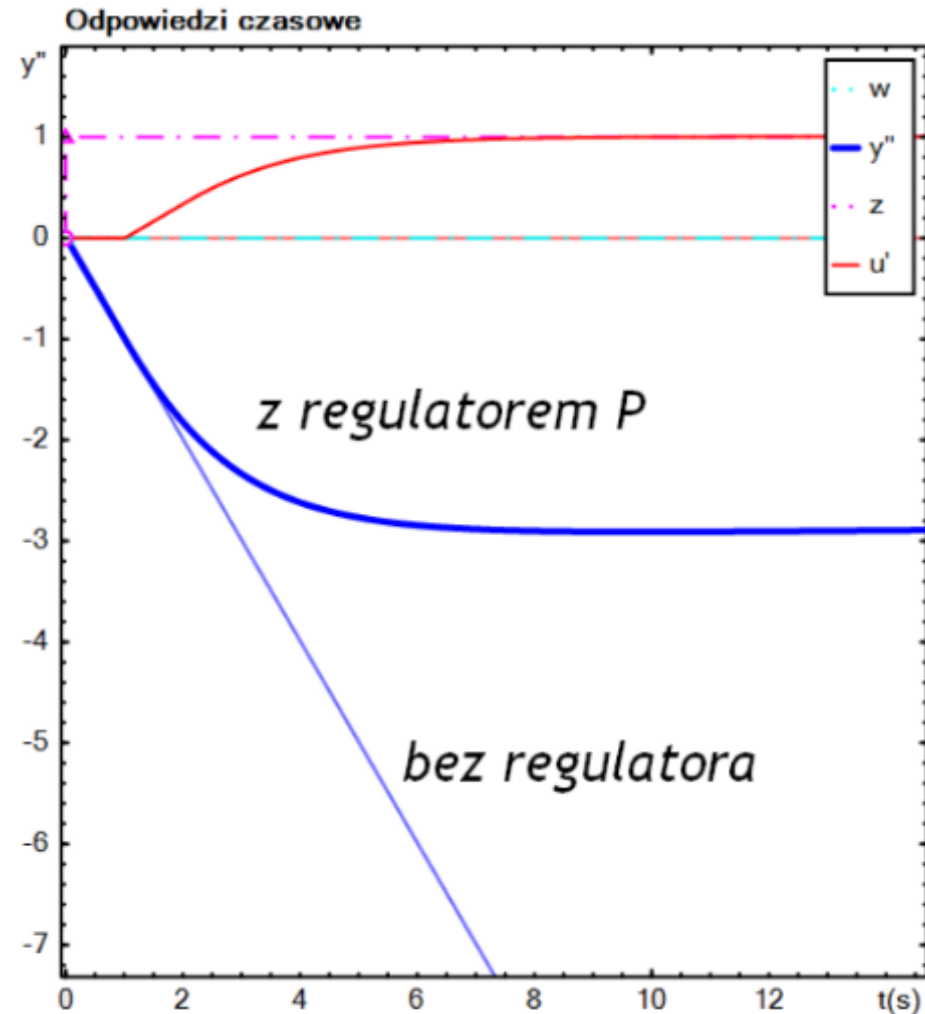
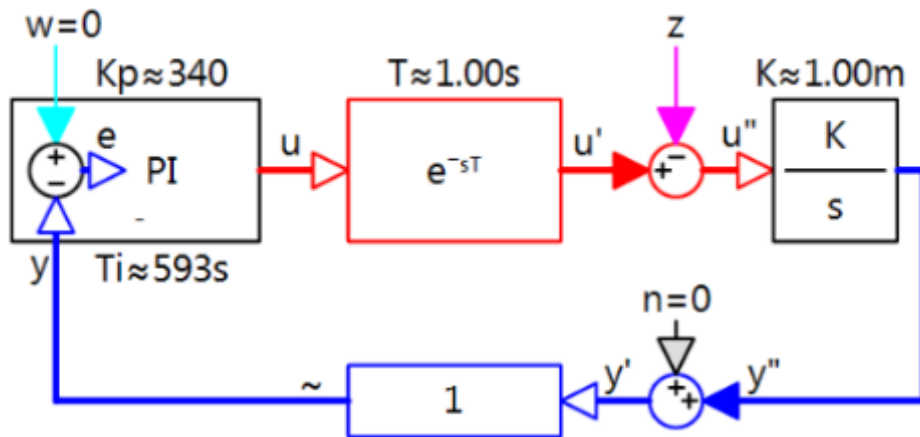
Eksperymentalny dobór nastaw K_p , K_i

przy skokowych zmianach sygnałów zakłócających: $z(t)$ na wejściu obiektu lub na wejściu członu wykonawczego

1. Zwiększać wzmocnienie K_p ($K_i \approx 0, T_i \approx \infty$) aż do pojawienia się śladów oscylacji w przebiegach przejściowych
2. Zmniejszać T_i (zwiększać K_i) przy $K_p = \text{const}$, aż osiągnie się zadowalającą szybkość likwidacji uchybu
3. Jeżeli odporność na zmiany parametrów obiektu jest zbyt niska – zmniejszyć K_p i zwiększyć T_i
4. Do poprawy jakości regulacji przy zmianach sygnału $w(t)$ wykorzystać współczynnik wagi b (cz.2. wykładu)

Dobór nastaw regulatora w liniowym zakresie pracy (3)

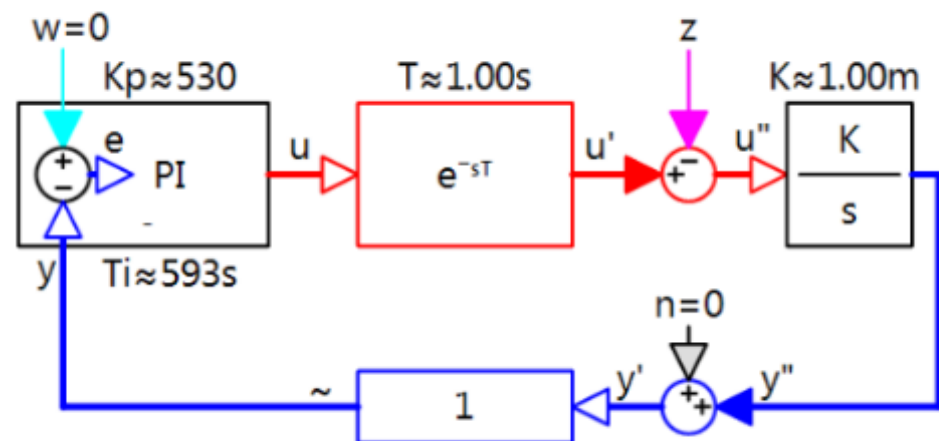
$GM \approx 4.62$ $PM \approx 70.1^\circ$ $DM \approx 3.59s$



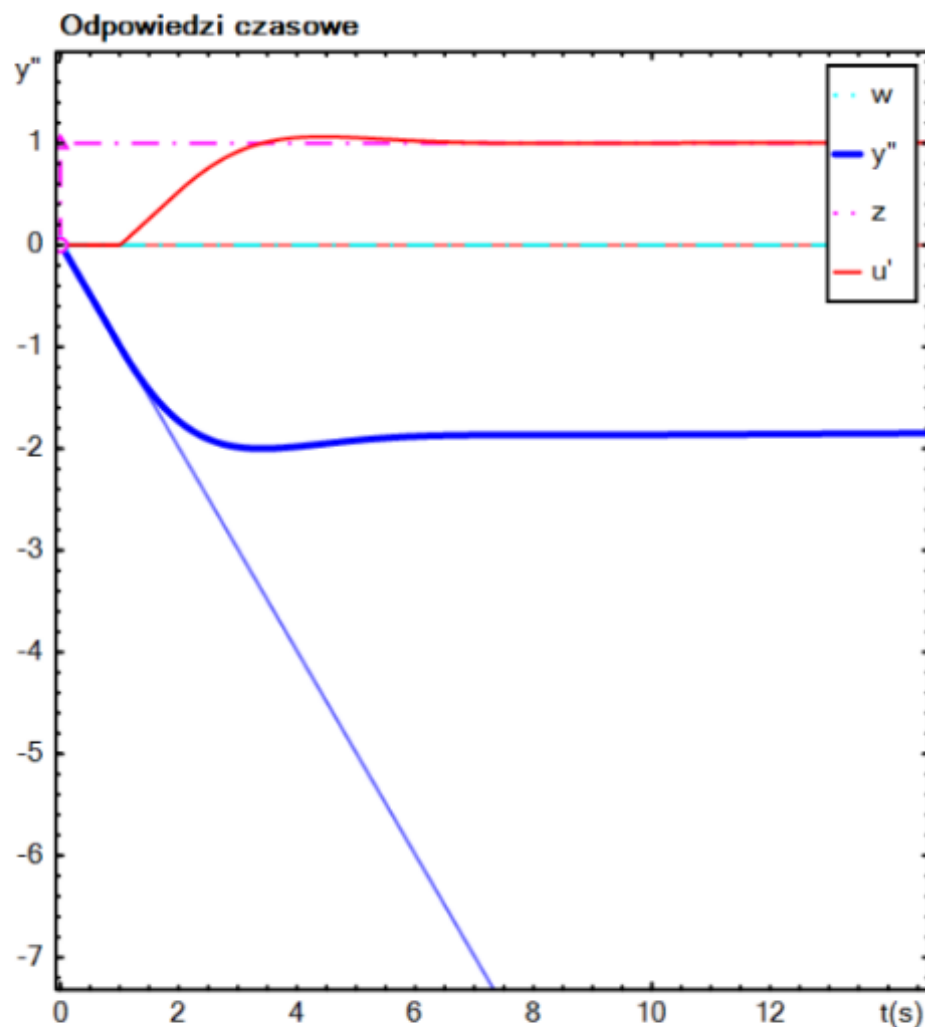
Reakcja sygnału wyjściowego na skokową zmianę zakłócenia

Dobór nastaw regulatora w liniowym zakresie pracy (4)

