Politechnika Wrocławska

Wydział Matematyki
Kierunek studiów: Matematyka
Specjalność: Matematyka teoretyczna

Praca dyplomowa – magisterska

UŁAMKOWY LAPLASJAN Z ZABURZENIEM HARDY'EGO NA PÓŁPROSTEJ

Paweł Maciocha

słowa kluczowe:
proces stabilny, ułamkowy laplasjan, zaburzenie schrödingerowskie, tożsamość Hardy'ego

krótkie streszczenie:
W niniejszej pracy dowodzi się istnienie nietrywialnego nieujemnego rozwiązania równania $\partial_t u = \Delta^{\alpha/2} u + \kappa x^{-\alpha} u$ na półprostej. Ponadto udowadniamy nierówność Hardy'ego dla ułamkowego laplasjanu $\Delta^{\alpha/2}$ na półprostej.

Opiekun pracy dyplomowej	dr hab. inż. Tomasz Jakubowski	....	....
	Tytuł/stopień naukowy/imię i nazwisko	ocena	podpis

*Do celów archiwalnych pracę dyplomową zakwalifikowano do:**

a) kategorii A (akta wieczyste)

b) kategorii BE 50 (po 50 latach podlegające ekspertyzie)

** niepotrzebne skreślić*

pieczątka wydziałowa

Wrocław, rok 2021

Wrocław University
of Science and Technology

Faculty of Pure and Applied Mathematics
Field of study: Mathematics
Specialty: Theoretical Mathematics

Master's Thesis

FRACTIONAL LAPLACIAN WITH HARDY POTENTIAL ON HALF-LINE

Paweł Maciocha

keywords:
stable process, fractional Laplacian, Schrödinger perturbations, Hardy's identity

short summary:
In this thesis we prove the existence of nontrivial nonnegative solution of the equation $\partial_t u = \Delta^{\alpha/2} u + \kappa x^{-\alpha} u$ on the half-line. Moreover, we prove an optimal Hardy inequality for the fractional Laplacian on the half-line.

Supervisor	dr hab. inż. Tomasz Jakubowski	....	....
	Title/degree/name and surname	grade	signature

*For the purposes of archival thesis qualified to:**
a) category A (perpetual files)
b) category BE 50 (subject to expertise after 50 years)
** delete as appropriate*

stamp of the faculty

Wrocław, 2021

Spis treści

Wstęp

Procesy Markowa są bardzo ważną klasą procesów stochastycznych o szerokich zastosowaniach w wielu dziedzinach nauki. Pierwsza praca na ich temat została opublikowana przez Markowa w 1906 roku.

Badania nad związkiem procesów Markowa, a teorią potencjału mają długą historię. Początki sięgają prac Fellera, Kaca, Kakutani'ego oraz innych. Duży wkład w rozwój badań nad związkiem klasycznej teorii potencjału, a ruchem Browna włożył Doob ([1]). Szerszy opis tego zagadnienia można odnaleźć w monografiach autorstwa Porta oraz Stone'a (zob. [2]) i Doob'a (zob. [3]). W 1957 roku i 1958 zostały opublikowane słynne artykuły Hunta ([4], [5]) stanowiące podwaliny probabilistycznego podejścia do teorii potencjału. Jego praca ujawniła głęboki związek między procesami Markowa a tą że teorią. Równie ważną monografią, do której będziemy się odwoływać jest książka Chung'a oraz Zhao ([6]) traktująca o teorii potencjału ruchu Browna i związanych z nią operatów schrödingera.

W ostatnich czasach obserwujemy szczególne zainteresowanie tematyką symetrycznych stabilnych ruchów Lévy'ego będących podklasą procesów Markowa. Generatorem tego procesu jest ułamkowy laplasjan $\Delta^{\alpha/2}$, który obecnie jest intensywnie badany w dziedzinach takich jak prawdopodobieństwo czy teoria potencjału (zob. [7]). W ostatnim czasie pojawiło się sporo prac dotyczących zaburzeń gradientowych i schrödingerowskich ułamkowego laplasjanu ([8–18]).

W klasycznym przypadku $\alpha = 2$ zaburzenie schrödingerowskie przez potencjał Hardy'ego było po raz pierwszy rozważane przez Barasa i Goldsteina [19]. Udowodnili istnienie nietrywialnego nieujemnego rozwiązania klasycznego równania ciepła $\partial_t u = \Delta u + \kappa |x|^{-2}$ na $\mathbb{R}^d$ dla $0 \le \kappa \le (d-2)^2/4$ oraz, że dla większych κ takie rozwiązanie nie istnieje. Ostre górne i dolne oszacowania dla jądra ciepła operatora schrödingerowskiego $\Delta + \kappa|x|^{-2}$ zostały wyznaczone przez Liskevich'a i Sobol'a dla $0 < \kappa < (d-2)^2/4$ [20, str. 365 i Przykłady 3.8, 4.5 i 4.10].

Ostatnimi czasy dla $\alpha \in (0, d \wedge 2)$ operator schrödingerowski $\mathcal{L} := \Delta^{\alpha/2} + \kappa|x|^{-\alpha}$ dla $\kappa \ge 0$ zyskuje coraz większe zainteresowanie. W pracach [21, 22] udowodniono, że dla $\kappa > \kappa^* := \frac{2^\alpha \Gamma((d+\alpha)/4)^2}{\Gamma((d-\alpha)/4)^2}$ jądro ciepła wybucha. W [23] autor wyznaczył górne oraz dolne oszacowania dla jądra ciepła $\mathcal{L}$ z warunkami Dirichleta dla ograniczonych otwartych podzbiorów $\mathbb{R}^d$. Z kolei w pracy [24] autorzy uzyskali ostre oszacowania jądra ciepła $\mathcal{L}$.

Celem niniejszej pracy jest zbadanie podobnego zagadnienia w przypadku $d = 1$, który ze względu na swoją specyfikę często rozpatrywany jest oddzielnie. Dla $\alpha \in (0, 2)$ będziemy rozważać proces α-stabilny X_t^D, zabity przy wyjściu z półprostej $D = (0, \infty)$ oraz potencjał $q(x) = \kappa x^{-\alpha}$, gdzie $0 \le \kappa \le \frac{\Gamma(\frac{\alpha-1}{2})^2}{\pi}$. Jednym z uzyskanych wyników jest konstrukcja rozwiązania fundamentalnego równania $\partial_t u = \Delta^{\alpha/2} u + qu$ dla funkcji u o nośniku zawartym w D.

W rozdziale pierwszym wprowadzamy podstawowe pojęcia teorii potencjału ruchu stabilnego, które wykorzystywane będą w dalszej części pracy.

W rozdziale drugim wyznaczamy dokładną wartość stałej κ_β, która będzie ważna w rozdziałach 3 i 4.

Rozdział trzeci zawiera informacje o związku ułamkowego laplasjanu z procesami stabilnymi. Przedstawiona jest konstrukcja funkcji $q(x)$ oraz zdefiniowane zostało zaburzenie schrödingerowskie gęstości stabilnej przez tą funkcję. Otrzymanym rezultatem jest konstrukcja rozwiązania fundamentalnego wyżej wspomnianego równania.

W ostatnim rozdziale udowodniono nierówność Hardy'ego dla gęstości przejścia $p_D(t, x, y)$.

Pragnę bardzo serdecznie podziękować mojemu promotorowi, dr hab. Tomaszowi Jakubowskiemu, za poświęcony mi czas, cierpliwość i pomoc podczas pisania pracy magisterskiej. Dziękuję za całą przekazaną wiedzę, za wszelkie wskazówki, bez których nie byłby możliwy mój udział w uzyskaniu prezentowanych wyników.

Rozdział 1

Wprowadzenie

W niniejszym rozdziale definiujemy α-stabilny ruch Lévy'ego na półprostej i omawiamy podstawowe pojęcia jego teorii potencjału. Pokrótce opisujemy funkcje Gamma Eulera oraz Beta. Przez „:=" będziemy oznaczać definicje, np. $a \wedge b := \min\{a, b\}$ oraz $a \vee b = \max\{a, b\}$. Będziemy pisać $f(x) \approx g(x)$ gdy $f, g \geq 0$ oraz istnieje stała $c > 0$ taka, że $c^{-1}g(x) \leq f(x) \leq cg(x)$.

1.1 α- stabilny ruch Lévy'ego

Niech X_t będzie izotropowym α-stabilnym procesem Lévy'ego przyjmującym wartości w $\mathbb{R}$ z indeksem stabilności $\alpha \in (0, 2)$.

Przez $\mathbb{P}^x$ oznaczać będziemy prawdopodobieństwo związane z procesem startującym z punktu x, a przez $\mathbb{E}^x$ wartość oczekiwaną względem rozkładu $\mathbb{P}^x$. Gęstość przejścia $p(t, x, y) = p(t, x - y)$ procesu X_t jest zadana przez odwrotną transformatę Fouriera:

$$p(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t|\xi|^\alpha - ix\xi} d\xi, \qquad t > 0, \ x \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Proces X_t można uzyskać przez podporządkowanie, tzn. $X_t = W_{S_t}$ (zob. [7]), gdzie W_t jest procesem Wienera na $\mathbb{R}$ o gęstości przejścia

$$g(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} e^{-x^2/(4t)}, \qquad t > 0, \ x \in \mathbb{R},$$

a S_t $\alpha/2$-stabilnym subordynatorem, czyli niemalejącym $\alpha/2$-stabilnym procesem Lévy'ego o gęstości $\eta_t(s)$ takiej, że $\eta_t(s) = 0$ dla $s \leq 0$. Transformata Laplaca gęstości $\eta_t(s)$ jest równa

$$\int_0^\infty e^{-\xi s} \eta_t(s) ds = e^{-t\xi^{\alpha/2}}, \qquad t > 0, \ \xi \geq 0.$$

Z powyższego wynika, że gęstość procesu X_t możemy zapisać w postaci

$$p(t, x) = \int_0^\infty g(s, x) \eta_t(s) ds, \qquad t > 0, \ x \in \mathbb{R}.$$

Dla $\alpha = 1$ oraz $\alpha = 2$ gęstość $p(t, x)$ jest dana wzorem jawnym. W pierwszym przypadku otrzymujemy

$$p(t, x) = \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2 + x^2}, \qquad t > 0, \ x \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

jest to rozkład Cauchy'ego. Natomiast dla $\alpha = 2$ otrzymujemy gęstość procesu Wienera.