$GM \approx 2.96$ $PM \approx 59.4^\circ$ $DM \approx 1.95s$



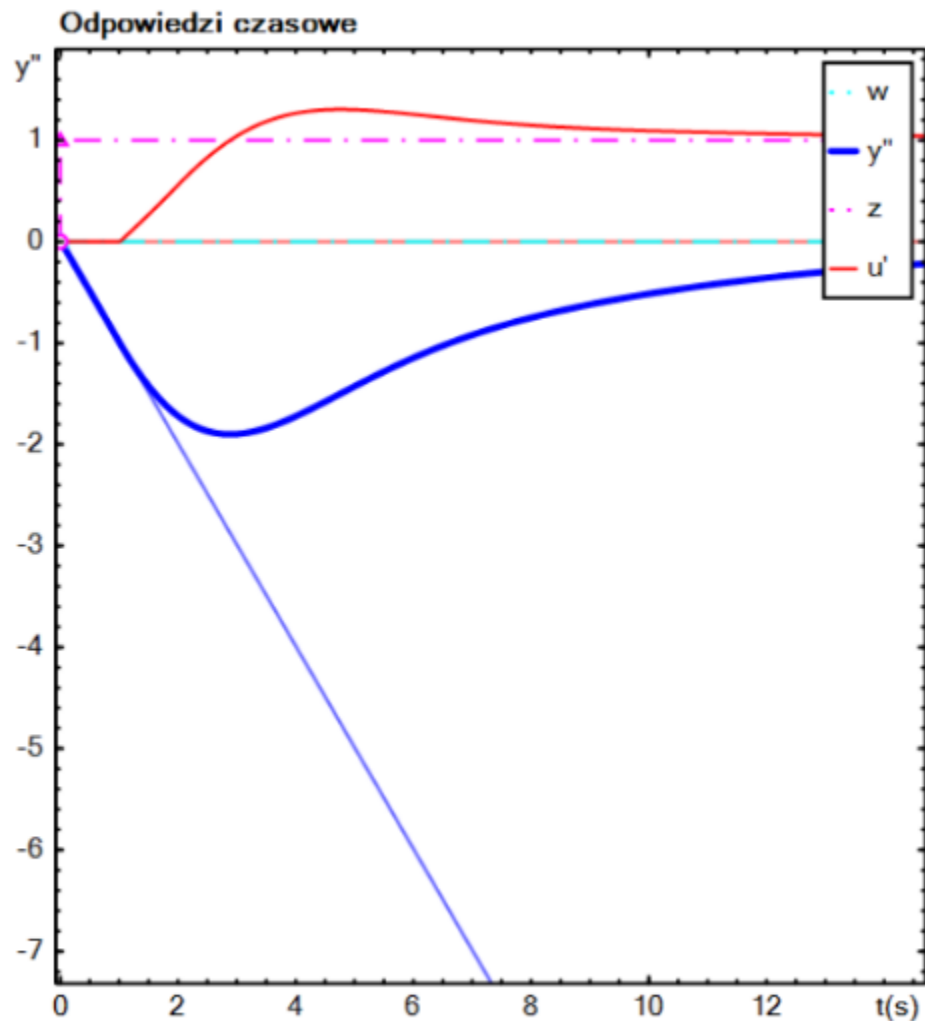
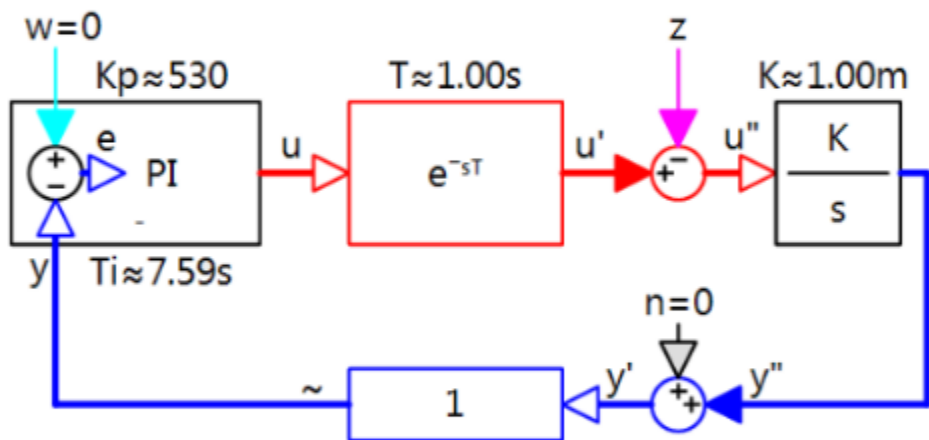
Zwiększenie K_p : 340 \rightarrow 530



Większe $K_p \rightarrow$ mniejszy uchyb ustalony, ale już widoczny ślad oscylacji

Dobór nastaw regulatora w liniowym zakresie pracy (5)

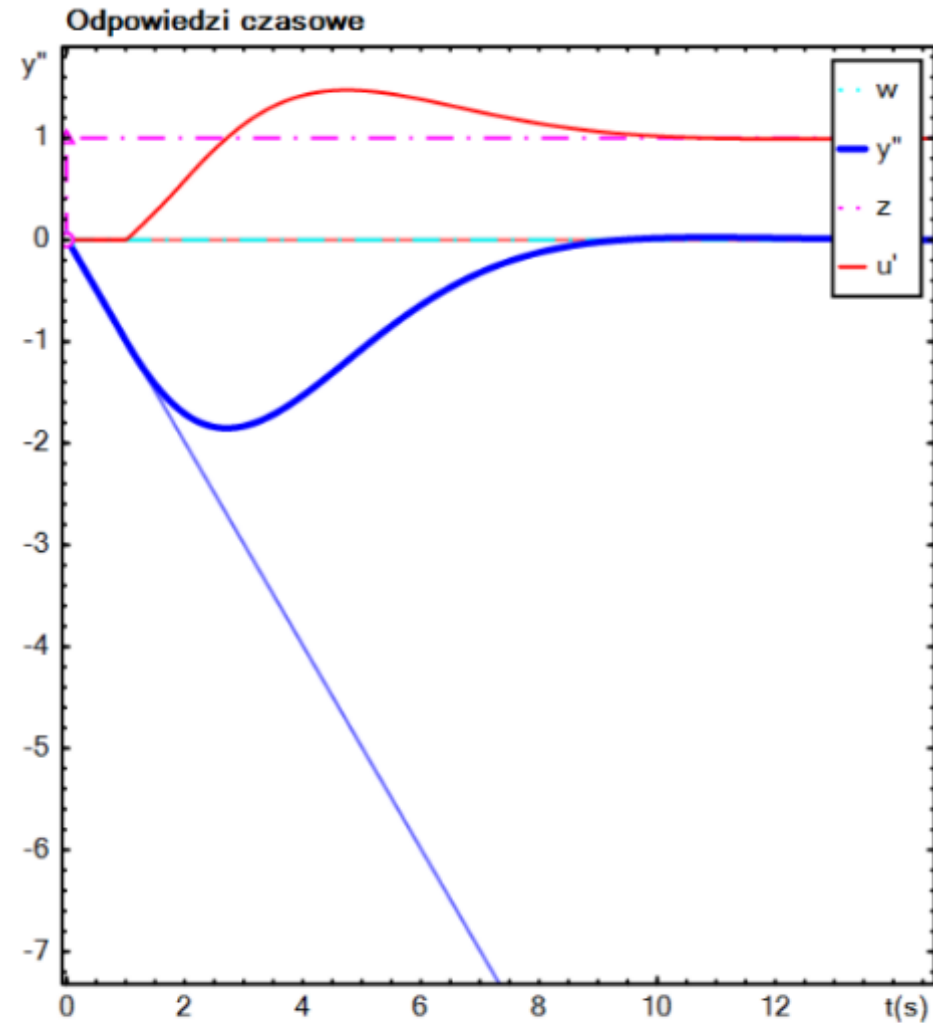
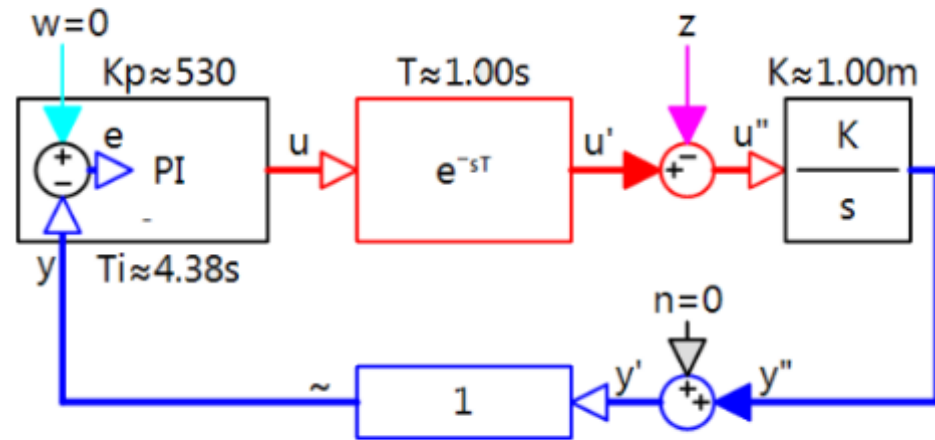
$GM \approx 2.78$ $PM \approx 45.1^\circ$ $DM \approx 1.44s$



Zmniejszanie T_i skraca czas likwidacji uchybu

Dobór nastaw regulatora w liniowym zakresie pracy (6)

$GM \approx 2.62$ $PM \approx 35.4^\circ$ $DM \approx 1.08s$



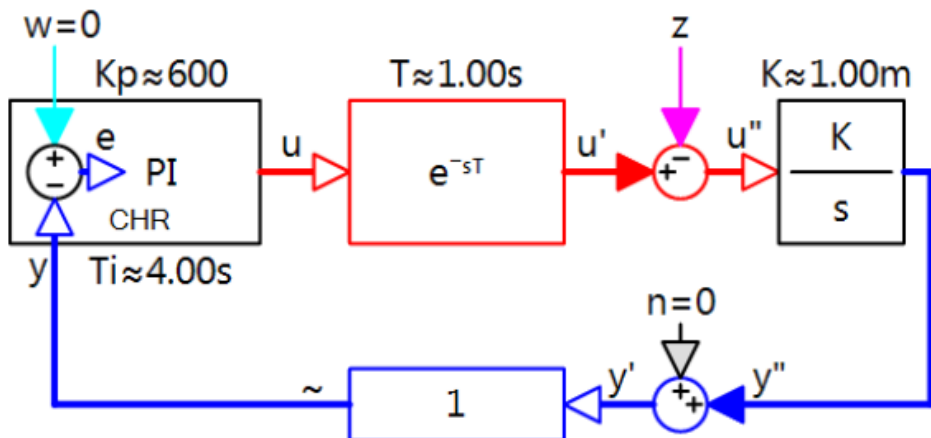
Nastawy K_p , T_i dające szybką, ale bezoscylacyjną likwidację uchybu

Dobór nastaw regulatora w liniowym zakresie pracy (7)

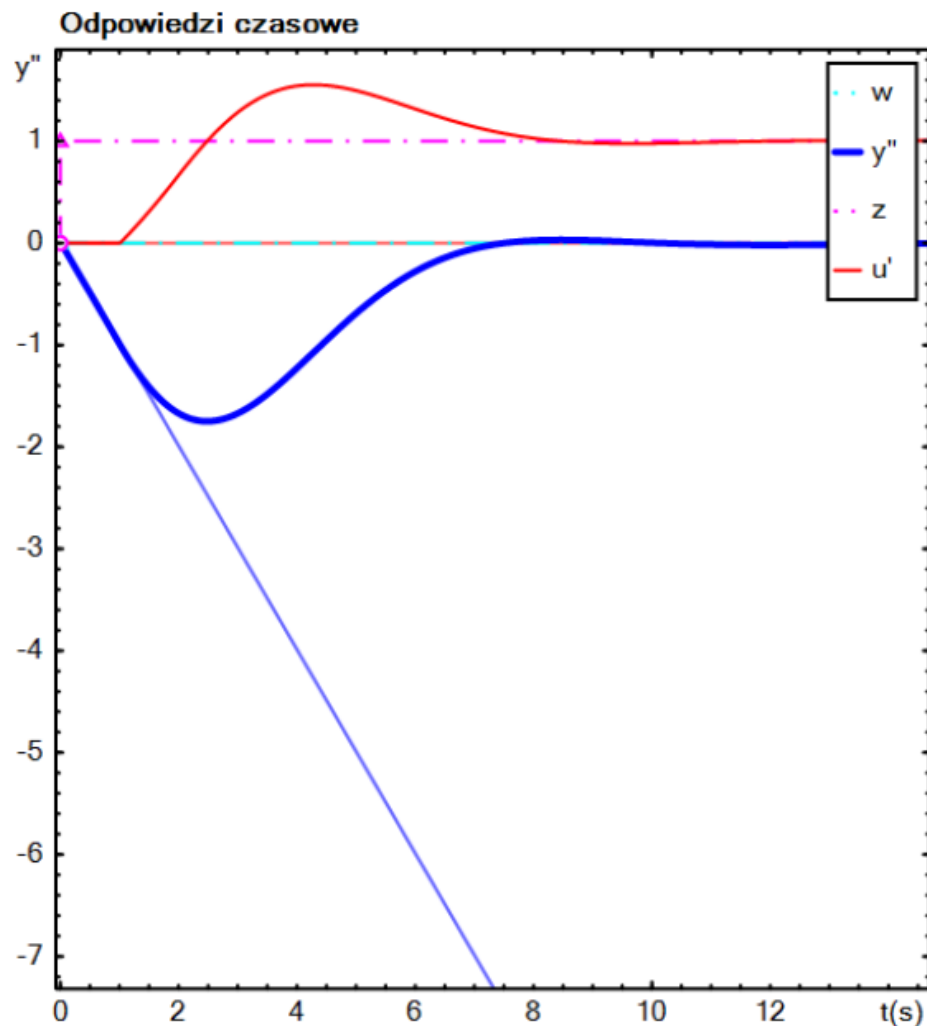
Dobór nastaw wg wzorów CHR (Chien-Hrones-Reswick)

$GM \approx 2.28$ $PM \approx 31.8^\circ$ $DM \approx .861s$

CHR: $K_p = 0.6/K_v/T$ $T_i = 4 \cdot T$

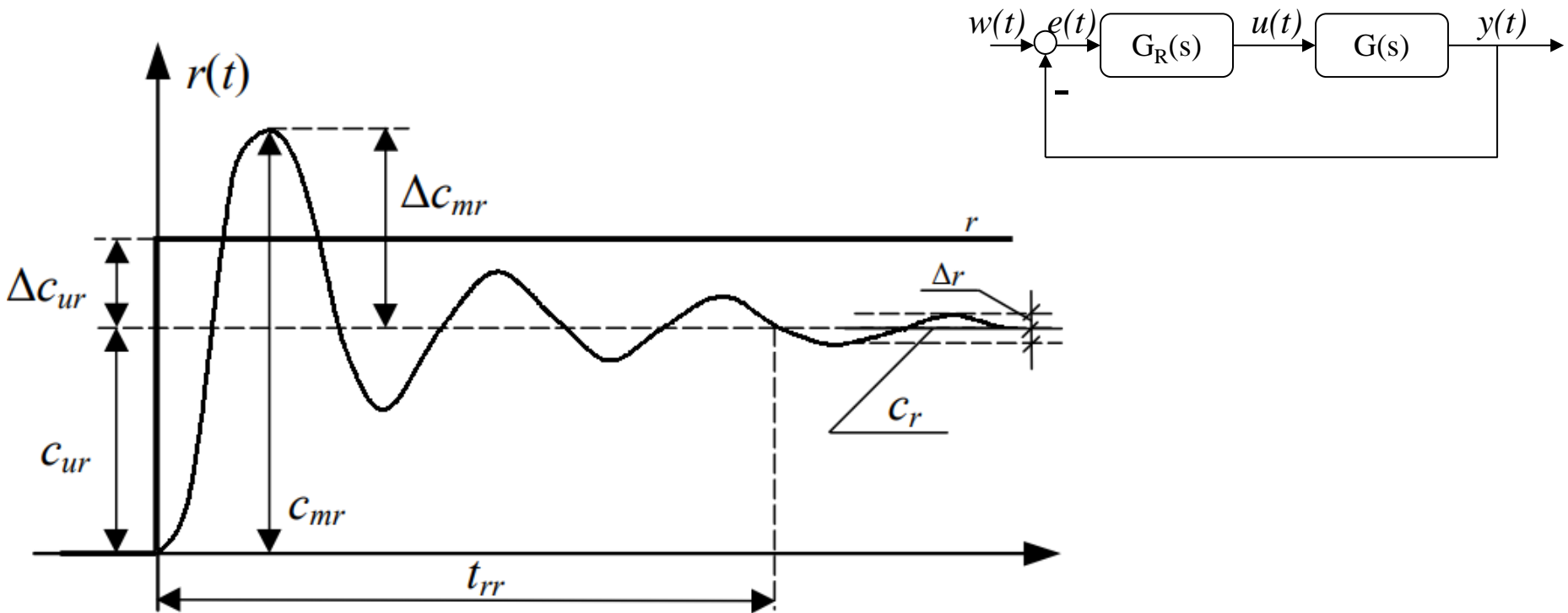


CHR: $K_p = 0.6 / K_v / T$ $T_i = 4 \cdot T$



Jeszcze szybsza likwidacja uchybu, z ledwo zauważalnym śladem oscylacji !

Wskaźniki przebiegu regulacji



Podstawowe wskaźniki jakości regulacji:

- c_{ur} – wartość ustalona odpowiedzi
- Δc_{ur} – błąd statyczny
- Δc_{mr} – przeregulowanie w stosunku do wartości ustalonej odpowiedzi
- t_{rr} – czas regulacji, po upływie którego wartość odpowiedzi nie różni się więcej niż pewien margines od odpowiedzi ustalonej. Margines wynosi 3 – 5% c_{ur}

Wskaźniki jakości regulacji związane z zakłóceniem

Wskaźniki całkowe: IAE , $ITAE$, $ISTAE$

$$IAE = \int |e(t)| dt \quad \text{Integrated Absolute Error}$$

$$ITAE = \int t |e(t)| dt \quad \text{Integrated Time Absolute Error}$$

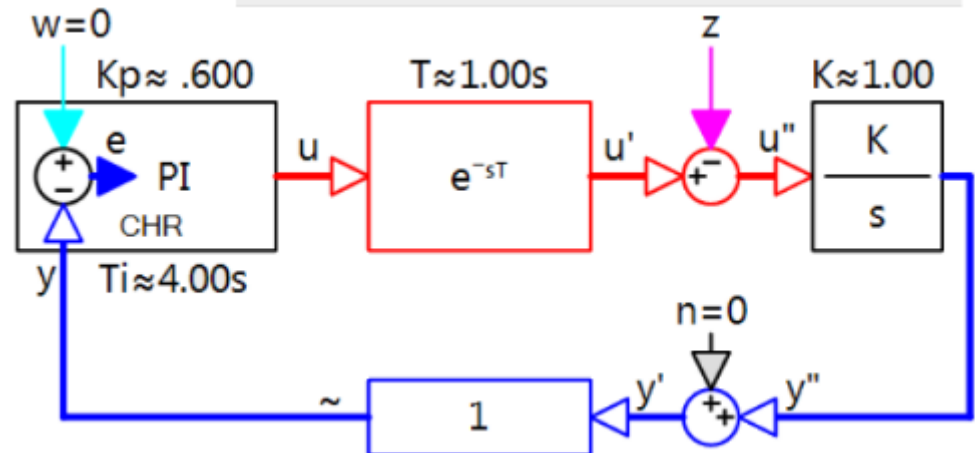
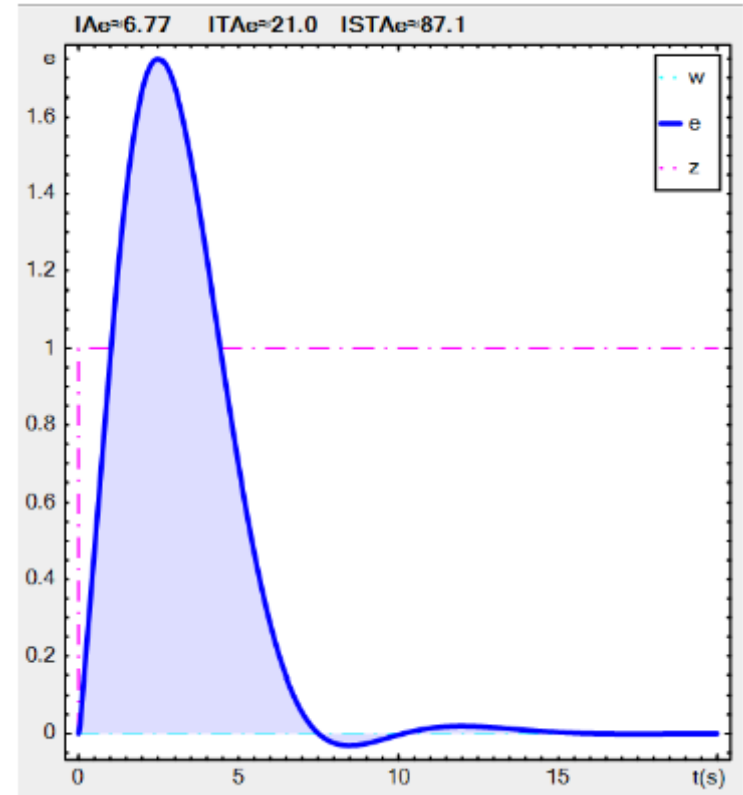
$$ISTAE = \int t^2 |e(t)| dt \quad \text{Integrated Squared Time Absolute Error}$$

dla nastaw CHR :

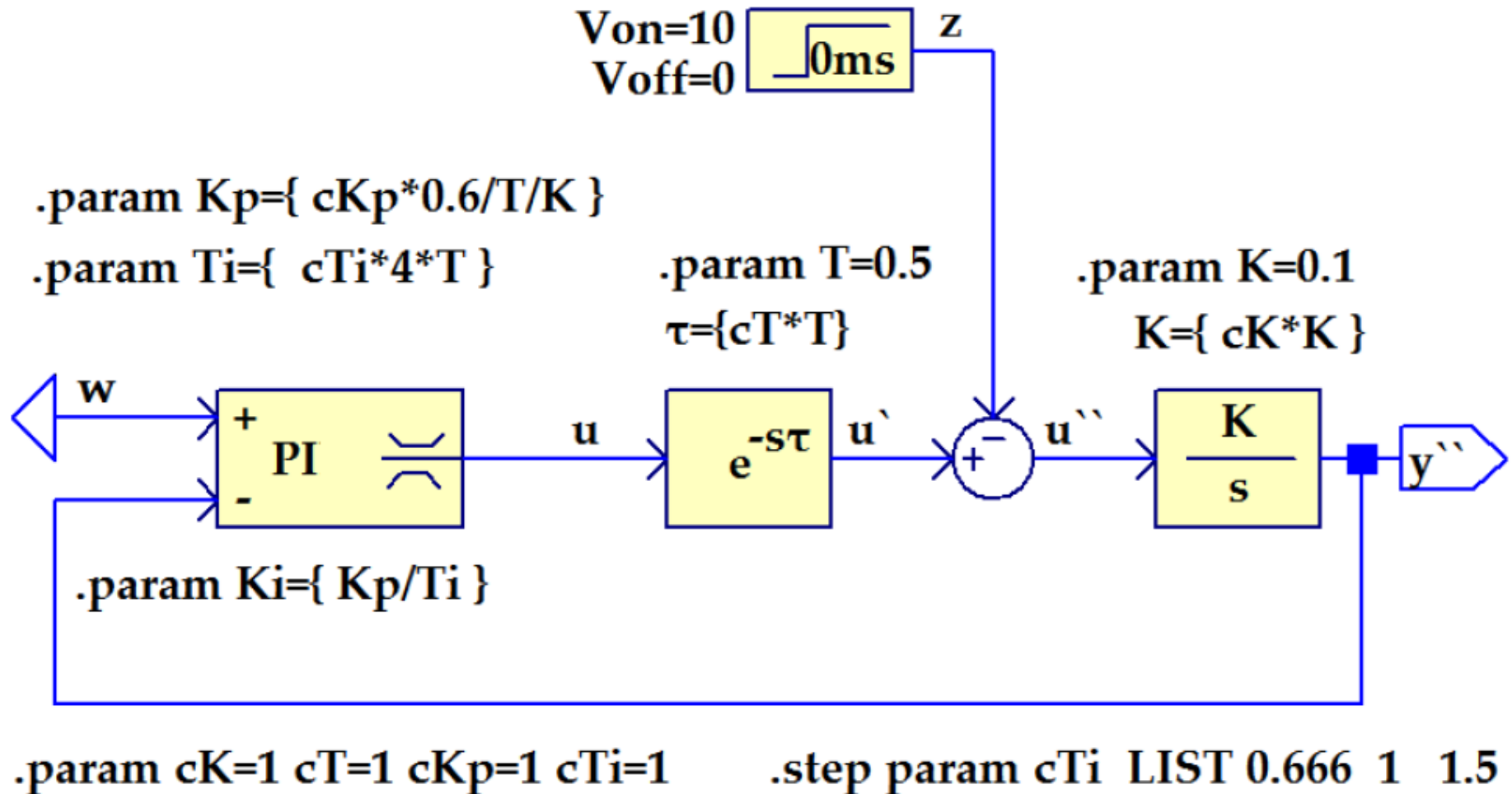
$$IAE \approx 7 \cdot \Delta z \cdot K_v \cdot T^2$$

$$ITAE \approx 25 \cdot \Delta z \cdot K_v \cdot T^3$$

$$ISTAE \approx 90 \cdot \Delta z \cdot K_v \cdot T^4$$



Wpływ zmian parametrów na jakość regulacji (1)