Ze wzoru (1.1) wynika następująca własność skalowania

$$p(t,x) = t^{-1/\alpha} p(1, t^{-1/\alpha} x), \tag{1.3}$$

czyli rozkład $t^{-1/\alpha} X_t$ względem $\mathbb{P}^0$ nie zależy od t. Proces X_t ma niezależne i stacjonarne przyrosty, jego trajektorie są prawostronnie ciągłe i mają lewostronne granice w każdym punkcie. Jest niezmienniczy na obroty oraz posiada mocną własność Markowa. Zachodzą następujące oszacowania (zob. [7])

$$p(t,x) \approx t^{-1/\alpha} \wedge \frac{t}{|x|^{1+\alpha}}, \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}.$$

1.2 Proces zabity

W całej pracy będziemy rozważać zbiór $D = (0, \infty) \subset \mathbb{R}$. Określamy czas pierwszego wyjścia procesu X_t ze zbioru D wzorem

$$\tau_D = \inf\{t \geq 0 : X_t \in D^c\}.$$

Zmienna losowa τ_D jest prawie na pewno skończonym momentem Markowa (zob. Wniosek 2.4). Przez X_t^D oznaczamy proces X_t zabity w chwili wyjścia ze zbioru D,

$$X_t^D = \begin{cases} X_t & \text{gdy } 0 < t < \tau_D \\ \partial & \text{gdy } t \geq \tau_D. \end{cases}$$

Jego przestrzenią stanów jest $D_\partial = D \cup \partial$, gdzie ∂ jest dodatkowym stanem, nazywanym „cmentarzem". W momencie, w którym proces X_t opuści zbiór D, trafia do ∂ i już tam pozostaje. Gęstość przejścia procesu X_t^D istnieje i oznaczamy ją przez $p_D(t,x,y)$. Zachodzi następująca zależność nazywana wzorem Hunta (zob. [6])

$$p_D(t,x,y) = p(t,x,y) - \mathbb{E}^x[p(t - \tau_D, X_{\tau_D}, y)\mathbf{1}_{\{\tau_D < t\}}], \qquad t > 0,\ x, y \in D. \tag{1.4}$$

Gęstość przejścia $p_D(t,x,y)$ jest symetryczna, tzn. $p_D(t,x,y) = p_D(t,y,x)$ oraz spełnia równanie Chapmana-Kołmogorowa

$$p_D(t+s, x, y) = \int_D p(t,x,z) p_D(s,z,y) dz.$$

W przypadku gdy x lub y należą do D^c mamy $p_D(t,x,y) = 0,\ t > 0$. Dla $p_D(t,x,y)$ znane są oszacowania (zob. [32])

$$p_D(t,x,y) \approx p(t,x,y) \left(1 \wedge \frac{x^{\alpha/2}}{t}\right) \left(1 \wedge \frac{y^{\alpha/2}}{t}\right), \qquad t > 0,\ x, y \in D. \tag{1.5}$$

1.3 Funkcja Gamma i Beta

Funkcja Gamma została po raz pierwszy wprowadzona przez Leonharda Eulera w celu uogólnienia funkcji silni na wartości niecałkowite. Poniższe informacje można znaleźć np. w [25].

Definicja 1.1. Dla $z \in \mathbb{C}$ takich, że $\Re(z) > 0$ definiujemy funkcję gamma wzorem

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt. \tag{1.6}$$

Spełnia ona zależność

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1),$$

co pozwala nam uogólnić funkcję gamma do całego zbioru $\mathbb{C}$ z wyjątkiem ujemnych liczb całkowitych i zera.

Definicja 1.2. Dla $r \in \mathbb{C}$ uogólnionym symbolem Newtona nazywamy,

$$\binom{r}{k} = \frac{\Gamma(r+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)}. \tag{1.7}$$

Z funkcją Γ ściśle związana jest funkcja Beta. Dla $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ takich, że $z + w \notin \{0, -1, -2, \dots\}$ definiujemy

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}. \tag{1.8}$$

Okazuje się, że dla $z, w \in \mathbb{C}$ takich, że $\Re(z), \Re(w) > 0$ zachodzi

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}} dt. \tag{1.9}$$

Będziemy korzystać z jeszcze jednej postaci funkcji Beta. Dla każdego $z \in \mathbb{C}\setminus\{0, -1, -2, \dots\}$ oraz $w \in \mathbb{C}$ takiego, że $\Re(w) > 0$ mamy

$$B(z,w) = \sum_{k=0}^\infty \frac{\binom{k-w}{k}}{z+k}. \tag{1.10}$$

Zauważmy również, że dla $z, w \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$B(z,w) = \frac{(z-1)!(w-1)!}{(z+w-1)!} = \frac{z+w}{zw} \frac{1}{\binom{z+w}{z}},$$

zatem ma ona ścisły związek z symbolem Newtona.

Przypomnijmy użyteczną tożsamość. Dla $x, y \in \mathbb{R}$ takich, że $|x| > |y|$ i $r \in \mathbb{C}$ mamy

$$(x+y)^r = \sum_{k=0}^\infty \binom{r}{k} x^{r-k} y^k. \tag{1.11}$$

Kończąc ten podrozdział udowodnimy

Lemat 1.3. *Niech $a \in (-1, 0)$ i $b > 0$. Zachodzi*

$$\int_0^1 s^{a-1}((1-s)^{b-1} - 1) ds = -\frac{1}{a} + B(a,b).$$

Dowód. Na mocy wzoru (1.11) oraz tożsamości (1.10) mamy

$$\begin{aligned}
\int_0^1 s^{a-1}((1-s)^{b-1} - 1) ds &= \int_0^1 s^{a-1} \sum_{k=1}^\infty \binom{b-1}{k} (-1)^k s^k ds \\
&= \sum_{k=1}^\infty \binom{b-1}{k} (-1)^k \frac{1}{k+a} = \sum_{k=1}^\infty \binom{k-b}{k} \frac{1}{k+a} \\
&= -\frac{1}{a} + \sum_{k=0}^\infty \binom{k-b}{k} \frac{1}{k+a} = -\frac{1}{a} + B(a,b).
\end{aligned}$$

□

1.4 Funkcja Greena i jądro Poissona

Definicja 1.4. Funkcję Greena zbioru D definiujemy wzorem

$$G_D(x,y) = \int_0^\infty p_D(t,x,y)dt, \qquad x,y \in D. \tag{1.12}$$

$G_D(x,y)$ jest funkcją symetryczną, ciągłą na $D \times D$ przyjmującą wartości z przedziału $[0,\infty]$. Gdy choć jeden z argumentów należy do D^c to $G_D(x,y) \equiv 0$. Ponadto dla $x \neq y \in D$ $G_D(x,y) < \infty$ (zob. [32]).

Definicja 1.5. Dla $x \in \mathbb{R}$ definiujemy miarę Lévy'ego o gęstości

$$\nu(x) = \mathcal{A}_\alpha |z|^{-1-\alpha}, \tag{1.13}$$

gdzie

$$\mathcal{A}_\alpha = \frac{\alpha 2^{\alpha-1}\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})}{\pi^{1/2}\Gamma(1-\frac{\alpha}{2})}.$$

Korzystając z tożsamości $\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)\Gamma(x)}$ oraz $\Gamma(2x) = (2\pi)^{-1/2}2^{2x-1/2}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2})$ mamy

$$\mathcal{A}_\alpha = \frac{\alpha 2^{\alpha-1}\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})\Gamma(\frac{\alpha}{2})\sin(\pi\frac{\alpha}{2})}{\pi^{1/2}\pi} = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\sin(\pi\frac{\alpha}{2})}{\pi}. \tag{1.14}$$

Jeśli A jest dowolnym borelowskim podzbiorem D^c, to ([26])

$$\mathbb{P}^x(X_{\tau_D} \in A) = \int_A \int_D G_D(x,y)\nu(z-y)dydz. \tag{1.15}$$

Z powyższego wynika, że rozkład zmiennej losowej X_{τ_D} jest absolutnie ciągły względem miary Lebesgue'a. Formuła (1.15) nazywana jest wzorem Ikedy-Watanaby. Wyraża ona prawdopodobieństwo tego, że proces opuszczający zbiór D trafi do zbioru A. Gęstość miary $\mu(A) = \mathbb{P}^x(X_{\tau_B} \in A)$ względem miary Lebesgue'a nazywamy jądrem Poissona i oznaczamy przez $P_D(x,y)$, dla $y \in D$ $P_D(x,y) = 0$. Zatem

$$P_D(x,z) = \int_D G_D(x,y)\nu(z-y)dy. \tag{1.16}$$

W przypadku półprostej znane są jawne wzory na $P_D(x,y)$ oraz $G_D(x,y)$, np.

$$P_D(x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{y}{x^2+y^2},$$

jednak nie będziemy z nich korzystać. Możemy również podać rozkład łączny wektora (τ_D, X_{τ_D}). Mamy ([26])

$$\mathbb{P}^x(\tau_D \in (a,b), X_{\tau_D} \in A) = \int_A \int_D \int_a^b p_D(t,x,y)\nu(z-y)dtdydz, \tag{1.17}$$

wzór ten także jest nazywany wzorem Ikedy-Watanaby. Zauważmy, że ze wzoru Hunta mamy

$$\mathbb{P}^x(\tau_D > t) = \int_D p_D(t,x,y)dy. \tag{1.18}$$

Rozdział 2

Funkcja κ_β

Dla $\beta \in (0,1)$ oznaczmy

$$\kappa_\beta = \frac{\Gamma(\beta+\alpha/2)\Gamma(1-\beta+\alpha/2)}{\Gamma(\beta)\Gamma(1-\beta)}. \tag{2.1}$$

Przypomnijmy, że $D=(0,\infty)$. Głównym wynikiem tego rozdziału jest następujące

Twierdzenie 2.1. *Dla $\alpha \in (0,2)$ i $\beta \in (0,1)$ zachodzi,*

$$\int_0^\infty \int_D p_D(t,x,y) y^{-\beta-\alpha/2} dy dt = \kappa_\beta^{-1} x^{\alpha/2-\beta}, \qquad x \in D. \tag{2.2}$$

Ze względu na skalowanie funkcji p_D, wystarczy pokazać (2.2) tylko dla $x=1$. Zatem główną tezą twierdzenia jest dokładna wartość stałej κ_β, która będzie ważna w rozdziałach 3 i 4. Zauważmy, że $\int_0^\infty p_D(t,x,y)dt = G_D(x,y)$, zatem (2.2) możemy zapisać w postaci

$$\int_D G_D(x,y) y^{-\beta-\alpha/2} dy = \kappa_\beta^{-1} x^{\alpha/2-\beta}. \tag{2.3}$$

Dla $D=(0,\infty)$ znany jest wzór na funkcję Greena (zob. [29])

$$G_D(x,y) = \frac{1}{2^\alpha(\Gamma(\alpha/2))^2} \frac{1}{|x-y|^{1-\alpha}} \int_0^{xy/|x-y|^2} \frac{s^{\alpha/2-1}}{(1+s)^{1/2}} ds,$$

jednak nie będziemy z niego korzystać. Powstała całka podwójna wydaje się być trudna do policzenia. Dodatkowo zaproponowaną poniżej metodę można próbować stosować w przypadkach, gdy wzór na funkcję Greena nie jest znany.

Idea dowodu opiera się na zastosowaniu wzoru Ikedy-Watanaby. Ze wzoru Hunta mamy

$$G_D(x,y) = U(x,y) - \mathbb{E}^x[U(X_{\tau_D},y)],$$

gdzie U jest potencjałem (skompensowanym) półgrupy stabilnej zadanej przez $p(t,x)$. Mnożąc obustronnie przez $y^{-\alpha/2-\beta}$ i całkując po D, ze wzoru Ikedy-Watanaby dostajemy

$$\int_D G_D(x,y) y^{-\alpha/2-\beta} dy = C_1 x^{\alpha/2-\beta} - C_2 \int_D G_D(x,y) y^{-\beta-\alpha/2} dy,$$

gdzie stałe C_1, C_2 mogą być dokładnie wyliczone. Stąd już możemy uzyskać równość (2.3).

Główną trudnością w rachunkach są problemy ze zbieżnością odpowiednich całek. Dlatego w zależności od zakresu α i β stosujemy odpowiednie kompensowanie potencjału U. W konsekwencji w dowodzie Twierdzenia 2.1 będziemy rozważać osobno przypadki $\alpha<1, \alpha>1, \alpha=1$ oraz różne zakresy β. Nim przejdziemy do dowodu udowodnimy kilka lematów pomocniczych.

Przez $c, c_i, i \in \mathbb{N}$ oznaczać będziemy stałe, których dokładna wartość nie ma znaczenia.