Zmienne parametry:

Regulatora: Kp , Ti

czł. opóźniającego: τ

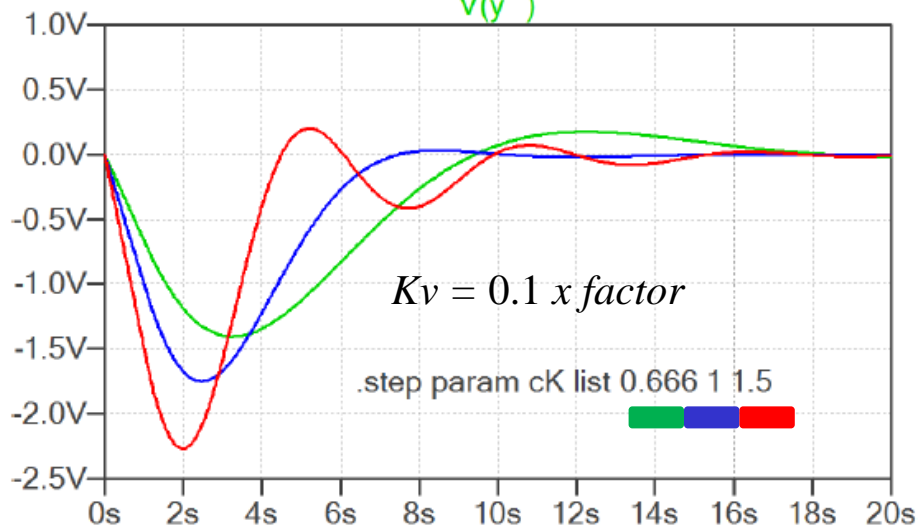
obiektu: Kv

Wpływ zmian parametrów na jakość regulacji (2)

$$K_v = \text{var}$$

Wzmocn. całkowite obiektu

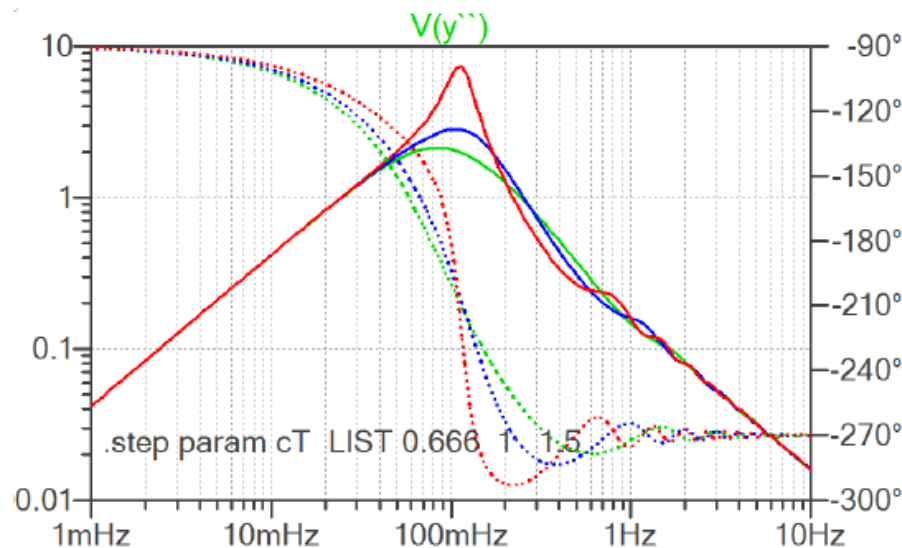
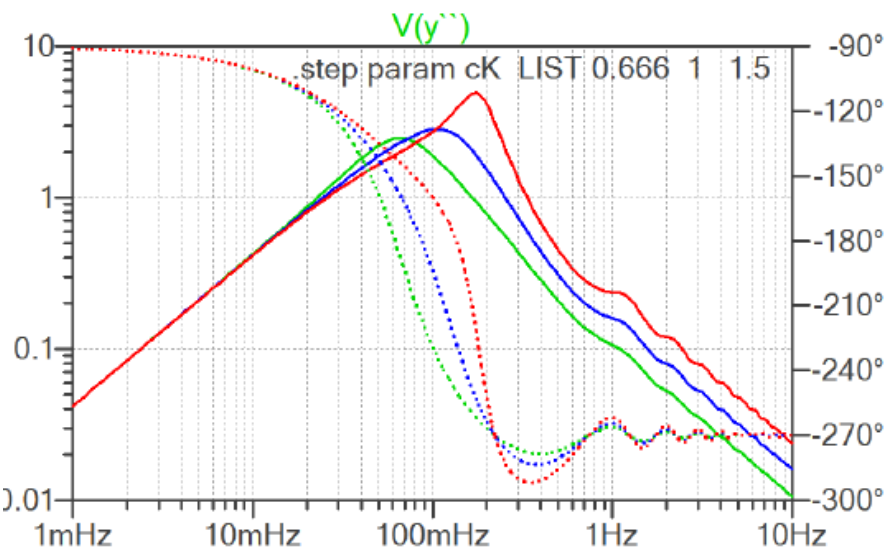
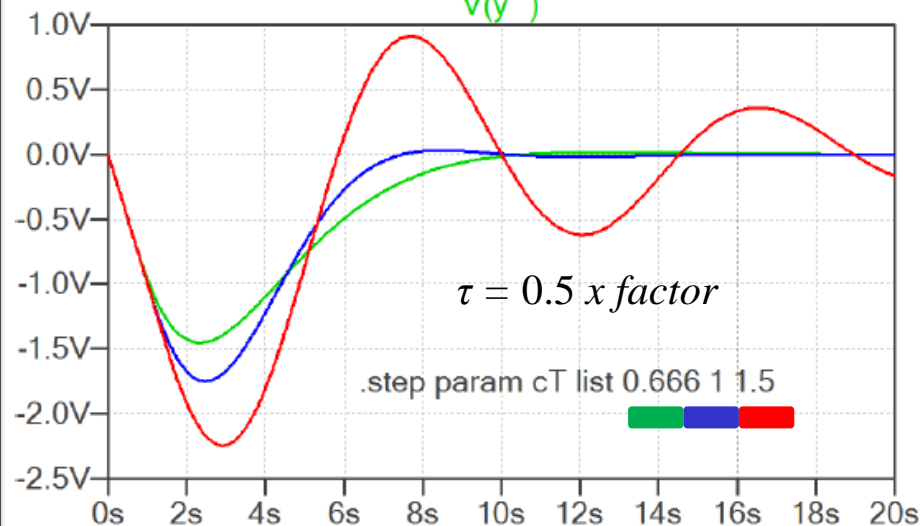
$V(y'')$



$$\tau = \text{var}$$

Czas opóźnienia

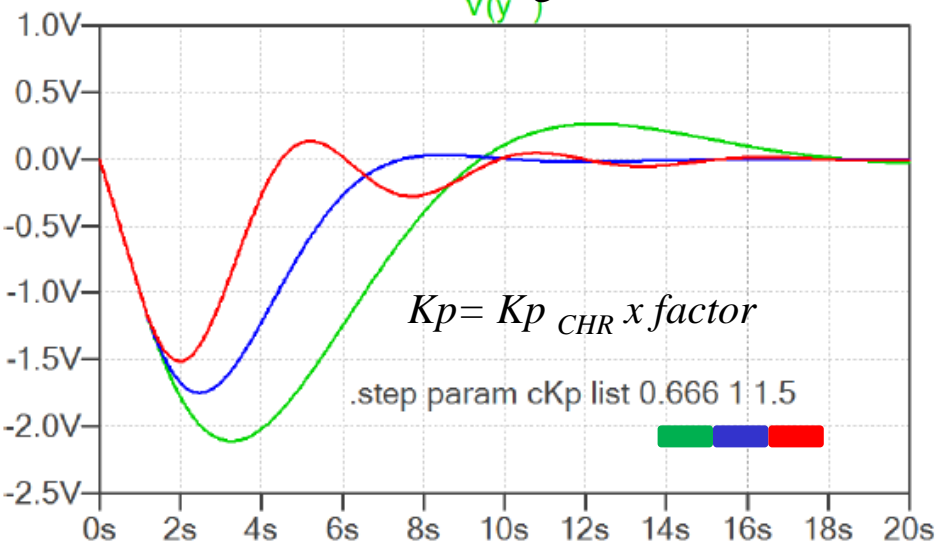
$V(y'')$



Wpływ zmian parametrów na jakość regulacji (2)

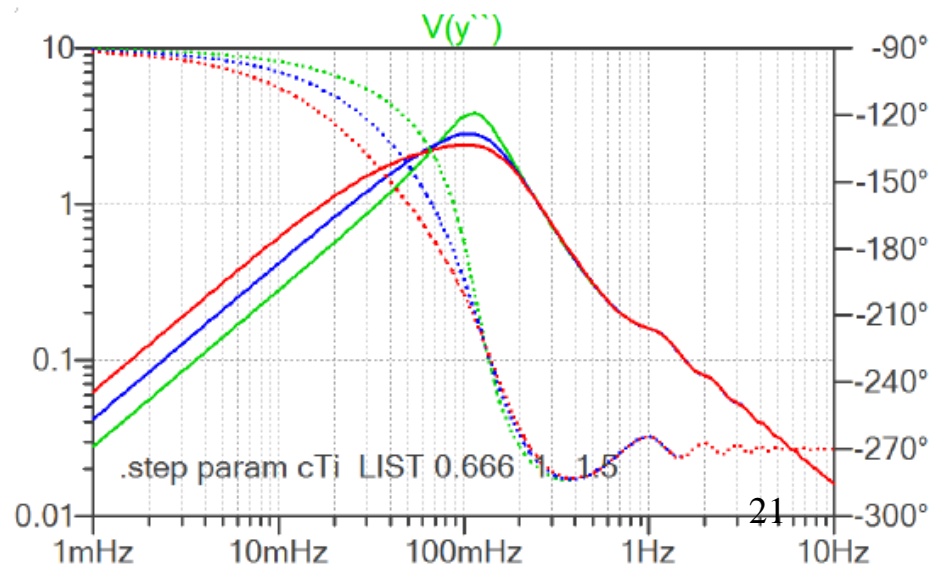
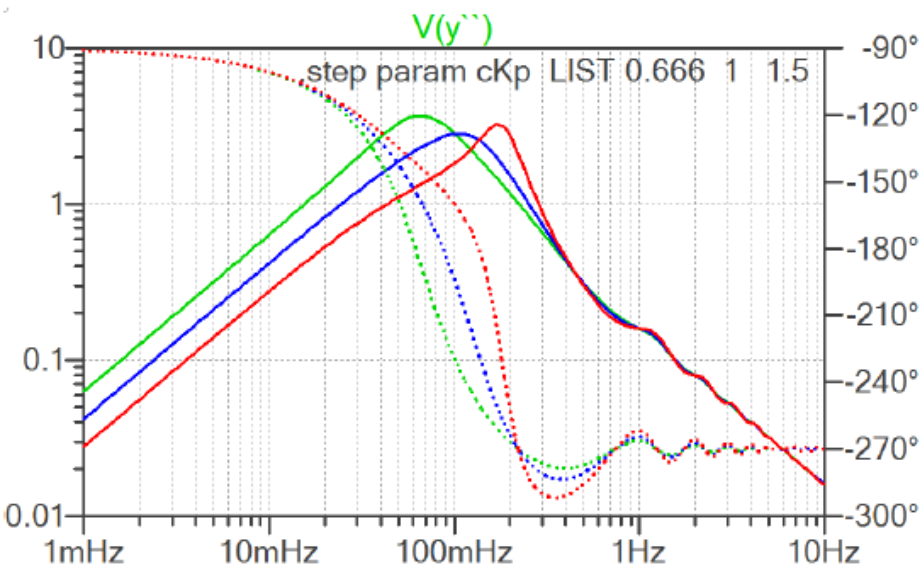
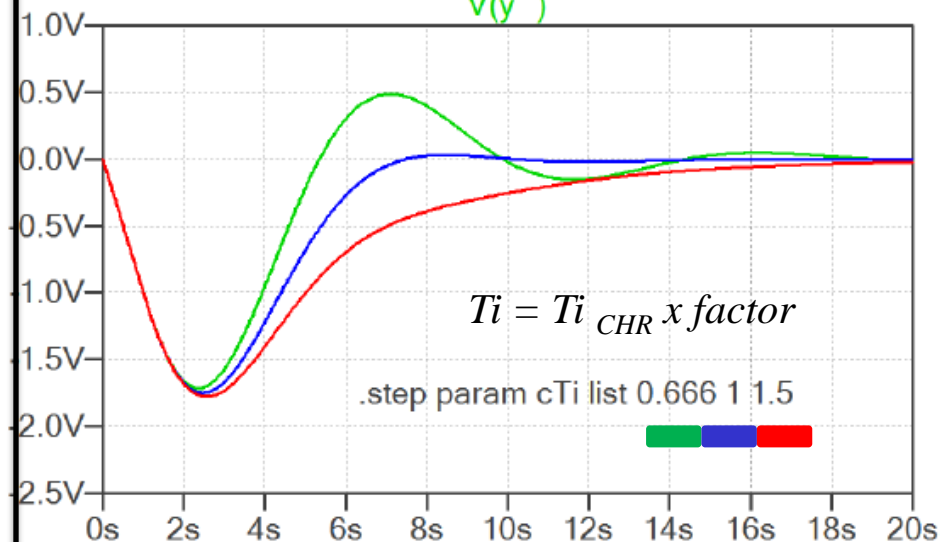
$K_p = var$

Wzmocn. regulatora



$T_i = var$

Stała czasowa całkowania



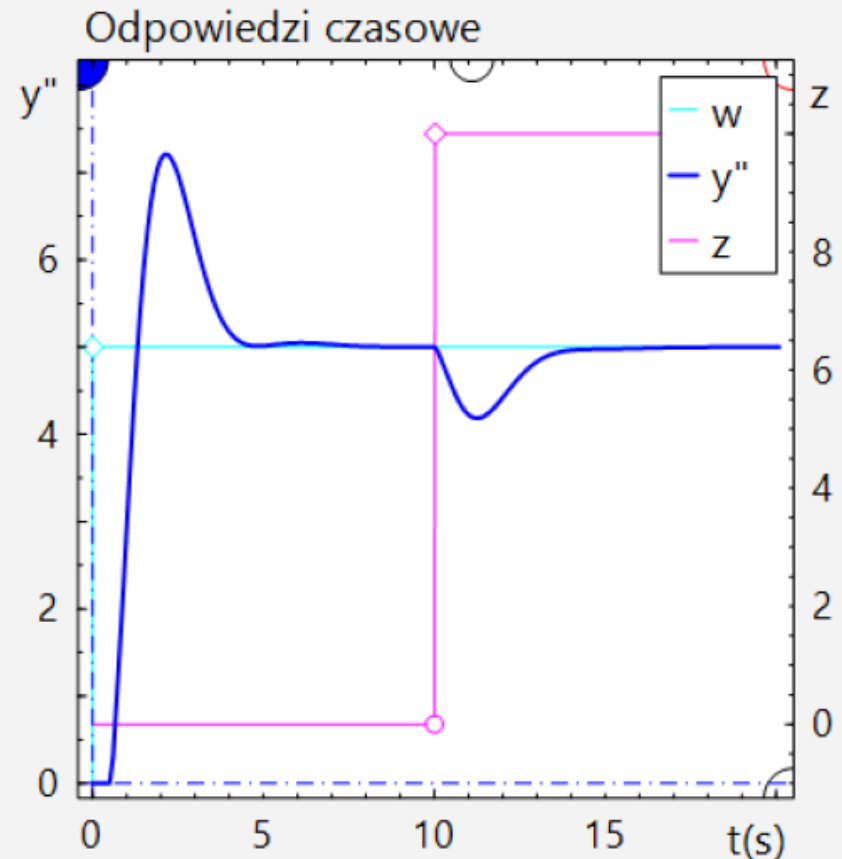
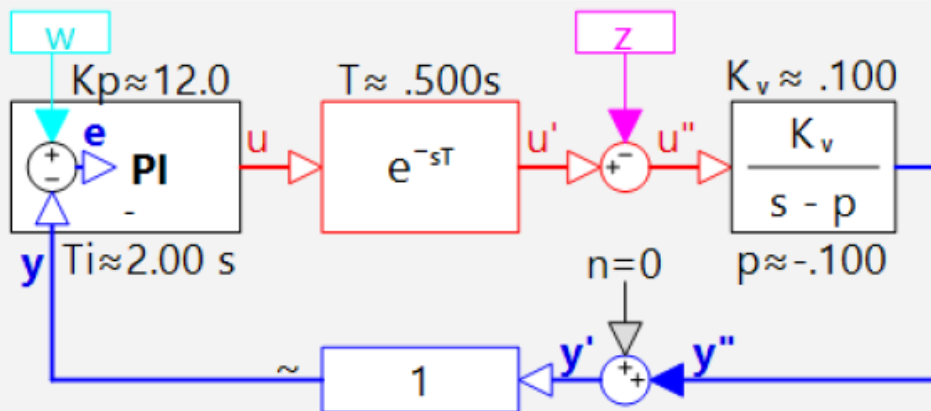
Badania na przykładach regulatora PI

- Kształtowanie odpowiedzi na sygnał zadany
- Ograniczenie sygnału wyjściowego regulatora

Reakcja na skokową zmianę sygnału zadanego „w”

Dobór nastaw regulatora PI wg wzorów CHR ($K_p = 0.6/T/K_v$, $T_i = 4T$) zapewnia dobrą reakcję na zakłócenie $z(t)$, ale odpowiedź na skokową zmianę sygnału zadanego $w(t)$ wykazuje duże przeregulowanie.

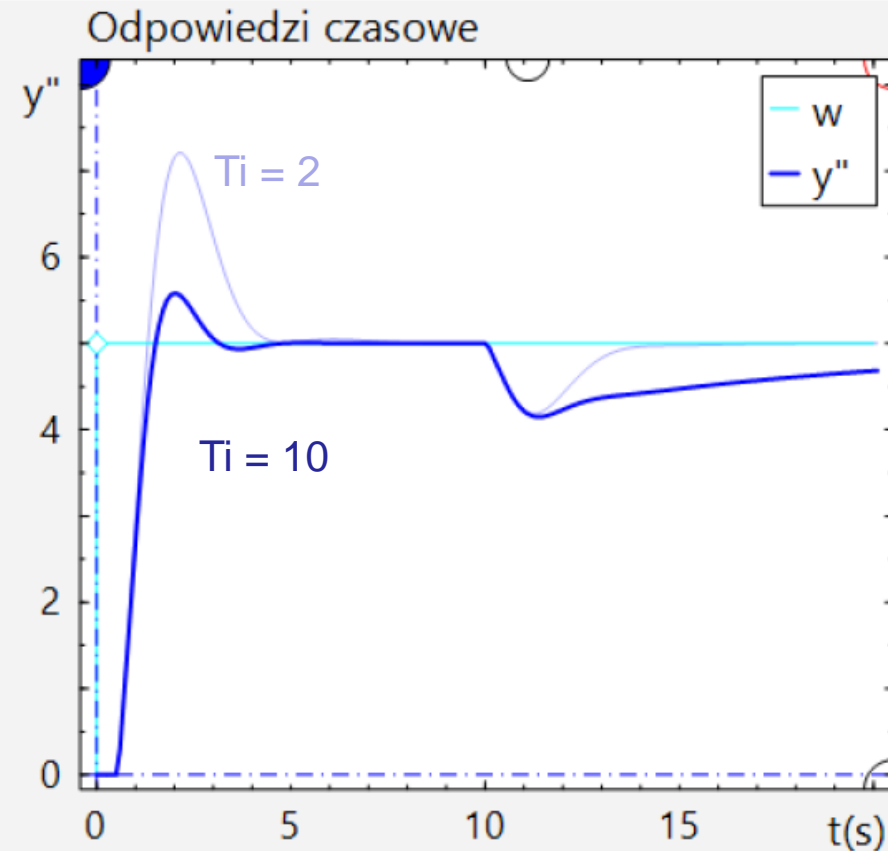
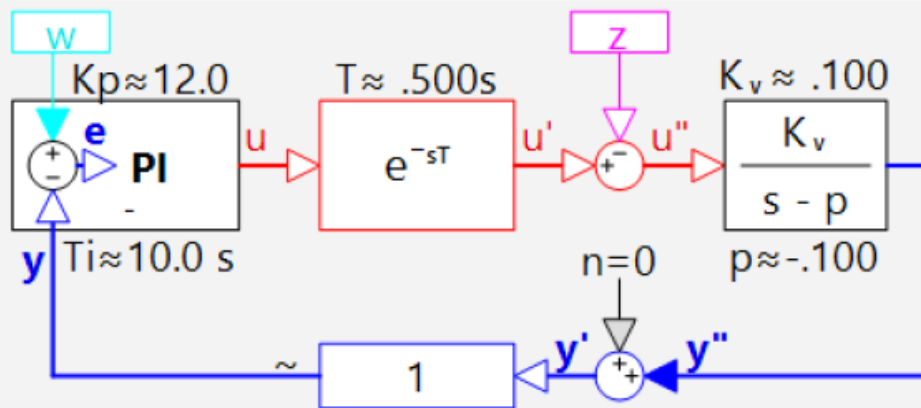
$GM \approx 2.35$ $PM \approx 36.3^\circ$ $DM \approx .492s$