Lemat 2.2. *Niech* $-\alpha < \gamma < 1 + \alpha/2$. *Wtedy dla* $t < 2^{-\alpha}$,

$$\int_D p_D(t,1,y)y^{-\gamma}dy \approx 1,$$

oraz dla $t > 2$,

$$\int_D p_D(t,1,y)y^{-\gamma}dy \approx t^{-1/2-\gamma/\alpha}.$$

Dowód. Mamy

$$p_D(t,1,y)y^{-\gamma} \approx \Big(1 \wedge \frac{1}{t^{1/2}}\Big)\Big(1 \wedge \frac{y^{\alpha/2}}{t^{1/2}}\Big)\Big(t^{-1/\alpha} \wedge \frac{t}{|y-1|^{1+\alpha}}\Big)y^{-\gamma},$$

dla $t < 2^{-\alpha}$ zachodzi,

$$\begin{aligned}\int_D p_D(t,x,y)y^{-\gamma}dy &\approx \int_0^{t^{1/\alpha}} y^{\alpha/2-\gamma}t^{1/2}dy + \int_{t^{1/\alpha}}^{1/2} ty^{-\gamma}dy + \int_{1/2}^{1-t^{1/\alpha}} \frac{t}{|y-1|^{1+\alpha}}dy \\ &+ \int_{1-t^{1/\alpha}}^{1+t^{1/\alpha}} t^{-1/\alpha}dy + \int_{1+t^{1/\alpha}}^{3/2} \frac{t}{|y-1|^{1+\alpha}}dy + \int_{3/2}^{\infty} ty^{-1-\alpha-\gamma}dy,\end{aligned}$$

całka ta jest zbieżna dla $-\alpha < \gamma < 1 + \alpha/2$ oraz

$$I = \int_{t^{1/\alpha}}^{1/2} ty^{-\gamma}dy = \begin{cases} t\frac{2^{\gamma-1}-t^{(1-\gamma)/\alpha}}{1-\gamma} \text{ gdy } \gamma \neq 1, \\ -t\ln(2t^{1/\alpha}) \text{ gdy } \gamma = 1,\end{cases}$$

zatem

$$\begin{aligned}\int_D p_D(t,1,y)y^{-\gamma}dy &\approx \frac{t^{1+1/\alpha-\gamma/\alpha}}{1+\alpha/2-\gamma} + I + \frac{t}{\alpha}\Big(t^{-1} - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{-\alpha}\Big) \\ &+ 2 + \frac{t}{\alpha}\Big(t^{-1} - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{-\alpha}\Big) + \frac{ct}{\alpha+\gamma} \approx 1.\end{aligned}$$

Rozważamy $t > 2$ dla $-\alpha < \gamma < 1 + \alpha/2$ mamy

$$\begin{aligned}\int_D p_D(t,x,y)y^{-\gamma}dy &\approx \int_0^{t^{1/\alpha}} t^{-1-1/\alpha}y^{\alpha/2-\gamma}dy + \int_{t^{1/\alpha}}^{\infty} t^{-1/2}\frac{t}{y^{1+\alpha}}y^{-\gamma}dy \\ &= \frac{t^{-1/\alpha-\gamma/\alpha}}{\alpha/2-\gamma+1} + \frac{t^{-\gamma/\alpha-1/2}}{\gamma+\alpha} \approx t^{-1/2-\gamma/\alpha}.\end{aligned}$$

□

Wniosek 2.3. *Dla* $\alpha \in (0,2)$ *i* $\beta \in (0,1)$ *całka*

$$\int_0^\infty \int_D p_D(t,1,y)y^{-\alpha/2-\beta}dydt$$

jest zbieżna.

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_D p_D(t,1,y)y^{-\alpha/2-\beta}dydt &\leq c_1\int_0^{2^{-\alpha}} dt + \int_{2^{-\alpha}}^2 \int_0^\infty p_D(t,x,y)y^{-\alpha/2-\beta}dydt \\ &+ c_2\int_2^\infty t^{-1-\beta/\alpha}dt \\ &\leq c + c_3\int_0^2 y^{-\beta}dy + c_4\int_2^\infty \frac{y^{-\alpha/2-\beta}}{|y-1|^{1+\alpha}}dy < \infty.\end{aligned}$$

□

Wniosek 2.4. *Dla $x > 0$, $\alpha \in (0, 2)$ zachodzi*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}^x(\tau_D > t) = 0.$$

Dowód. Na mocy Lematu 2.2 (dla $\gamma = 0$) oraz (1.18)

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}^x(\tau_D > t) = \lim_{t\to\infty} \int_D p_D(t, x, y)dy = 0.$$

□

Zauważmy, że całka z Wniosku 2.3 jest symetryczna względem argumentu β. Dowodzi tego poniższy lemat.

Lemat 2.5. *Dla $x > 0$ oraz $\alpha \in (0, 2)$ i $\beta \in (0, 1)$ mamy*

$$\int_0^\infty \int_D p_D(t, x, y)y^{-\beta-\alpha/2}dydt = x^{\alpha/2-\beta} \int_0^\infty \int_D p_D(t, 1, y)y^{-(1-\beta)-\alpha/2}dydt. \tag{2.4}$$

Dowód. Zauważmy, że $1 - \beta \in (0, 1)$. Z Wniosku 2.3 całki we wzorze (2.4) są skończone. Korzystając z własności skalowania $p_D(t, x, y)$ oraz podstawiając $s = ty^{-\alpha}$, a następnie $z = x/y$ mamy

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_D p_D(t, x, y)y^{-\beta-\alpha/2}dydt \\
&= \int_0^\infty \int_D y^{-1}p_D(ty^{-\alpha}, x/y, 1)y^{-\beta-\alpha/2}dydt \\
&= \int_0^\infty \int_D p_D(s, x/y, 1)y^{-\beta+\alpha/2-1}dyds \\
&= x^{\alpha/2-\beta} \int_0^\infty \int_D p_D(s, 1, z)z^{-(1-\beta)-\alpha/2}dzds.
\end{aligned}$$

□

Na początku rozważamy przypadek, w którym $\beta = \alpha/2$.

Lemat 2.6. *Dla $\alpha \in (0, 2)$ zachodzi,*

$$\int_0^\infty \int_D p_D(t, x, y)y^{-\alpha}dydt = \frac{\pi}{\Gamma(\alpha)\sin(\pi\alpha/2)}.$$

Dowód. Ze wzoru Ikedy-Watanaby mamy

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^x(\tau_D < t) &= \mathcal{A}_\alpha \int_0^t \int_D \int_{D^c} p_D(t, x, y)|y - z|^{-1-\alpha}dzdyds \\
&= \frac{\mathcal{A}_\alpha}{\alpha} \int_0^t \int_D p_D(t, x, y)y^{-\alpha}dyds.
\end{aligned}$$

Na mocy Wniosku 2.4 $\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}^x(\tau_D < t) = 1$. Zatem z (1.14) przechodząc z t do nieskończoności dostajemy

$$\int_0^\infty \int_D p_D(t, x, y)y^{-\alpha}dyds = \frac{\pi}{\Gamma(\alpha)\sin(\pi\alpha/2)}.$$

□

Oznaczmy,

$$C_{\alpha,\gamma} = \frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma\Big(\frac{1-\alpha(\gamma+1)}{2}\Big)}{\Gamma\Big(\frac{\alpha(\gamma+1)}{2}\Big)2^{\alpha(\gamma+1)}\pi^{1/2}}. \tag{2.5}$$

Zachodzą następujące równania ([28, (25)], [27, Lemat 2.2]).

Lemat 2.7. *Niech $x \in \mathbb{R} \setminus 0$ oraz $\alpha \in (0,2) \setminus \{1\}$. Wtedy,*

$$\int_0^\infty t^\gamma p(t,x)dt = C_{\alpha,\gamma}|x|^{\alpha(\gamma+1)-1}, \ \ dla \ \ -2 < \gamma < \frac{1-\alpha}{\alpha},$$

oraz

$$\int_0^\infty t^\gamma \Big(p(t,0) - p(t,x)\Big)dt = \operatorname{sign}(1-\alpha)C_{\alpha,\gamma}|x|^{\alpha(\gamma+1)-1}, \ \ dla \ \ \frac{1-\alpha}{\alpha} < \gamma < \frac{3-\alpha}{\alpha}.$$

Będziemy stosować Lemat 2.7 dla $\gamma = 0$.

Lemat 2.8. *Dla $\alpha \in (0,2)$ i $\beta \in (0,1)$ zachodzi,*

$$\int_D \nu(1+z)z^{-\beta+\alpha/2}dz = \overline{C}_{\alpha,\beta}.$$

gdzie

$$\overline{C}_{\alpha,\beta} = \mathcal{A}_\alpha B(1-\beta+\alpha/2, \alpha/2+\beta). \tag{2.6}$$

Dowód. Przypomnijmy, że $\nu(z) = \mathcal{A}_\alpha |z|^{-1-\alpha}$. Mamy

$$\int_D \nu(1+z)z^{-\beta+\alpha/2}dz = \mathcal{A}_\alpha \int_0^\infty (1+z)^{-1-\alpha} z^{-\beta+\alpha/2}dz = \mathcal{A}_\alpha B(1-\beta+\alpha/2, \alpha/2+\beta).$$

□

Definiujemy

$$\widehat{C}_{\alpha,\beta} = B(1-\beta-\alpha/2, \alpha) + B(\alpha, \beta-\alpha/2), \tag{2.7}$$

oraz

$$\widetilde{C}_{\alpha,\beta} = B(1-\beta-\alpha/2, \beta-\alpha/2). \tag{2.8}$$

2.1 Przypadek $\alpha < 1$

Możemy przejść do dowodu pierwszego z lematów. Poprzedzimy go dwoma pomocniczymi faktami.

Fakt 2.9. *Niech $\beta \in (0, \alpha/2)$. Zachodzi*

$$\int_D \Big(|1-w|^{\alpha-1} - w^{\alpha-1}\Big)w^{-\beta-\alpha/2}dw = \widehat{C}_{\alpha,\beta}, \tag{2.9}$$

oraz

$$\int_D \Big((1+w)^{\alpha-1} - w^{\alpha-1}\Big)w^{-\beta-\alpha/2}dw = \widetilde{C}_{\alpha,\beta}. \tag{2.10}$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}&\int_D \Big(|1-w|^{\alpha-1} - w^{\alpha-1}\Big) w^{-\beta-\alpha/2} dw \\ &= \int_0^1 \Big((1-w)^{\alpha-1} - w^{\alpha-1}\Big) w^{-\beta-\alpha/2} dw + \int_0^\infty \Big(w^{\alpha-1} - (w+1)^{\alpha-1}\Big)(w+1)^{-\beta-\alpha/2} dw.\end{aligned}$$

Ze wzoru (1.9) pierwsza całka jest równa,

$$\int_0^1 \Big((1-w)^{\alpha-1} - w^{\alpha-1}\Big) w^{-\beta-\alpha/2} dw = B(1-\beta-\alpha/2, \alpha) - \frac{1}{\alpha/2-\beta}.$$

Na mocy twierdzenia Fubiniego oraz Lematu 1.3

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \Big(w^{\alpha-1} - (w+1)^{\alpha-1}\Big)(w+1)^{-\beta-\alpha/2} dw = \int_0^1 \left(\left(\frac{s}{1-s}\right)^{1-\alpha} - s^{1-\alpha}\right) s^{\beta+\alpha/2-2} ds \\ &= \int_0^1 s^{\beta-1-\alpha/2}\Big((1-s)^{\alpha-1} - 1\Big) ds = \frac{1}{\alpha/2-\beta} + B(\alpha, \beta-\alpha/2),\end{aligned}$$

co dowodzi (2.9). Ponownie korzystając ze wzoru 1.9

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \Big((1+w)^{\alpha-1} - w^{\alpha-1}\Big) w^{-\beta-\alpha/2} dw = \int_0^\infty \frac{1}{\alpha-1}\left(\int_0^1 (w+t)^{\alpha-2} dt\right) w^{-\beta-\alpha/2} dw \\ &= \frac{1}{\alpha-1}\int_0^1 t^{\alpha/2-1-\beta} \int_0^\infty (1+z)^{\alpha-2} z^{-\beta-\alpha/2} dz dt \\ &= \frac{B(1-\beta-\alpha/2, 1+\beta-\alpha/2)}{\alpha-1} \int_0^1 t^{\alpha/2-1-\beta} dt = \frac{B(1-\beta, 1+\beta-\alpha)}{(\alpha-1)(\alpha/2-\beta)},\end{aligned}$$

co dowodzi (2.10). □

Fakt 2.10. *Niech $\beta \in (\alpha/2, 1-\alpha/2)$. Zachodzi równość*

$$\int_D |1-w|^{\alpha-1} w^{-\beta-\alpha/2} dw = \widehat{C}_{\alpha,\beta}.$$

Dowód. Mamy

$$\begin{aligned}\int_D |1-w|^{\alpha-1} w^{-\beta-\alpha/2} dw &= \int_0^1 (1-w)^{\alpha-1} w^{-\beta-\alpha/2} dw + \int_0^\infty w^{\alpha-1}(w+1)^{-\beta-\alpha/2} dw \\ &= B(1-\beta-\alpha/2, \alpha) + B(\alpha, \beta-\alpha/2).\end{aligned}$$

□

Lemat 2.11. *Dla $x > 0$ i $\beta \in (0, \alpha/2) \cup (\alpha/2, 1-\alpha/2)$. Mamy*

$$\int_0^\infty \int_D p_D(t,x,y) y^{-\beta-\alpha/2} dy dt = \frac{C_{\alpha,0}\widehat{C}_{\alpha,\beta}}{1 + C_{\alpha,0}\widetilde{C}_{\alpha,\beta}\overline{C}_{\alpha,\beta}} x^{\alpha/2-\beta},$$

gdzie $C_{\alpha,0}$ jest stałą (2.5), $\widehat{C}_{\alpha,\beta}, \widetilde{C}_{\alpha,\beta}$ odpowiednio (2.7), (2.8), a $\overline{C}_{\alpha,\beta}$ stałą z Lematu 2.8.

Dowód. Na mocy Wniosku 2.3, Lematu 2.7 oraz korzystając ze wzoru Hunta, mamy

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty p_D(t,x,y) dt \\ &= \int_0^\infty p(t,x,y) dt - \int_0^\infty \mathbb{E}^x\Big[p(t-\tau_D, X_{\tau_D}, y)\mathbf{1}_{\{\tau_D < t\}}\Big] dt \qquad (2.11) \\ &= C_{\alpha,0}\Big(|x-y|^{\alpha-1} - \mathbb{E}^x|X_{\tau_D} - y|^{\alpha-1}\Big).\end{aligned}$$

Niech $\beta \in (0, \alpha/2)$. Po dodaniu i odjęciu $C_{\alpha,0}y^{\alpha-1}$ otrzymujemy

$$\int_0^\infty p_D(t,x,y)dt = C_{\alpha,0}\Big(\Big(|x-y|^{\alpha-1} - y^{\alpha-1}\Big) - \Big(\mathbb{E}^x|X_{\tau_D} - y|^{\alpha-1} - y^{\alpha-1}\Big)\Big).$$

Mnożąc obustronnie przez $y^{-\beta-\alpha/2}$ i całkując względem y po D dostajemy

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \int_D p_D(t,x,y)y^{-\beta-\alpha/2}dydt \\ &= C_{\alpha,0}\Big[\int_D (|x-y|^{\alpha-1} - y^{\alpha-1})dy - \int_D (\mathbb{E}^x|X_{\tau_D} - y^{\alpha-1}| - y^{\alpha-1})y^{-\beta-\alpha/2}dy\Big].\end{aligned} \tag{2.12}$$

Na mocy Faktu 2.9 wartość pierwszej całki wynosi $\widehat{C}_{\alpha,\beta}x^{\alpha/2-\beta}$. Pozostaje wyliczyć całkę drugą. Korzystając ze wzoru Ikedy-Watanaby i twierdzenia Fubiniego, mamy

$$\begin{aligned}&\int_D \Big(\mathbb{E}^x|X_{\tau_D} - y|^{\alpha-1} - y^{\alpha-1}\Big)y^{-\beta-\alpha/2}dy \\ &= \int_{D^c}\int_D G_D(x,w)\nu(w-z)\Big[\int_D \Big(|y-z|^{\alpha-1} - y^{\alpha-1}\Big)y^{-\beta-\alpha/2}dy\Big]dwdz \\ &= \int_{D^c}\int_D G_D(x,w)\nu(w-z)|z|^{-\beta+\alpha/2}\Big[\int_D \Big(|y-1|^{\alpha-1} - y^{\alpha-1}\Big)y^{-\beta-\alpha/2}dy\Big]dwdz \\ &= \widetilde{C}_{\alpha,\beta}\int_D\int_D G_D(x,w)\nu(w+z)z^{-\beta+\alpha/2}dwdz,\end{aligned}$$

gdzie równość trzecia zachodzi na mocy Faktu 2.9. Rozważamy teraz $\beta \in (\alpha/2, 1-\alpha/2)$. Z Faktu 2.10 oraz wzoru (2.11) mamy

$$\int_0^\infty \int_D p_D(t,x,y)y^{-\beta-\alpha/2}dydt = C_{\alpha,0}\Big(\widehat{C}_{\alpha,\beta}x^{\alpha/2-\beta} - \int_D \mathbb{E}^x|X_{\tau_D} - y^{\alpha-1}|y^{-\beta-\alpha/2}dy\Big),$$

ze wzoru Ikedy-Watanaby oraz ze wzoru 1.9

$$\begin{aligned}&\int_D \mathbb{E}^x|X_{\tau_D} - y^{\alpha-1}|y^{-\beta-\alpha/2}dy \\ &= \int_{D^c}\int_D G_D(x,w)\nu(w-z)\Big[\int_D |y-z|^{\alpha-1}y^{-\beta-\alpha/2}dy\Big]dwdz \\ &= \widetilde{C}_{\alpha,\beta}\int_D\int_D G_D(x,w)\nu(w+z)z^{-\beta+\alpha/2}dwdz.\end{aligned}$$

Zatem dla $\beta \in (0,\alpha/2) \cup (\alpha/2, 1-\alpha/2)$ mamy podstawiając za $z = yw$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_D p_D(t,x,y)y^{-\beta-\alpha/2}dydt &= \widetilde{C}_{\alpha,\beta}\int_D\int_D G_D(x,w)\nu(w+z)z^{-\beta+\alpha/2}dwdz \\ &= \widetilde{C}_{\alpha,\beta}\int_D G_D(x,w)w^{-\beta-\alpha/2}\Big[\int_D \nu(1+y)y^{-\beta+\alpha/2}dy\Big]dw \\ &= \widetilde{C}_{\alpha,\beta}\overline{C}_{\alpha,\beta}\int_0^\infty\int_D p_D(t,x,w)w^{-\beta-\alpha/2}dwdt,\end{aligned}$$

co dowodzi tezy lematu. □

2.2 Przypadek $\alpha > 1$

Fakt 2.12. *Niech* $\beta \in (0, 1 - \alpha/2)$. *Zachodzi*

$$\int_D \Big(|1-w|^{\alpha-1} - w^{\alpha-1}\Big) w^{-\beta-\alpha/2} dw = \widehat{C}_{\alpha,\beta},$$

oraz

$$\int_D \Big((1+w)^{\alpha-1} - w^{\alpha-1}\Big) w^{-\beta-\alpha/2} dw = \widetilde{C}_{\alpha,\beta}.$$

Dowód powyższego faktu przebiega w ten sam sposób co dowód Faktu 2.9.

Fakt 2.13. *Niech* $\beta \in (1 - \alpha/2, 1)$. *Mamy*

$$\int_D (|1-w|^{\alpha-1} - 1) w^{-\beta-\alpha/2} dw = \widehat{C}_{\alpha,\beta},$$

oraz

$$\int_D ((1+w)^{\alpha-1} - 1) w^{-\beta-\alpha/2} dw = \widetilde{C}_{\alpha,\beta}.$$

Dowód. Na mocy Lematu 1.3

$$\int_0^1 (|1-w|^{\alpha-1} - 1) w^{-\beta-\alpha/2} dw = B(1-\beta-\alpha/2, \alpha) + \frac{1}{\beta + \alpha/2 - 1},$$

oraz ze wzoru (1.9)

$$\begin{aligned}
&\int_1^\infty (|w-1|^{\alpha-1} - 1) w^{-\beta-\alpha/2} dw = \int_0^\infty (w^{\alpha-1} - 1)(w+1)^{-\beta-\alpha/2} dw \\
&= \int_0^\infty w^{\alpha-1}(w+1)^{-\beta-\alpha/2} dw - \int_0^\infty (w+1)^{-\beta-\alpha/2} dw \\
&= B(\alpha, \beta - \alpha/2) - \frac{1}{\beta + \alpha/2 - 1}.
\end{aligned}$$

Stąd dostajemy pierwszą równość w tezie lematu. Drugą równość otrzymujemy również ze wzoru (1.9)

$$\begin{aligned}
&\int_D ((1+w)^{\alpha-1} - 1) w^{-\beta-\alpha/2} dw = \int_D \left((1-\alpha)\int_1^{1+w} y^{\alpha-2} dy\right) w^{-\beta-\alpha/2} dw \\
&= (1-\alpha)\int_1^\infty \int_{y-1}^\infty w^{-\beta-\alpha/2} y^{\alpha-2} dw dy = (1-\alpha)\int_1^\infty \frac{1}{1-\beta-\alpha/2}(y-1)^{1-\beta-\alpha/2} y^{\alpha-2} dy \\
&= \frac{1-\alpha}{1-\beta-\alpha/2}\int_0^\infty y^{1-\beta-\alpha/2}(y+1)^{\alpha-2} dy = \frac{1-\alpha}{1-\beta-\alpha/2} B(2-\beta-\alpha/2, \beta-\alpha/2).
\end{aligned}$$

□

Lemat 2.14. *Dla* $x > 0$, $\beta \in (0, 1-\alpha/2) \cup (1-\alpha/2, 1/2]$. *Zachodzi*

$$\int_0^\infty \int_D p_D(t,x,y) y^{-\beta-\alpha/2} dy dt = \frac{C_{\alpha,0}\widehat{C}_{\alpha,\beta}}{1 + C_{\alpha,0}\widetilde{C}_{\alpha,\beta}\overline{C}_{\alpha,\beta}} x^{\alpha/2-\beta}.$$

Dowód. Niech $\beta \in (0, 1-\alpha/2)$. Ze wzoru Hunta oraz dodając i odejmując $p(t,0)$ mamy

$$p_D(t,x,y) = \Big(p(t,0) - \mathbb{E}^x\Big[p(t-\tau_D, X_{\tau_D}, y)\mathbf{1}_{\{\tau_D<t\}}\Big]\Big) - \Big(p(t,0) - p(t,x,y)\Big),$$

na mocy Lematu 2.7 całkując po $(0,\infty)$ względem t otrzymujemy

$$\int_0^\infty p_D(t,x,y)dt = C_{\alpha,0}\Big(|x-y|^{\alpha-1} - \mathbb{E}^x|X_{\tau_D}-y|^{\alpha-1}\Big).$$

Dodając oraz odejmując $C_{\alpha,0}y^{\alpha-1}$, a następnie mnożąc przez $y^{-\beta-\alpha/2}$ i całkując po D względem y mamy

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \int_D p_D(t,x,y)y^{-\beta-\alpha/2}dydt\\ &= \int_D C_{\alpha,0}\Big((|x-y|^{\alpha-1}-y^{\alpha-1}) - (\mathbb{E}^x|X_{\tau_D}-y|^{\alpha-1}-y^{\alpha-1})\Big)y^{-\beta-\alpha/2}dy.\end{aligned}$$

Na mocy Faktu 2.12 oraz postępując tak jak w Lemacie 2.11 (równanie 2.12) otrzymujemy tezę.