Zmniejszanie przeregulowania przez wzrost T_i

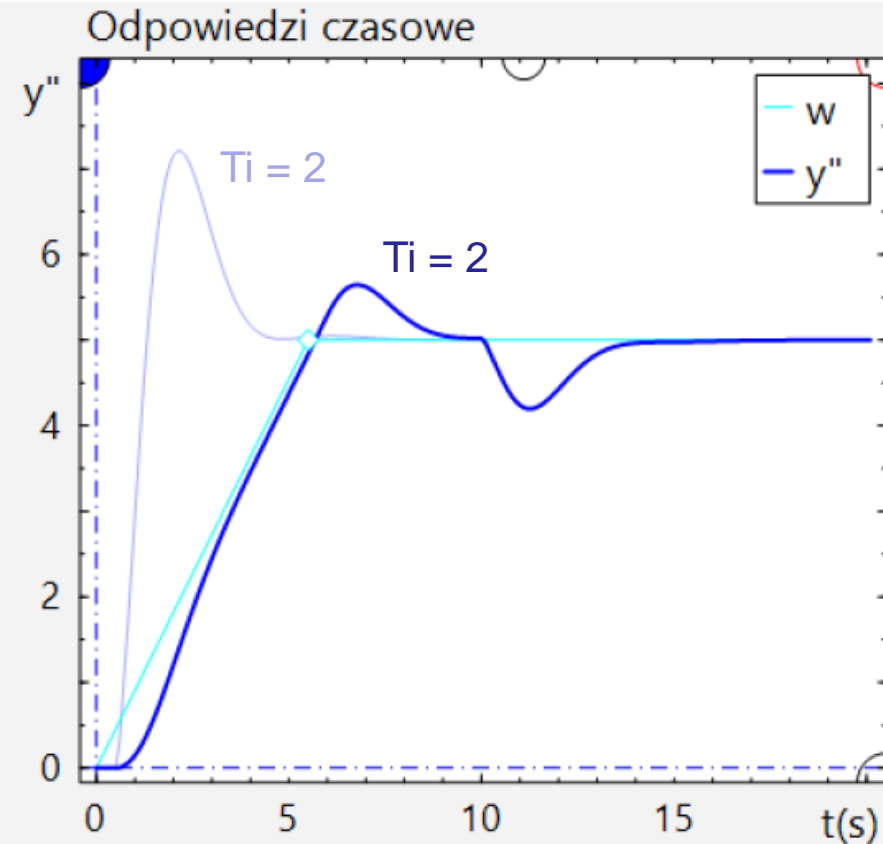
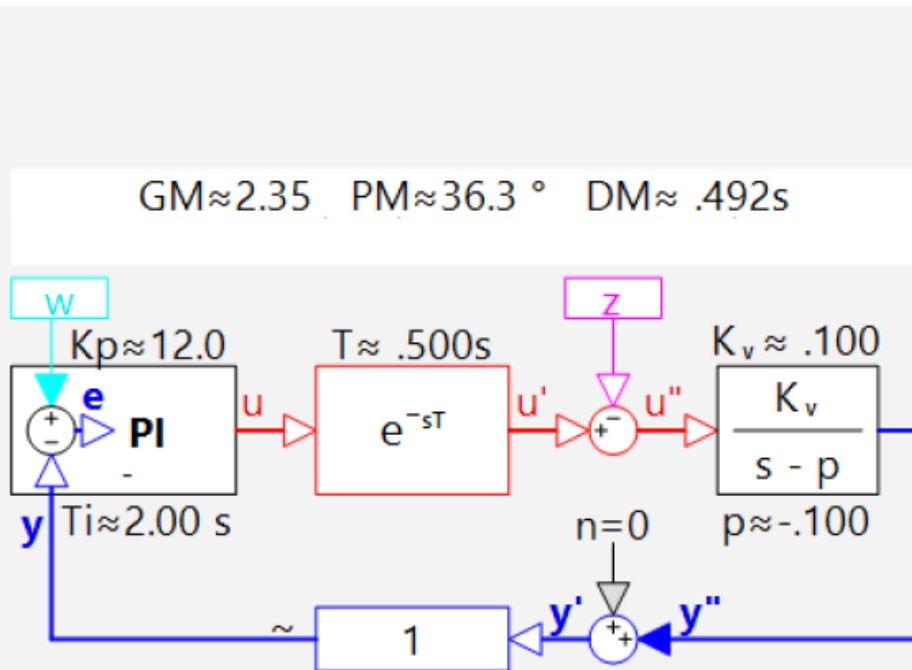
$$u = K_P \left(w - y + \frac{w - y}{sT_i} \right)$$

$GM \approx 2.62$ $PM \approx 55.5^\circ$ $DM \approx .807s$



Poprawa odpowiedzi na skok sygnału zadanego (zmniejszenie przeregulowania) wiąże się z bardzo znacznym wydłużeniem reakcji na zakłócenie !

Zmniejszanie przeregulowania przez ograniczenie szybkości zmiany sygnału zadanego

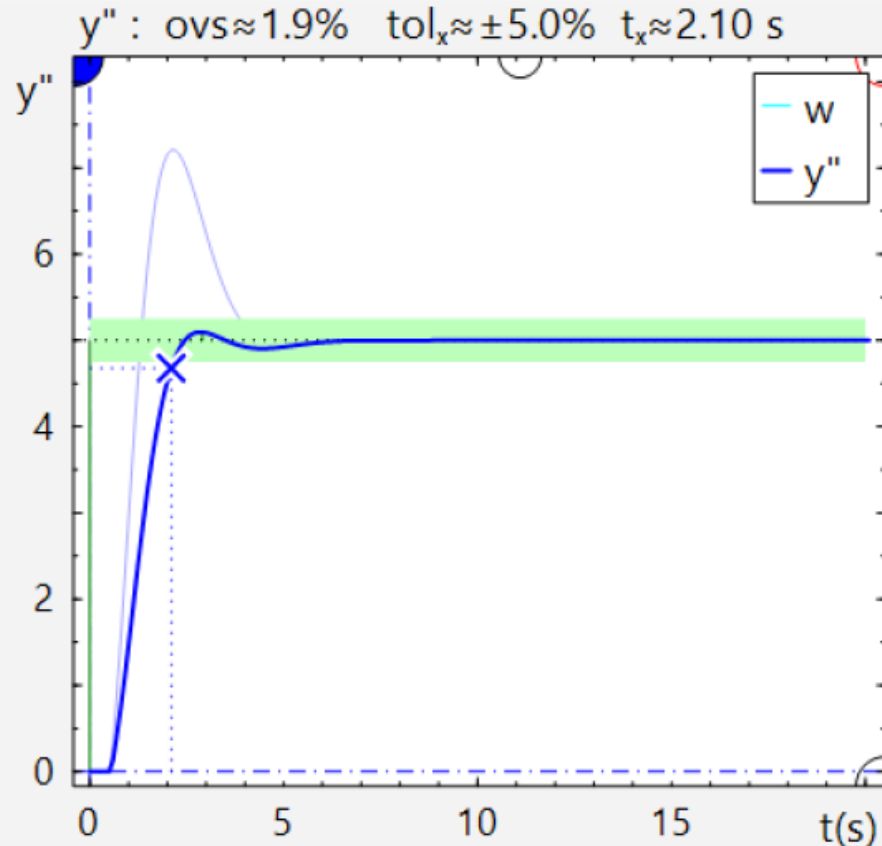
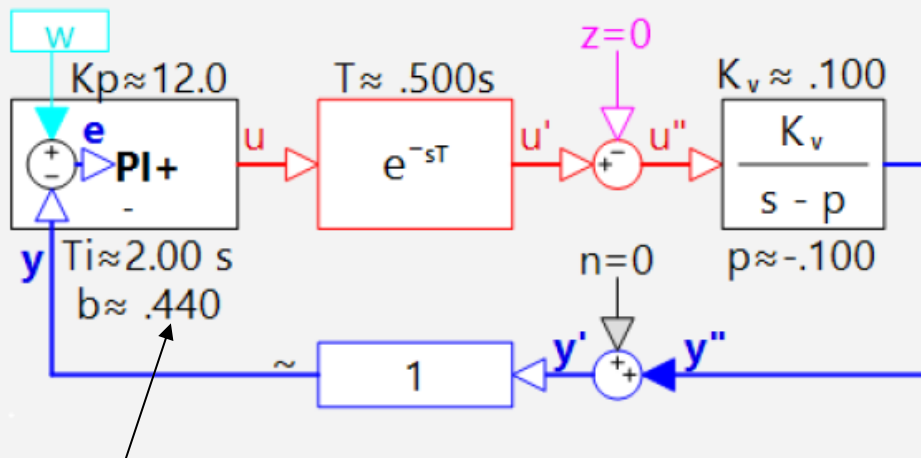


- Wydłuża się czas reakcji na zmianę sygnału zadanego, ale bez pogorszenia reakcji na zakłócenie
- Przeregulowanie jest mniejsze, ale nie znika całkowicie
- Potrzebny jest dodatkowy blok (zadajnik) kształtujący sygnał wejściowy $w(t)$

Modyfikacje algorytmu PI – wsp. b

Odpowiedź czasowa

$GM \approx 2.35$ $PM \approx 36.3^\circ$ $DM \approx .492s$



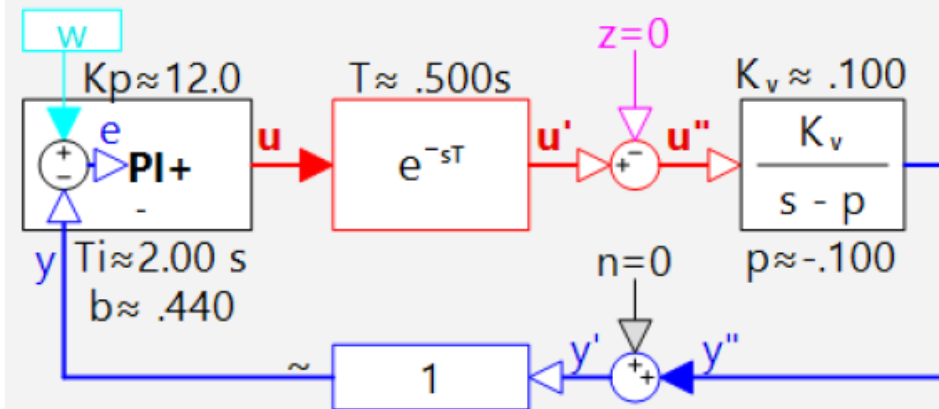
$$u = K_P \left(b \cdot w - y + \frac{w - y}{sT_i} \right) \quad \text{Mniejszy udział sygnału zadanego w części proporcjonalnej, a udział w części całkującej bez zmian}$$

Zmniejszenie przeregulowanie w odpowiedzi na skok sygnału zadanego oraz obniżenie maksimum charakterystyki częstotliwościowej uzyskuje się redukując udział sygnału $w(t)$ w działaniu proporcjonalnym regulatora do poziomu $b \cdot K_p$, ($0 < b < 1$). Reakcja układu na zakłócenie $z(t)$ pozostaje przy tym bez zmiany.