Niech teraz $\beta \in (1-\alpha/2, 1/2]$. Korzystają z własności skalowania, symetrii $p_D(t,x,y)$ oraz na mocy Lematu 2.7 mamy

$$\int_0^\infty p_D(t,x,y)dt = \int_0^\infty p_D(t,y,x)dt = x^{\alpha-1}C_{\alpha,0}\Big(|1-y/x|^{\alpha-1} - \mathbb{E}^{y/x}|X_{\tau_D}-1|^{\alpha-1}\Big).$$

Odejmując i dodając 1, a następnie mnożąc przez $y^{-\beta-\alpha/2}$ i całkując po D względem y mamy

$$\begin{aligned}&C_{\alpha,0}x^{\alpha/2-\beta-1}\int_D \Big((|1-y/x|^{\alpha-1}-1) - (\mathbb{E}^{y/x}|X_{\tau_D}-1|^{\alpha-1}-1)\Big)(y/x)^{-\beta-\alpha/2}dy\\ &= C_{\alpha,0}x^{\alpha/2-\beta}\int_D \Big((|1-z|^{\alpha-1}-1) - (\mathbb{E}^{z}|X_{\tau_D}-1|^{\alpha-1}-1)\Big)z^{-\beta-\alpha/2}dz\\ &= C_{\alpha,0}x^{\alpha/2-\beta}\Big(\widehat{C}_{\alpha,\beta} - \int_D(\mathbb{E}^z|X_{\tau_D}-1|-1)z^{-\beta-\alpha/2}dz\Big) = x^{\alpha/2-\beta}G,\end{aligned}$$

gdzie $G = C_{\alpha,0}\Big(\widehat{C}_{\alpha,\beta} - \int_D(\mathbb{E}^z|X_{\tau_D}-1|^{\alpha-1}-1)z^{-\beta-\alpha/2}dz\Big)$. Ze wzoru Ikedy-Watanaby oraz twierdzenia Fubiniego, mamy

$$\begin{aligned}&\int_D(\mathbb{E}^z|X_{\tau_D}-1|^{\alpha-1}-1)z^{-\beta-\alpha/2}dz\\ &= \int_{D^c}\int_D\Big[\int_D\int_0^\infty p_D(s,w,z)dsz^{-\beta-\alpha/2}dz\Big]\nu(w-y)\Big[|1-y|^{\alpha-1}-1\Big]dwdy\\ &= G\mathcal{A}_\alpha\int_D\int_D w^{\alpha/2-\beta}|w+y|^{-1-\alpha}\Big[(1+y)^{\alpha-1}-1\Big]dydw\\ &= G\mathcal{A}_\alpha\int_D\int_D z^{\alpha/2-\beta}(1+z)^{-1-\alpha}\Big[(1+y)^{\alpha-1}-1\Big]y^{-\beta-\alpha/2}dydz\\ &= G\mathcal{A}_\alpha\widetilde{C}_{\alpha,\beta}\int_D z^{\alpha/2-\beta}(1+z)^{-1-\alpha}dz = G\mathcal{A}_\alpha\widetilde{C}_{\alpha,\beta}B(1-\beta+\alpha/2,\alpha/2+\beta)\\ &= G\widetilde{C}_{\alpha,\beta}\overline{C}_{\alpha,\beta}.\end{aligned}$$

W równości trzeciej zastosowano podstawienie $w = zy$, równość czwarta zachodzi na mocy Faktu 2.13 z kolei ostatnia równość z Lematu 2.8. $\square$

2.3 Przypadek $\alpha = 1$

Przypomnijmy, że w tym przypadku gęstość $p(t,x,y)$ jest dana wzorem jawnym, to znaczy

$$p(t,x,y) = \frac{1}{\pi}\frac{t}{t^2+(x-y)^2}.$$

Fakt 2.15. *Niech $\beta \in (0, 1/2)$. Mamy*

$$\int_0^\infty y^{-\beta-1/2} \ln(|1-y|/y) dy = \frac{\pi \sin(\pi\beta)}{(1/2-\beta)\cos(\pi\beta)}$$

oraz

$$\int_0^\infty y^{-\beta-1/2} \ln(|1+y|/y) dy = \frac{\pi}{(1/2-\beta)\cos(\pi\beta)}.$$

Dowód. Podstawiając $x = 1/y$ oraz z [25, Równanie 4.293.7],

$$\int_0^\infty x^{(\beta-1/2)-1} \ln(|1-x|) dx = \frac{\pi \sin(\pi\beta)}{(1/2-\beta)\cos(\pi\beta)}.$$

Dokonując tego samego podstawienia i korzystając z [25, Równanie 4.293.10], w przypadku drugiej całki, otrzymujemy

$$\int_0^\infty x^{(\beta-1/2)-1} \ln(|1+x|) dx = \frac{\pi}{(1/2-\beta)\cos(\pi\beta)}. \tag{2.13}$$

□

Lemat 2.16. *Dla $\alpha = 1$ i $\beta \in (0, 1/2)$ zachodzi (2.2).*

Dowód. Ze wzoru Hunta oraz dodając i odejmując $p(t, y)$, a następnie całkując po t otrzymujemy

$$\int_0^\infty p_D(t, x, y) dt = \frac{1}{\pi} \mathbb{E}^x \Big[\ln(|X_{\tau_D} - y|/y) \Big] - \frac{1}{\pi} \ln(|x-y|/y),$$

teraz mnożąc obustronnie przez $y^{-\beta-1/2}$, podstawiając $z = x/y$ i całkując po y dostajemy

$$\int_0^\infty \int_D p_D(t, x, y) y^{-\beta-1/2} dy dt = \left(\frac{1}{\pi} \int_D \mathbb{E}^x \Big[\ln \Big| X_{\tau_D} - y \Big| / y \Big] y^{-\beta-1/2} dy - \frac{\sin(\pi\beta)}{(1/2-\beta)\cos(\pi\beta)} x^{1/2-\beta} \right).$$

Ze wzoru Ikedy-Watanaby

$$\begin{aligned}
&\int_D \mathbb{E}^x \Big[\ln \Big| X_{\tau_D} - y \Big| / y \Big] y^{-\beta-1/2} dy = \int_D \int_{D^c} G_D(x, w) \nu(w-z) \Big[\int_D \ln(|y-z|/y) y^{-\beta-1/2} dy \Big] \\
&= \int_D \int_D G_D(x, w) \nu(w+z) z^{-\beta+1/2} \Big[\int_D \ln(1+u) u^{(\beta-1/2)-1} du \Big] dw dz \\
&= \frac{\pi}{(1/2-\beta)\cos(\pi\beta)} \int_D \int_D G_D(x, w) \nu(w+z) z^{-\beta+1/2} dw dz \\
&= \frac{\pi}{(1/2-\beta)\cos(\pi\beta)} \overline{C}_{1,\beta} \int_0^\infty \int_D p_D(t, x, w) w^{-\beta-1/2} dw dt.
\end{aligned}$$

Otrzymujemy zatem

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_D p_D(t, x, y) y^{-\beta-1/2} dy dt = \frac{\sin(\pi\beta) x^{1/2-\beta}}{(1/2-\beta)\cos(\pi\beta)} \left(-1 + \frac{B(3/2-\beta, 1/2+\beta)}{\pi(1/2-\beta)\cos(\pi\beta)} \right)^{-1} \\
&= \frac{\sin(\pi\beta) x^{1/2-\beta}}{(1/2-\beta)\cos(\pi\beta)} \left(-1 + \frac{1}{cos^2(\pi\beta)} \right)^{-1} = \frac{\sin(\pi\beta) x^{1/2-\beta}}{(1/2-\beta)\cos(\pi\beta)} \frac{\cos^2(\pi\beta)}{\sin^2(\pi\beta)} \\
&= \frac{\cos(\pi\beta) x^{1/2-\beta}}{(1/2-\beta)\sin(\pi\beta)} = \frac{\pi x^{1/2-\beta}}{\Gamma\Big(\beta + 1/2\Big) \Gamma\Big(1 - \beta + 1/2\Big) \sin(\pi\beta)}.
\end{aligned}$$

□

2.4 Dowód Twierdzenia 2.1

Pokażemy, że dla $\alpha \neq 1$ zachodzi

$$\frac{C_{\alpha,0}\widehat{C}_{\alpha,\beta}}{1+C_{\alpha,0}\widetilde{C}_{\alpha,\beta}\overline{C}_{\alpha,\beta}} = \frac{\pi}{\Gamma\Big(\beta+\alpha/2\Big)\Gamma\Big(1-\beta+\alpha/2\Big)\sin(\pi\beta)}.$$

Rzeczywiście,

$$C_{\alpha,0}\widehat{C}_{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma((1-\alpha)/2)}{\Gamma(\alpha/2)2^\alpha\pi^{1/2}}\left(\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\beta-\alpha/2)}{\Gamma(1-\beta+\alpha/2)} + \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta-\alpha/2)}{\Gamma(\beta+\alpha/2)}\right).$$

Korzystając z tożsamości

$$\Gamma((1-\alpha)/2) = \frac{\pi}{\sin(\pi(1-\alpha)/2)\Gamma((1+\alpha)/2)}, \tag{2.14}$$

oraz

$$\Gamma(\alpha) = \frac{2^{\alpha-1/2}\Gamma(\alpha/2)\Gamma((\alpha+1)/2)}{(2\pi)^{1/2}},$$

otrzymujemy

$$C_{\alpha,0}\widehat{C}_{\alpha,\beta} = \frac{1}{\sin(\pi(1-\alpha)/2)}\left(\frac{\Gamma(1-\beta-\alpha/2)}{\Gamma(1-\beta+\alpha/2)} + \frac{\Gamma(\beta-\alpha/2)}{\Gamma(\beta+\alpha/2)}\right).$$

Następnie podstawiając

$$\Gamma(1-\beta\pm\alpha/2) = \frac{\pi}{\sin(\pi(\beta\mp\alpha/2))\Gamma(\beta\mp\alpha/2)}, \tag{2.15}$$

dostajemy

$$\begin{aligned}
C_{\alpha,0}\widehat{C}_{\alpha,\beta} &= \frac{2^{-1}}{\sin(\pi(1-\alpha)/2)}\frac{\Gamma(\beta-\alpha/2)}{\Gamma(\beta+\alpha/2)}\frac{\sin(\pi(\beta-\alpha/2))+\sin(\pi(\beta+\alpha/2))}{\sin(\pi(\beta+\alpha/2))} \\
&= \frac{2^{-1}}{\sin(\pi(1-\alpha)/2)}\frac{\Gamma(\beta-\alpha/2)}{\Gamma(\beta+\alpha/2)}\frac{2\sin(\pi\beta)\cos(\pi\alpha/2)}{\sin(\pi(\beta+\alpha/2))} \\
&= \frac{\Gamma(\beta-\alpha/2)}{\Gamma(\beta+\alpha/2)}\frac{\sin(\pi\beta)}{\sin(\pi(\beta+\alpha/2))}.
\end{aligned}$$

Korzystając z tożsamości (2.14) oraz (2.15) mamy

$$\begin{aligned}
&C_{\alpha,0}\widetilde{C}_{\alpha,\beta}\overline{C}_{\alpha,\beta} \\
&= \frac{\Gamma((1-\alpha)/2)}{\Gamma(\alpha/2)2^\alpha\pi^{1/2}}\frac{\Gamma(1-\beta-\alpha/2)\Gamma(\beta-\alpha/2)}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{\alpha 2^{\alpha-1}\Gamma((1+\alpha)/2)}{\pi^{1/2}\Gamma(1-\alpha/2)}\frac{\Gamma(1-\beta+\alpha/2)\Gamma(\beta+\alpha/2)}{\Gamma(1+\alpha)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha/2)2^\alpha\sin(\pi(1-\alpha)/2)}\frac{\pi}{\Gamma(1-\alpha)\sin(\pi(\beta+\alpha/2))}\frac{\alpha 2^{\alpha-1}}{\Gamma(1-\alpha/2)}\frac{\pi}{\Gamma(1+\alpha)\sin(\pi(\beta-\alpha/2))} \\
&= \frac{\alpha 2^{\alpha-1}}{2^\alpha\sin(\pi(1-\alpha)/2)}\frac{\sin(\pi\alpha/2)}{\Gamma(1-\alpha)\sin(\pi(\beta+\alpha/2))}\frac{\pi}{\Gamma(1+\alpha)\sin(\pi(\beta-\alpha/2))},
\end{aligned}$$

gdzie w ostatniej linii skorzystaliśmy z tożsamości

$$\Gamma(\alpha/2)\Gamma(1-\alpha/2) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha/2)}. \tag{2.16}$$