Modyfikacje algorytmu PI – wsp. b

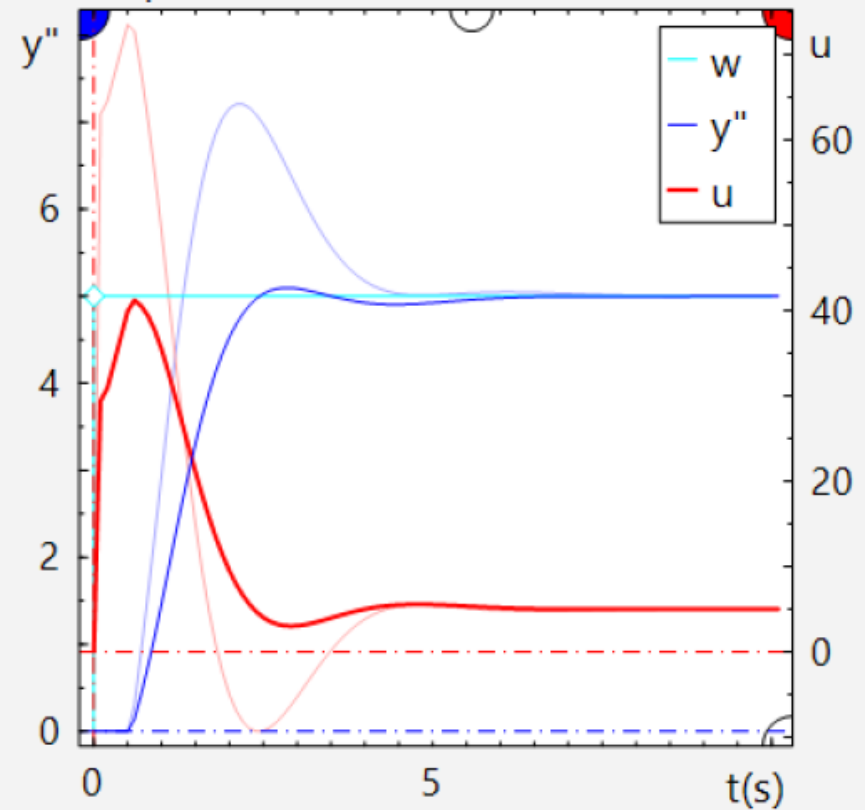
Sygnal sterujący

$GM \approx 2.35$ $PM \approx 36.3^\circ$ $DM \approx .492s$



$$u = K_P \left(b \cdot w - y + \frac{w - y}{sT_i} \right)$$

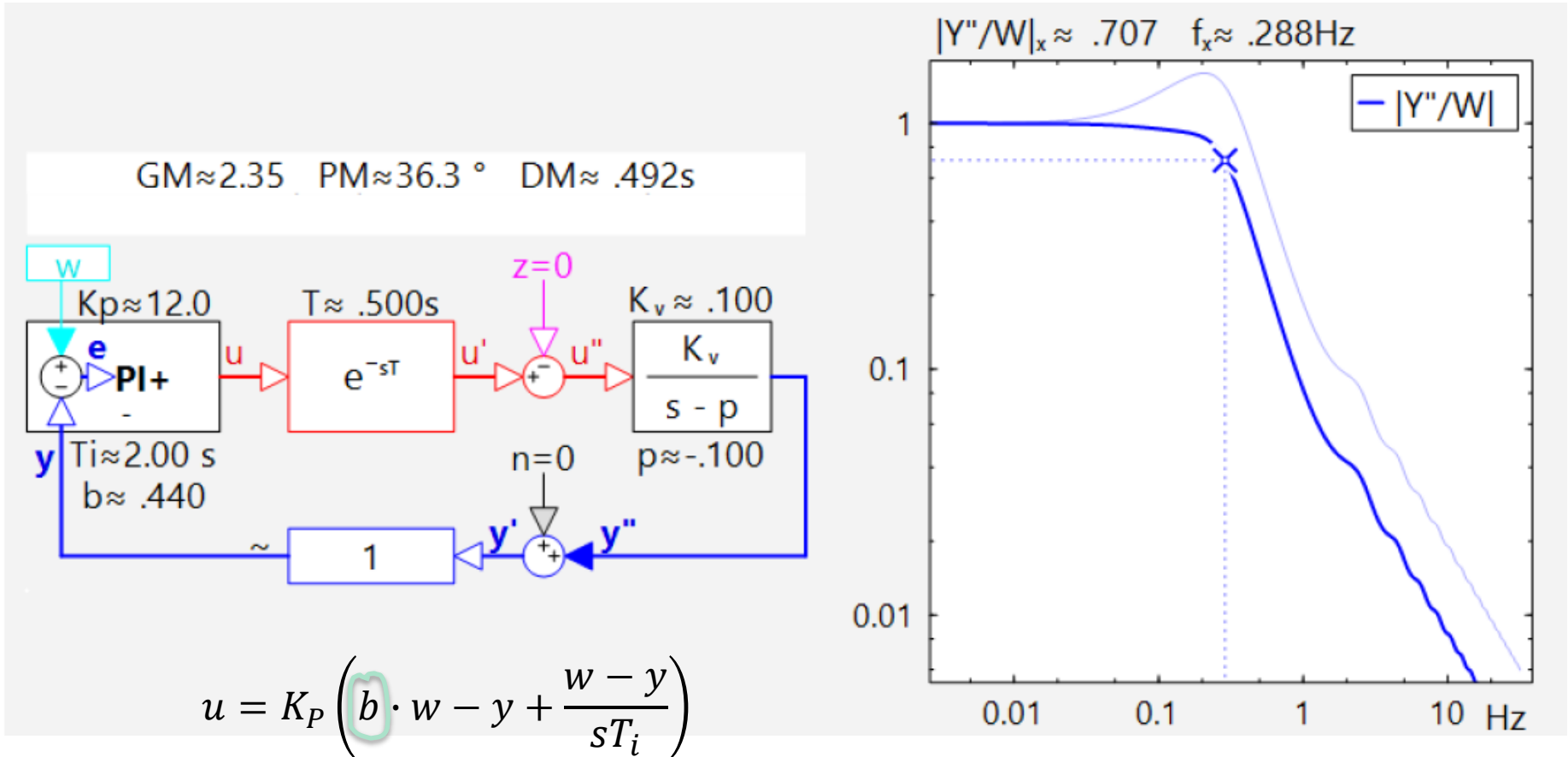
Odpowiedzi czasowe



Oprócz zmniejszenia przeregulowania współczynnik wagi $b < 1$ znacząco **obniża maksymalną wartość sygnału sterującego $u(t)$** – bez wydłużania czasu regulacji, jak to miało miejsce w poprzedniej metodzie (zwiększanie T_i)

Modyfikacje algorytmu PI – wsp. b

Charakterystyka częstotliwościowa

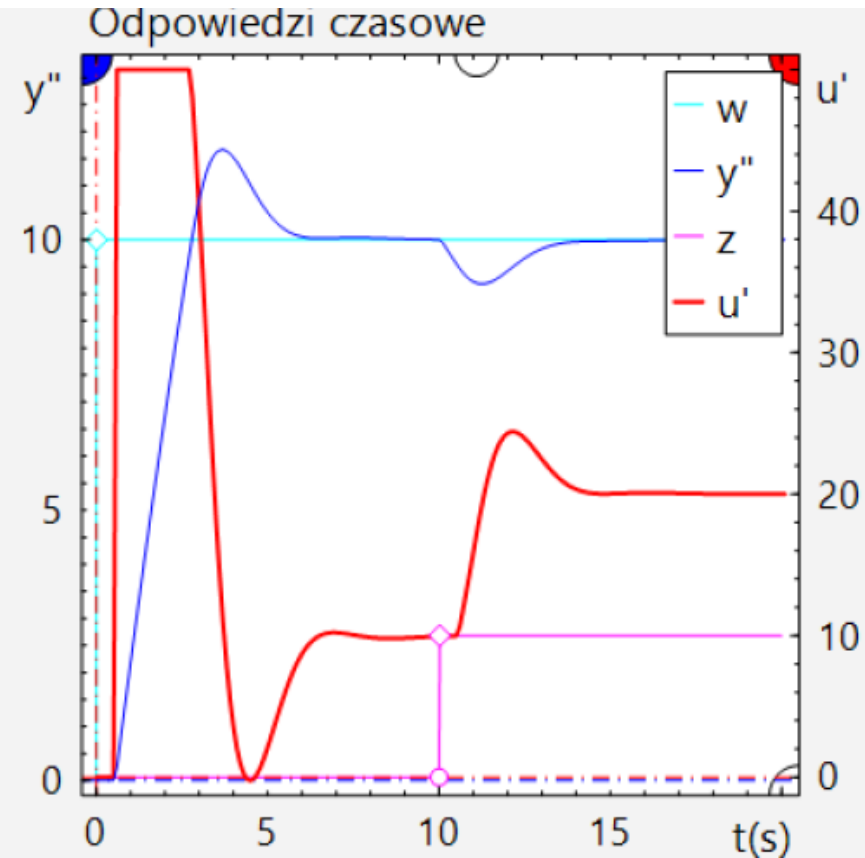
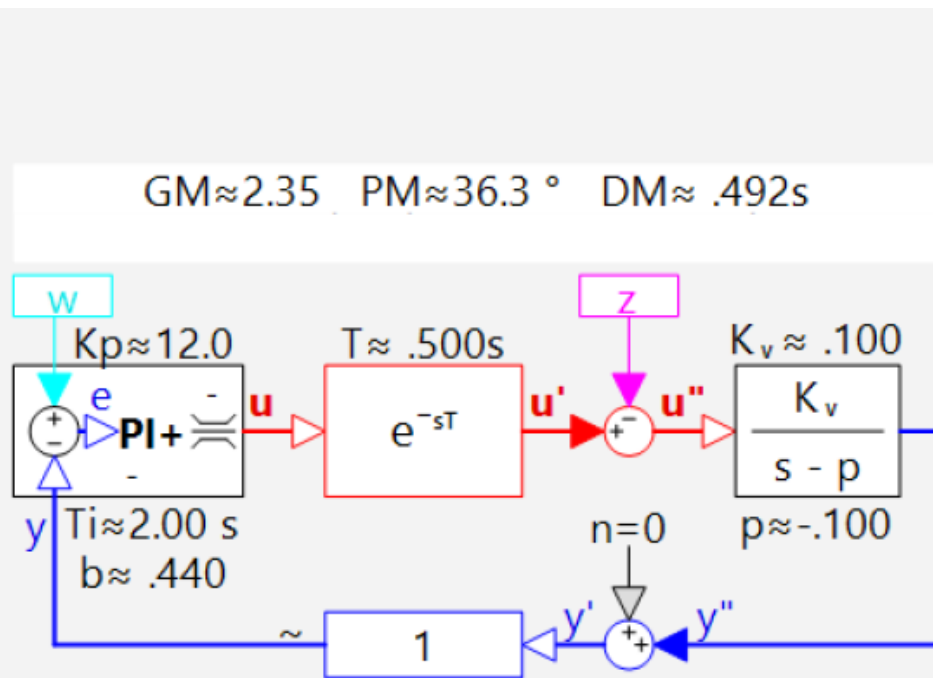


Współczynnik wagi $b < 1$ korzystnie zmniejsza lub likwiduje maksimum charakterystyki częstotliwościowej.

Jednak zbyt mała wartość b ogranicza częstotliwość graniczną pasma przenoszenia (częstotliwość, przy której wzmacnienie spada o 3dB względem wyjściowego, równego 1).