Ponieważ

$$\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\alpha} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\alpha\Gamma(\alpha)} = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\Gamma(\alpha+1)},$$

to

$$\begin{aligned}
1 + C_{\alpha,0}\widetilde{C}_{\alpha,\beta}\overline{C}_{\alpha,\beta} &= 1 + \frac{2^{-1}\sin(\pi\alpha/2)\sin(\pi\alpha)}{\cos(\pi\alpha)/2)\sin(\pi(\beta+\alpha/2))\sin(\pi(\beta-\alpha/2))} \\
&= 1 + \frac{\sin^2(\pi\alpha/2)}{\sin(\pi(\beta+\alpha/2))\sin(\pi(\beta-\alpha/2))} \\
&= \frac{\sin(\pi(\beta+\alpha/2))\sin(\pi(\beta-\alpha/2)) + \frac{1-\cos(\pi\alpha)}{2}}{\sin(\pi(\beta+\alpha/2))\sin(\pi(\beta-\alpha/2))} \\
&= \frac{\frac{\cos(\pi\alpha)-\cos(\pi2\beta)}{2} + \frac{1-\cos(\pi\alpha)}{2}}{\sin(\pi(\beta+\alpha/2))\sin(\pi(\beta-\alpha/2))} = \frac{\sin^2(\pi\beta)}{\sin(\pi(\beta+\alpha/2))\sin(\pi(\beta-\alpha/2))}.
\end{aligned}$$

Tak więc z powyższych przekształceń

$$\frac{C_{\alpha,0}\widehat{C}_{\alpha,\beta}}{1 + C_{\alpha,0}\widetilde{C}_{\alpha,\beta}\overline{C}_{\alpha,\beta}} = \frac{\Gamma(\beta-\alpha/2)}{\Gamma(\beta+\alpha/2)}\frac{1}{\sin(\pi(\beta-\alpha/2))\sin(\pi\beta)}.$$

Z tożsamości (2.15)

$$\frac{C_{\alpha,0}\widehat{C}_{\alpha,\beta}}{1 + C_{\alpha,0}\widetilde{C}_{\alpha,\beta}\overline{C}_{\alpha,\beta}} = \frac{\pi}{\Gamma\Big(\beta+\alpha/2\Big)\Gamma\Big(1-\beta+\alpha/2\Big)\sin(\pi\beta)}.$$

Zatem z Lematów 2.11, 2.14 i 2.16 oraz na mocy Lematów 2.5 oraz 2.6 dostajemy (2.2) dla wszystkich α i β.

Rozdział 3

Zaburzenie schrödingerowskie

W tym rozdziale zdefiniujemy operator ułamkowego laplasjanu $\Delta^{\alpha/2}$. Wskażemy jego związek z procesami α-stabilnymi. Następnie dla ustalonego $\delta \in (0, 1/2]$ za pomocą szeregu perturbacyjnego (3.7) zdefiniujemy zaburzenie schrödingerowskie gęstości p_D przez funkcję $q(x) = \kappa x^{-\alpha}$, gdzie κ jest dana przez (2.1) z $\beta = \delta$. Równoważnie zaburzona gęstość $\tilde{p}$ może być zdefiniowana jako rozwiązanie równania całkowego

$$\tilde{p}(t, x, y) = p_D(t, x, y) + \int_0^t \int_D \tilde{p}(t-s, x, z)q(z)p_D(s, z, y)dzds.$$

Pokażemy, że $\tilde{p}$ spełniające powyższe równanie jest prawie wszędzie skończone, czyli $\tilde{p}$ jest rozwiązaniem fundamentalnym równania

$$\partial_t u = \Delta_D^{\alpha/2} u + \kappa x^{-\alpha} u,$$

gdzie $\Delta_D^{\alpha/2}$ oznacza ułamkowy laplasjan ograniczony do zbioru D. Na koniec pokażemy, że funkcje $h(x) = x^{\alpha/2-\delta}$ są niezmiennicze dla $\tilde{p}$ (Twierdzenie 3.8).

3.1 Ułamkowy laplasjan jako generator

Definicja 3.1. Niech $\alpha \in (0, 2)$. Na $C_c^2(\mathbb{R})$ definiujemy operator ułamkowego laplasjanu $\Delta^{\alpha/2}$ wzorem (zob. [30])

$$\Delta^{\alpha/2} u(x) := \lim_{\epsilon \to 0} \int_{|x-y|>\epsilon} (u(y) - u(x))\nu(x-y)dy, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Definiujemy

$$P_t f(x) = \mathbb{E}^x[f(X_t)] = \int_{\mathbb{R}} p(t, x, z)f(z)dz, \qquad t > 0,\ x \in D,$$

dla funkcji f takich, że powyższa całka jest absolutnie zbieżna. Okazuje się, że dla odpowiednio gładkich funkcji zachodzi (zob. [29])

$$\Delta^{\alpha/2} f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t},$$

innymi słowy ułamkowy laplasjan jest generatorem procesu α-stabilnego. Dla procesu α-stabilnego zabitego po wyjściu ze zbioru D generatorem jest tak zwany regionalny ułamkowy laplasjan określony dla funkcji $f \in C_c(D)$ wzorem (zob. [31])

$$\Delta_D^{\alpha/2} f(x) := \lim_{t \to 0} \frac{\mathbb{E}^x[f(X_t)\mathbf{1}_{\{\tau_D > t\}}] - f(x)}{t}.$$

3.2 Konstrukcja funkcji $q(x)$

W pracy [24] udowodniono, że przy pewnych założeniach na funkcję q zaburzenie schrödingerowskie gęstości przejścia spełniającej określone warunki jest skończone. Nim przejdziemy do głównego wątku tego rozdziału przytoczymy konstrukcję funkcji q zaproponowaną przez autorów.

Niech $(X, \mathcal{M}, m(dx))$ będzie σ-skończoną przestrzenią, a $\mathcal{B}_{(0,\infty)}$ σ-ciałem zbiorów borelowskich na $(0,\infty)$. Definiujemy przekształcenie $p : (0,\infty) \times X \times X \to [0,\infty]$ mierzalne względem $\mathcal{B}_{(0,\infty)} \times \mathcal{M} \times \mathcal{M}$, symetryczne oraz spełniające równanie Chapmana-Kołmogorowa. Zakładamy również, że dla każdego $t > 0$, $x \in X$, $p_t(x,y)m(dy)$ jest (σ-skończonym) jądrem całkowym. Niech $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ będzie niemalejąca oraz niech $f = 0$ na zbiorze $(-\infty, 0]$. Wówczas $f' \geq 0$ p.w. oraz

$$f(a) + \int_a^b f'(s)ds \leq f(b), \qquad -\infty < a \leq b < \infty. \tag{3.1}$$

Przez μ oznaczamy nieujemną σ-skończoną miarą na $(X, \mathcal{M})$. Niech

$$p_s\mu(x) = \int_X p_s(x,y)\mu(dy), \tag{3.2}$$

$$h(x) = \int_X f(s)p_s\mu(x)ds. \tag{3.3}$$

Definiujemy $q : X \to [0,\infty]$ następująco: $q(x) = 0$ jeśli $h(x) = 0$ lub ∞, a poza tym

$$q(x) = \frac{1}{h(x)} \int_0^\infty f'(s)p_s\mu(x)ds. \tag{3.4}$$

Używając powyższej konstrukcji w pracy [28] udowodniono, że istnieje nieujemne nietrywialne rozwiązanie równania

$$\partial_t u = \Delta^{\alpha/2}u + \kappa|x|^{-\alpha}u,$$

na $\mathbb{R}^d$ dla $\kappa = [2^\alpha\Gamma(\frac{\delta+\alpha}{2})\Gamma(\frac{d-\delta}{2})]/[\Gamma(\frac{\delta}{2})\Gamma(\frac{d-\delta-\alpha}{2})]$ gdzie $0 < \delta \leq (d-\alpha)/2$. My udowodnimy istnienie takiego rozwiązania na D.

3.3 Konstrukcja funkcji $\tilde{p}(t,x,y)$

Będziemy się opierać na konstrukcji zaprezentowanej w powyższym paragrafie. Przyjmujemy, że

$$\beta \in (0,1),\ \gamma \in (\beta + \alpha/2, 1 + \alpha/2),$$

chyba, że zostanie przyjęty inny zakres. Niech

$$f(t) = \begin{cases} \mathcal{C}^{-1}t^{(-\alpha/2-\beta+\gamma)/\alpha}, & \text{gdy } t > 0, \\ 0, & \text{gdy } t \leq 0, \end{cases}$$

gdzie

$$\mathcal{C} = \int_0^\infty \int_D p_D(t,1,y)t^{(-\alpha/2-\beta+\gamma)/\alpha}y^{-\gamma}dydt.$$

W konstrukcji opisanej w Paragrafie 3.2 bierzemy

$$p_t(x,y) = p_D(t,x,y) \text{ oraz } \mu(dy) = |y|^{-\gamma}dy,$$

i definiujemy

$$h_\beta(x) = \int_0^\infty \int_D p_D(t,x,y) f(t) y^{-\gamma} dy dt, \qquad x \in D.$$

Definiujemy również

$$q_\beta(x) = \frac{1}{h_\beta(x)} \int_0^\infty \int_D p_D(t,x,y) f'(t) y^{-\gamma} dy dt, \qquad x \in D.$$

W przypadku gęstości stabilnej na $\mathbb{R}^d$ rozpatrywanej w [27] i [28], biorąc za μ deltę Diraca w zerze i używając d-wymiarowego odpowiednika Lematu 2.7, można obliczyć całkę (3.3) dla $f(t) = (t \vee 0)^\beta$. W naszym przypadku obliczenie stałej $\mathcal{C}$ wydaje się być bardzo trudne, jednak, co pokazuje Lemat 3.3, jej dokładna wartość nie jest potrzebna do obliczenia $q(x)$. W powyższych całkach występują ponadto problemy ze zbieżnością, dlatego dla każdej funkcji $f(t)$ dobieramy miarę μ tak, by funkcje h i q były skończone.