Modyfikacje algorytmu PI – ogr. sygnału wy. regulatora

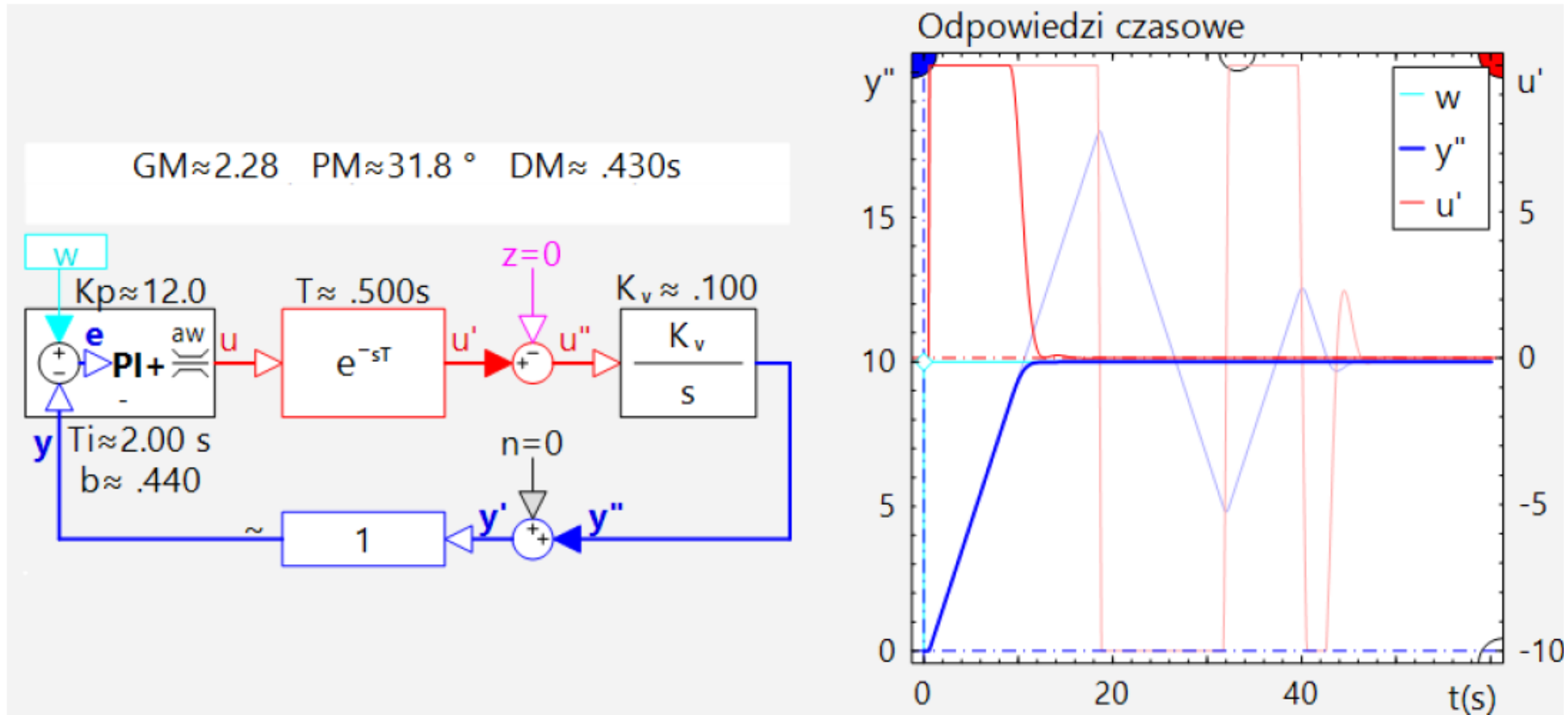
Ograniczanie sygnału wyjściowego regulatora \rightarrow sygnału sterującego obiektem



Sygnał wyjściowy regulatora $u(t)$ powinien być ograniczony możliwości członu wykonawczego. Wpływ ograniczenia ujawnia się głównie przy gwałtownych i dużych zmianach sygnału zadanego $w(t)$. Ograniczenie powoduje jednak wydłużenie czasu ustalania się odpowiedzi oraz zwiększa przeregulowanie.

Modyfikacje algorytmu PI – ogr. sygnału wy. regulatora

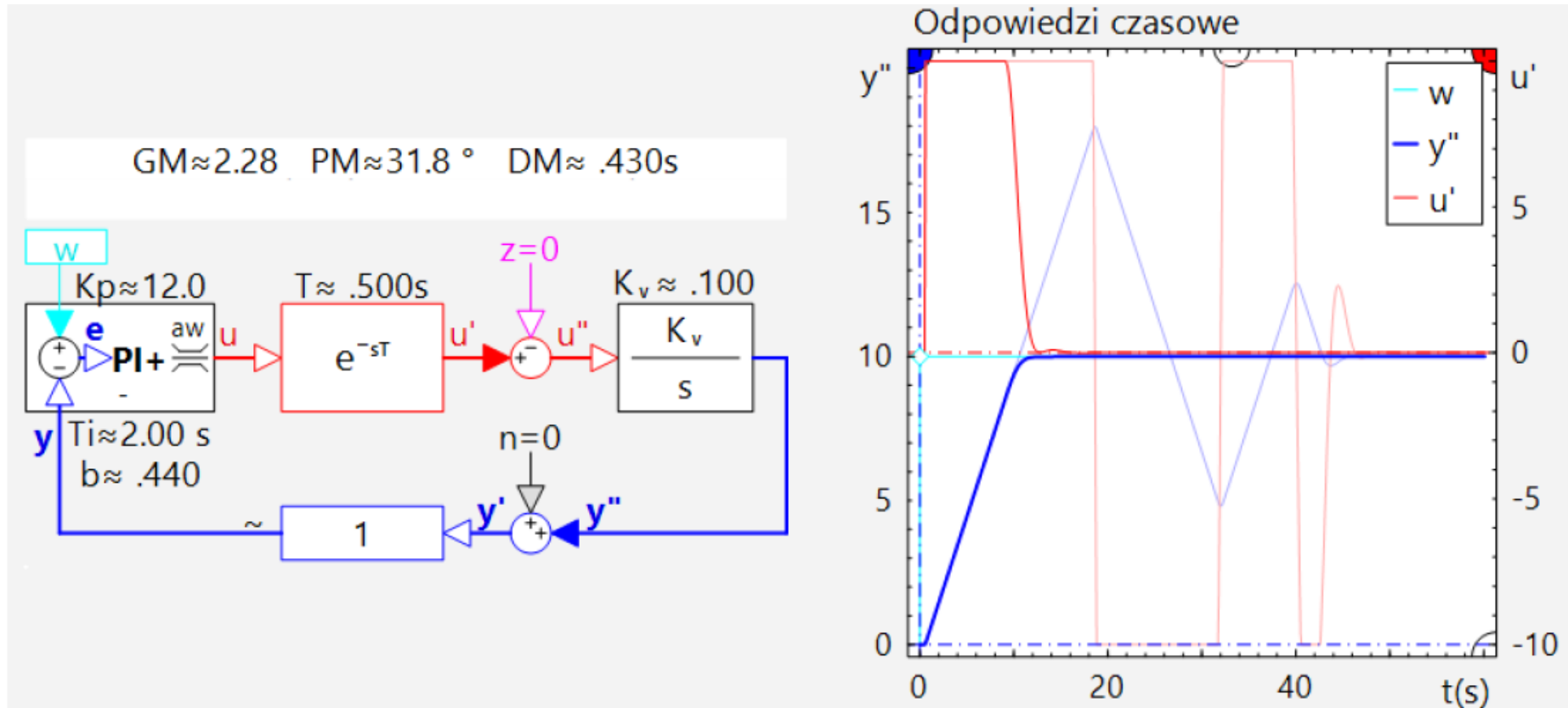
Zjawisko „windup” - skutek ograniczenia (nasycenia) sygnału u bez ograniczania całkowania w regulatorze – nieliniowy zakres pracy regulatora



Po wejściu regulatora w stan ograniczania sygnału wyjściowego u , jego wewnętrzny człon całkujący nadal całkuje i osiąga wartości znacznie większe niż ograniczany sygnał wyjściowy. Powoduje to opóźnione wychodzenie regulatora ze stanu ograniczenia, co może wywołać bardzo duże przeregulowania.

Modyfikacje algorytmu PI – ogr. sygnału wy. regulatora

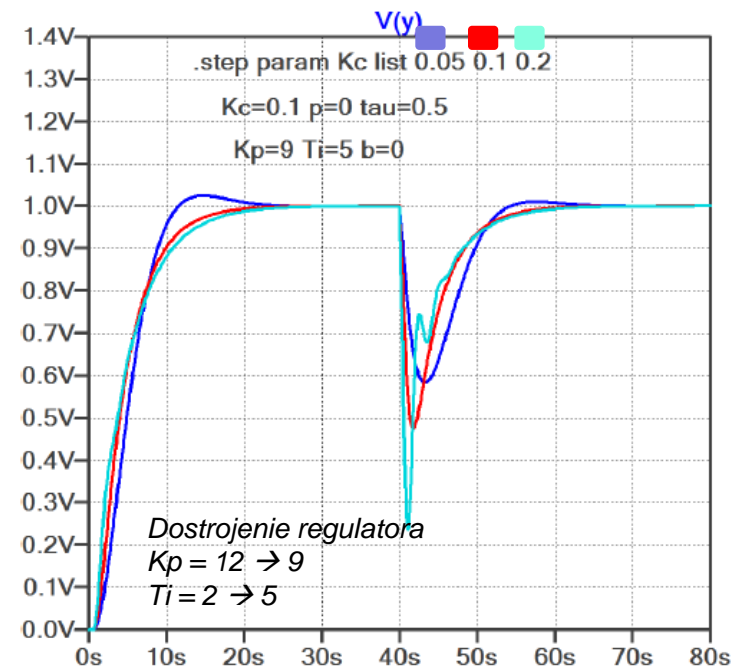
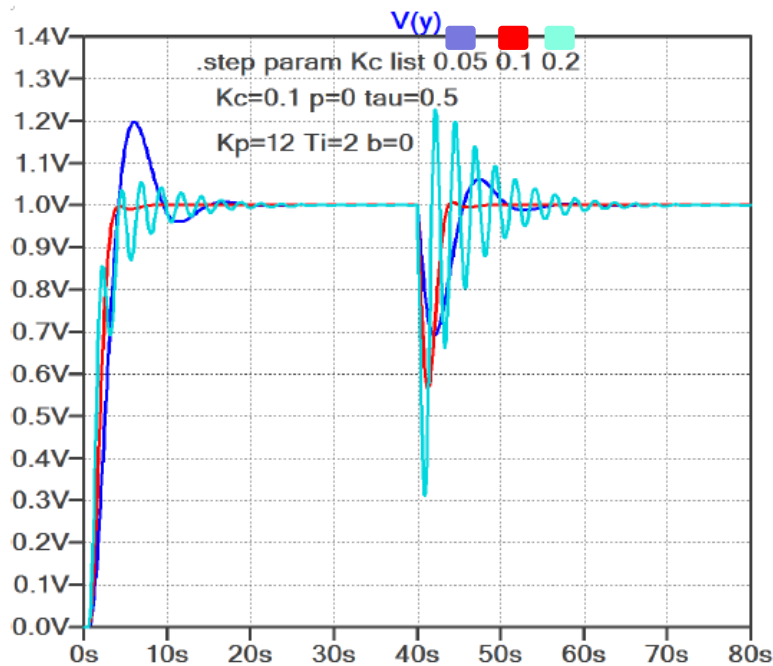
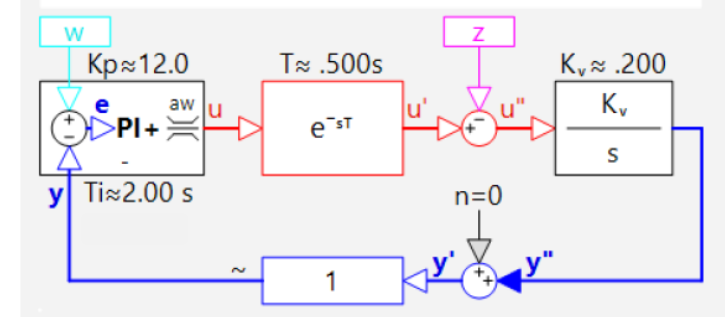
Układy anty-windup – zapobieganie efektowi windup



Układ anty-windup ogranicza całkowanie wewnątrz regulatora, gdy jego sygnał wyjściowy u jest ograniczony (w nasyceniu); dzięki temu sygnał wyjściowy z regulatora wychodzi z ograniczenia wcześniej i nie powstaje przeregulowanie

Wpływ zmian wzmocnienia całkowitego obiektu $K_c (=K_v)$

Regulator $K_p = 12$, $T_i = 2$ daje dobry efekt regulacji z obiektem $K_v = 0.1$. Jaki będzie efekt regulacji przy zmianie K_v (0.05 i 0.2)? (Uwaga: na wykresach $K_c = K_v$)



Regulator nastawiony wg wzorów CHR dla nominalnej wartości K_c (K_v) (linie czerwone) nie zapewnia dobrej jakości regulacji dla skrajnych wartości K_c (K_v). W obu przypadkach powstają oscylacje, a dla $K_c=0.05$ (połowa wartości nominalnej) układ jest bardzo blisko granicy stabilności. Aby uzyskać odporność na zmiany parametrów trzeba obniżyć wzmocnienie K_p i zwiększyć stałą czasową T_i . Spowolnione przebiegi dla różnych K_c (K_v) ustalają się w takim samym czasie.