Lemat 3.2. *Dla $\beta \in (0,1)$ zachodzi*

$$h_\beta(x) = x^{\alpha/2-\beta}, \qquad x \in D.$$

Dowód. Z Lematu 2.2 całka

$$\int_0^\infty \int_D p_D(t,x,y) f(t) y^{-\gamma} dy dt,$$

jest skończona. Ze skalowania funkcji $p_D(t,x,y)$ mamy

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \int_D p_D(t,x,y) f(t) y^{-\gamma} dy dt = \int_0^\infty \int_D x^{-1} p_D(tx^{-\alpha}, 1, y/x) f(t) y^{-\gamma} dy dt \\
&= \int_0^\infty \int_D x^{\alpha-1} p_D(s,1,y/x) x^{-\alpha/2-\beta+\gamma} f(s) y^{-\gamma} dy ds \\
&= \int_0^\infty \int_D x^{\alpha/2-1-\beta+\gamma} p_D(s,1,z) f(s) x^{-\gamma} z^{-\gamma} x dz ds = x^{\alpha/2-\beta}.
\end{aligned}$$

□

Lemat 3.3. *Dla $\beta \in (0,1)$ mamy*

$$q_\beta(x) = \kappa_\beta x^{-\alpha}, \qquad x \in D.$$

Dowód. Z Lematu 2.2 całka

$$\int_0^\infty \int_D p_D(t,x,y) f'(t) y^{-\gamma} dy dt,$$

jest skończona. Ze skalowania funkcji $p_D(t,x,y)$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h_\beta(x)} \int_0^\infty \int_D p_D(t,x,y) f'(t) y^{-\gamma} dy dt = \frac{1}{h_\beta(x)} \int_0^\infty \int_D x^{-1} p_D(tx^{-\alpha}, 1, y/x) f'(t) y^{-\gamma} dy dt \\
&= \frac{1}{h_\beta(x)} \int_0^\infty \int_D x^{\alpha-1} p_D(s,1,y/x) x^{-3\alpha/2-\beta+\gamma} f'(s) y^{-\gamma} dy ds \\
&= \frac{1}{h_\beta(x)} \int_0^\infty \int_D x^{-\alpha/2-\beta} p_D(s,1,z) f'(s) z^{-\gamma} dz ds \\
&= x^{-\alpha} \int_0^\infty \int_D p_D(s,1,z) f'(s) z^{-\gamma} dz ds.
\end{aligned}$$

Pozostało wykazać, że $\kappa_\beta = \int_0^\infty \int_D p_D(s,1,z) f'(s) z^{-\gamma} dz ds$. Mamy

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{h_\beta(1)} \int_0^\infty \int_D p_D(t,1,y) f(t) y^{-\gamma} dy dt = \frac{1}{h_\beta(1)} \int_0^\infty \int_D \int_0^t p_D(t,1,y) f'(s) y^{-\gamma} ds dy dt \\
&= \frac{1}{h_\beta(1)} \int_0^\infty \int_D \int_s^\infty p_D(t,1,y) f'(s) y^{-\gamma} dt dy ds \\
&= \frac{1}{h_\beta(1)} \int_0^\infty \int_D \int_0^\infty p_D(t+s,1,y) f'(s) y^{-\gamma} dt dy ds \\
&= \frac{1}{h_\beta(1)} \int_0^\infty \int_D \int_0^\infty \int_D p_D(t,1,w) p_D(s,w,y) f'(s) y^{-\gamma} dw dt dy ds \\
&= q_\beta(1) \int_0^\infty \int_D p_D(t,1,w) w^{-\alpha/2-\beta} dw dt,
\end{aligned}$$

zatem $q_\beta(1) = \kappa_\beta$. □

Dla p_D mamy następującą tożsamość,

Lemat 3.4. *Dla $t > 0, x > 0$ oraz $\beta \in (0,1)$ zachodzi*

$$\kappa_\beta \int_0^t \int_D p_D(s,x,y) y^{-\alpha/2-\beta} dy ds = x^{\alpha/2-\beta} - \int_D p_D(t,x,y) y^{\alpha/2-\beta} dy. \tag{3.5}$$

Dowód. Ustalmy $t > 0, x > 0$ i $\beta \in (0,1)$. Na mocy Lematu 3.3 dostajemy

$$\begin{aligned}
&\kappa_\beta \int_0^t \int_D p_D(s,x,y) y^{-\alpha/2-\beta} dy ds \\
&= \int_0^t \int_D p_D(s,x,y) \int_0^\infty \int_D p_D(r,y,z) f'(r) z^{-\gamma} dz dr dy ds \\
&= \int_0^t \int_0^\infty \int_D p_D(s+r,x,z) f'(r) z^{-\gamma} dz dr ds \\
&= \int_0^\infty \int_D [p_D(r,x,z) - p_D(t+r,x,z)] f(r) z^{-\gamma} dz dr \\
&= x^{\alpha/2-\beta} - \int_0^\infty \int_D p_D(t+r,x,z) f(r) z^{-\gamma} dz dr \\
&= x^{\alpha/2-\beta} - \int_0^\infty \int_D \int_D p_D(t,x,y) p_D(r,y,z) f(r) z^{-\gamma} dy dz dr \\
&= x^{\alpha/2-\beta} - \int_D p_D(t,x,y) y^{\alpha/2-\beta} dy.
\end{aligned}$$

□

Zauważmy, że biorąc w Lemacie 3.4 $\beta \to 0$, mamy

$$\int_D p_D(t,x,y) y^{\alpha/2} dy = x^{\alpha/2}, \qquad t > 0,\ x \in D. \tag{3.6}$$

Ustalmy

$$\begin{gathered}
\delta \in (0, 1/2], \quad \kappa = \kappa_\delta, \\
h(x) = x^{\alpha/2-\delta}, \quad q(x) = \kappa x^{-\alpha}.
\end{gathered}$$

Dla $t > 0$ i $x, y \in \mathbb{R}$ niech $p_0(t,x,y) = p_D(t,x,y)$ oraz

$$\begin{aligned}
p_n(t,x,y) &= \int_0^t \int_D p_D(s,x,z) q(z) p_{n-1}(t-s,z,y) dz ds \\
&= \int_0^t \int_D p_{n-1}(s,x,z) q(z) p_D(t-s,z,y) dz ds, \qquad n \geq 1.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Definiujemy zaburzenie schrödigerowskie p_D przez q:

$$\tilde{p}(t,x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t,x,y), \qquad t > 0,\ x,y \in D. \tag{3.8}$$

Oczywiście $p_D(t,x,y) \le \tilde{p}(t,x,y)$. Dla $\tilde{p}$ zachodzi równanie Chapmana-Kołmogorowa ([8])

$$\int_D \tilde{p}(s,x,z)\tilde{p}(t,z,y)dz = \tilde{p}(t+s,x,y), \tag{3.9}$$

oraz formuła Duhamela

$$\tilde{p}(t,x,y) = p_D(t,x,y) + \int_0^t \int_D p_D(s,x,z)q(z)\tilde{p}(t-s,z,y)dzds \tag{3.10}$$

$$= p_D(t,x,y) + \int_0^t \int_D \tilde{p}(s,x,z)q(z)p_D(t-s,z,y)dzds, \qquad t > 0, x,y \in D. \tag{3.11}$$

Funkcja $\tilde{p}(t,x,y)$ jest skończona dla $t > 0$, $x > 0$ oraz prawie wszystkich $y \in D$ czego dowodzi poniższy lemat (zob. [24, Twierdzenie 1] przy ogólniejszych założeniach).

Lemat 3.5. *Dla $t, x > 0$*

$$\int_D \tilde{p}(t,x,y)h(y)dy \le h(x). \tag{3.12}$$

Dowód. Wykażemy, że dla $n = 0, 1, \ldots$ zachodzi

$$\sum_{k=0}^{n} \int_D p_k(t,x,y)h(y)dy \le h(x). \tag{3.13}$$

Z Lematu 3.4 nierówność jest prawdziwa dla $n = 0$. Następnie stosujemy indukcję. Załóżmy, że zachodzi (3.13). Wtedy

$$\sum_{k=1}^{n+1} \int_D p_k(t,x,y)h(y)dy \le \int_D \int_0^t \int_D p_D(s,x,z)q(z) \sum_{k=0}^{n} p_k(t-s,z,y)h(y)dzdsdy$$
$$\le \int_0^t \int_D p_D(s,x,z)q(z)h(z)dzds \le h(x),$$

gdzie druga nierówność wynika z założenia indukcyjnego, a trzecia z Lematu 3.4. Przechodząc z n do nieskończoności otrzymujemy tezę lematu. □

Dla $\tilde{p}$ tak jak dla p_D zachodzi własność skalowania.

Lemat 3.6. *Dla $t > 0$, $x, y \in D$ mamy*

$$\widetilde{p}(t,x,y) = t^{-1/\alpha}\widetilde{p}(1, xt^{-1/\alpha}, yt^{-1/\alpha}). \tag{3.14}$$

Dowód. Pokażemy za pomocą indukcji, że

$$p_n(t,x,y) = t^{-1/\alpha}p_n(1, xt^{-1/\alpha}, yt^{-1/\alpha}). \tag{3.15}$$

Ze skalowania p_D warunek (3.15) jest spełniony dla $n = 0$. Załóżmy teraz, że zachodzi (3.15). Wtedy

$$\begin{aligned}
p_{n+1}(t,x,y) &= \int_0^t \int_D p_D(s,x,z)q(z)p_n(t-s,z,y)dzds \\
&= t\int_0^1 \int_D p_D(tu,x,z)q(z)p_n(t(1-u),z,y)dzdu \\
&= t^{1-2/\alpha}\int_0^1 \int_D p_D(u,xt^{-1/\alpha},zt^{-1/\alpha})q(z)p_n(1-u,zt^{-1/\alpha},yt^{-1/\alpha})dzdu \\
&= t^{1-2/\alpha}\int_0^1 \int_D p_D(u,xt^{-1/\alpha},w)t^{-1}q(w)p_n(1-u,w,yt^{-1/\alpha})t^{1/\alpha}dwdu \\
&= t^{-1/\alpha}p_{n+1}(1,xt^{-1/\alpha},yt^{-1/\alpha}).
\end{aligned}$$

Zatem równość jest prawdziwa dla każdego $n \geq 0$, więc zachodzi (3.14). □

3.4 Funkcje niezmiennicze

Rozpoczniemy od wykazania, że funkcja κ_β dana w (2.1) jest rosnąca dla $\beta \in (0,1/2)$ i malejąca gdy $\beta \in (1/2,1)$ oraz osiąga swoje maksimum w $\beta = 1/2$ (zob. Rysunek 3.1). Udowodnimy ten fakt postępując tak jak w pracy [28]. Mamy

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{x+k} - \frac{1}{k+1}\right),$$

gdzie γ jest stałą Eulera-Mascheroniego. Biorąc pochodną z $\log(\kappa_\beta)$ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\frac{\kappa_\beta'}{\kappa_\beta} &= -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta+\alpha/2+k} - \frac{1}{1-\beta+\alpha/2+k} - \frac{1}{\beta+k} + \frac{1}{1-\beta+k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2\beta-1}{(\beta+\alpha/2+k)(1-\beta+\alpha/2+k)} - \frac{2\beta-1}{(\beta+k)(1-\beta+k)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-2\beta)\alpha/2(2k+1+\alpha/2)}{(\beta+\alpha/2+k)(1-\beta+\alpha/2+k)(\beta+k)(1-\beta+k)}.
\end{aligned}$$

Zatem $\kappa_\beta' > 0$ dla $\beta \in (0,1/2)$, $\kappa_\beta' = 0$ gdy $\beta = 1/2$ oraz $\kappa_\beta' < 0$ gdy $\beta \in (1/2,1)$.

Twierdzenie 3.7. *Niech $\delta \in (0,1/2]$ oraz $\beta \in (0,1-\delta)\setminus\{\delta\}$. Dla $t>0$, $x \in D$, zachodzi*

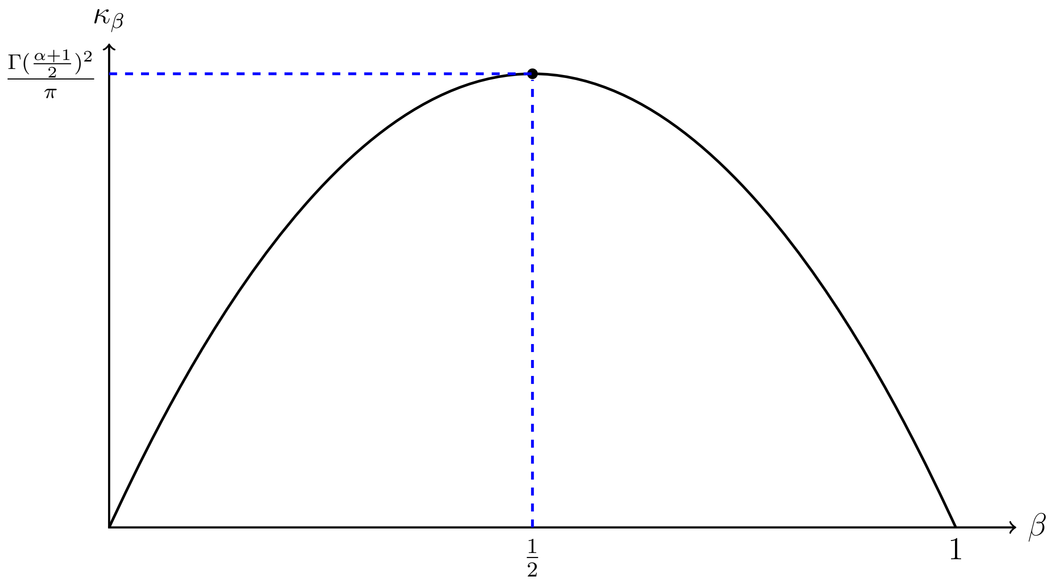
$$\int_D \widetilde{p}(t,x,y)y^{\alpha/2-\beta}dy = x^{\alpha/2-\beta} + (\kappa - \kappa_\beta)\int_0^t \int_D \widetilde{p}(s,x,y)y^{-\alpha/2-\beta}dyds. \tag{3.16}$$

Twierdzenie 3.8. *Niech $\delta \in (0,1/2]$. Wtedy dla każdego $x \in D$ i $t>0$, mamy*

$$\int_D \tilde{p}(t,x,y)y^{\alpha/2-\delta}dy = x^{\alpha/2-\delta}. \tag{3.17}$$

Z Twierdzenia 3.8 wynika, że funkcja $x^{\alpha/2-\delta}$ jest niezmiennicza dla gęstości $\tilde{p}$. Dodatkowo biorąc pod uwagę własności κ_β, z Twierdzenia 3.7 wynika, że funkcje $x^{\alpha/2-\beta}$ są podharmoniczne dla $0 < \beta \leq \delta$ i nadharmoniczne dla $\beta \in (\delta, 1-\delta)$.

Podobny rezultat udowodniono na $\mathbb{R}^d$ (zob. [24, Twierdzenie 3.1]). Idea dowodu Twierdzenia 3.7 oraz Twierdzenia 3.8 opiera się na przytoczonej pracy [24]. Dowód powyższych twierdzeń poprzedzimy kilkoma lematami pomocniczymi.



Rysunek 3.1: Rysunek poglądowy funkcji $\beta \to \kappa_\beta$.

Lemat 3.9. *Niech $R > \frac{1}{2}$. Istnieje stała c_0 taka, że dla $s \in (0,1)$ i $z < R$ zachodzi*

$$c_0 z^{\alpha/2} \leq \int_0^{2R} p_D(s,z,y) y^{\alpha/2} dy. \tag{3.18}$$

Dowód. Rozważmy $z < s^{\frac{1}{\alpha}}$. Mamy

$$\int_0^{2R} p_D(s,z,y) y^{\alpha/2} dy \geq c \int_0^{s^{1/\alpha}} \left(1 \wedge \frac{z^{\alpha/2}}{s^{1/2}}\right)\left(1 \wedge \frac{y^{\alpha/2}}{s^{1/2}}\right)\left(s^{-1/\alpha} \wedge \frac{s}{|z-y|^{1+\alpha}}\right) y^{\alpha/2} dy$$
$$\geq c \int_0^{s^{1/\alpha}} \frac{z^{\alpha/2}}{s^{1/2}} \frac{y^{\alpha/2}}{s^{1/2}} s^{-1/\alpha} y^{\alpha/2} dy = c z^{\alpha/2}.$$

Niech teraz $z \geq s^{\frac{1}{\alpha}}$. Mamy

$$\int_0^{2R} p_D(s,z,y) y^{\alpha/2} dy \geq c \int_z^{z+s^{1/\alpha}} \left(s^{-1/\alpha} \wedge \frac{s}{|z-y|^{1+\alpha}}\right) y^{\alpha/2} dy$$
$$\geq c \int_z^{z+s^{1/\alpha}} s^{-1/\alpha} z^{\alpha/2} dy = c z^{\alpha/2}.$$

□

Lemat 3.10. *Dla $\delta \in (0, 1/2)$ istnieje c taka, że dla każdego $t \in (0,\infty)$*

$$\int_0^\infty \widetilde{p}(t,x,y) y^{\alpha/2} dy \leq c x^{\alpha/2} (1 + t^{\delta/\alpha} x^{-\delta}). \tag{3.19}$$

Dowód. Na mocy Lematu 3.6 możemy przyjąć $t = 1$. Rozważmy dowolne $R \geq 1$,

$$\widetilde{p}(1,x,y) = p(1,x,y) + \int_0^1 \int_0^\infty \widetilde{p}(s,x,z) q(z) p_D(1-s,z,y) dz ds$$
$$= p(1,x,y) + \int_0^1 \int_0^R \widetilde{p}(s,x,z) q(z) p_D(1-s,z,y) dz ds$$
$$+ \int_0^1 \int_R^\infty \widetilde{p}(s,x,z) q(z) p_D(1-s,z,y) dz ds.$$

Zatem

$$\int_R^\infty \widetilde{p}(s,x,z)q(z)p_D(1-s,z,y)dz \le \frac{\kappa_\delta}{R^\alpha}\int_R^\infty \widetilde{p}(s,x,z)p_D(1-s,z,y)dz \le \frac{\kappa_\delta}{R^\alpha}\widetilde{p}(1,x,y),$$

ponieważ $R^\alpha \ge 1 \ge 2\kappa_\delta$, to $\left(1-\frac{\kappa_\delta}{R^\alpha}\right)^{-1} \le 2$. Stąd

$$\widetilde{p}(1,x,y) \le 2\left[p(1,x,y) + \int_0^1\int_0^R \widetilde{p}(s,x,z)q(z)p_D(1-s,z,y)dzds\right]. \tag{3.20}$$

Mnożąc (3.20) obustronnie przez $y^{\alpha/2}$ i całkując po D otrzymujemy

$$\int_D \widetilde{p}(1,x,y)y^{\alpha/2}dy \le \left(1-\frac{\kappa_\delta}{R^2}\right)^{-1}\left[x^{\alpha/2} + \int_0^1\int_0^R \widetilde{p}(s,x,z)q(z)z^{\alpha/2}dzds\right].$$

Na mocy Lematu 3.9

$$\begin{aligned}
&\int_0^1\int_0^R \widetilde{p}(s,x,z)q(z)z^{\alpha/2}dzds\\
&\le \frac{1}{c}\int_0^1\int_0^R \widetilde{p}(s,x,z)q(z)\int_0^{2R} p_D(1-s,z,y)y^{\alpha/2}dydzds\\
&\le \frac{1}{c}\int_0^{2R}\widetilde{p}(1,x,y)y^{\alpha/2}dy \le \frac{(2R)^\delta}{c}\int_0^{2R}\widetilde{p}(1,x,y)y^{\alpha/2-\delta}dy \le \frac{(2R)^\delta}{c}x^{\alpha/2-\delta},
\end{aligned}$$

co dowodzi tezy. □

Lemat 3.11. *Dla $t>0$, $x,y\in D$*

$$\int_0^t\int_0^\infty p_n(s,x,y)y^{-\alpha/2-\beta}dyds \le \frac{\kappa_\delta^n}{\kappa_\beta^{n+1}}x^{\alpha/2-\beta}. \tag{3.21}$$

Dowód. Dla $k=0$ nierówność wynika z Lematu 3.4. Niech $k=n+1$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^t\int_0^\infty p_{n+1}(s,x,y)y^{-\alpha/2-\beta}dyds\\
&= \int_0^t\int_0^\infty\int_0^s\int_0^\infty p_n(r,x,w)q(w)p_0(s-r,w,y)y^{-\alpha/2-\beta}dydrdwds\\
&= \int_0^t\int_0^\infty\int_0^{t-r}\int_0^\infty p_n(r,x,w)q(w)p_D(s,w,y)y^{-\alpha/2-\beta}dydsdwdr\\
&\le \int_0^t\int_0^\infty p_n(r,x,w)q(w)\frac{1}{\kappa_\beta}w^{\alpha/2-\beta}dwds\\
&= \frac{\kappa_\delta}{\kappa_\beta}\int_0^t\int_0^\infty p_n(r,x,w)w^{-\alpha/2-\beta}dwds \le \frac{\kappa_\delta^{n+1}}{\kappa_\beta^{n+2}},
\end{aligned}$$

gdzie pierwsza nierówność wynika z przypadku dla $k=0$, a nierówność druga z założenia indukcyjnego. □

Lemat 3.12. *Niech $t>0$, $x,y\in D$. Dla $n\ge 1$*

$$\begin{aligned}
&\kappa_\beta\int_0^t\int_D p_n(s,x,y)y^{-\alpha/2-\beta}dyds + \int_D p_n(t,x,y)y^{\alpha/2-\beta}dy\\
&= \kappa_\delta\int_0^t\int_0^\infty p_{n-1}(s,x,y)y^{-\alpha/2-\beta}dyds.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Dowód. Mamy

$$
\begin{aligned}
&\kappa_\beta \int_0^t \int_D p_n(s,x,y) y^{-\alpha/2-\beta} dyds \\
&= \kappa_\beta \int_0^t \int_D \int_0^s \int_D p_{n-1}(u,x,w) q(w) p_D(s-u,w,y) y^{-\alpha/2-\beta} dwdudyds \\
&= \kappa_\beta \int_0^t \int_D \int_0^{t-u} \int_D p_{n-1}(u,x,w) q(w) p_D(s,w,y) y^{-\alpha/2-\beta} dydsdwdu \\
&= \int_0^t \int_D p_{n-1}(u,x,w) q(w) \Big[w^{\alpha/2-\beta} - \int_D p_D(t-u,w,y) y^{\alpha/2-\beta} dy \Big] dwdu \\
&= \kappa_\delta \int_0^t \int_D p_{n-1}(u,x,w) w^{-\alpha/2-\beta} dwdu - \int_D p_n(t,x,y) y^{\alpha/2-\beta} dy.
\end{aligned}
$$

□

Ze wzorów (3.5) oraz (3.22) otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_D \sum_{n=0}^{N} p_n(s,x,y) y^{\alpha/2-\beta} dyds + \kappa_\beta \int_0^t \int_D p_N(s,x,y) y^{-\alpha/2-\beta} dyds \\
&= x^{\alpha/2-\delta} + (\kappa - \kappa_\beta) \int_0^t \int_D \sum_{n=0}^{N-1} p_n(s,x,y) y^{-\alpha/2-\beta} dyds.
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

Dowód Twierdzenia 3.7. Na mocy wzoru (3.23) wystarczy pokazać, że

$$
\lim_{N\to\infty} \int_0^t \int_D p_N(s,x,y) y^{-\alpha/2-\beta} dyds = 0. \tag{3.24}
$$

Wtedy z twierdzenia o zbieżności monotonicznej otrzymamy (3.16). Ponieważ $\tilde{p}(t,x,y) < \infty$ dla prawie wszystkich y mamy $\lim_{N\to\infty} p_N(s,x,y) = 0$. Na początku rozważamy przypadek gdy $\beta \in (\delta, 1-\delta)$ wówczas $\kappa_\beta > \kappa$ i (3.24) wynika z Lematu 3.11. Niech teraz $\beta < \delta$. Wskażemy całkowalną majorantę funkcji $p_N(s,x,y)$. Wtedy (3.24) będzie wynikało z twierdzenia o zbieżności zmajoryzowanej. Przypomnijmy, że $\int_D p_D(t,x,y) y^{\alpha/2} dy = x^{\alpha/2}$. Zatem z Lematu 3.10 mamy

$$
\int_D \tilde{p}(s,x,y) y^{\alpha/2} dy = x^{\alpha/2} + \kappa \int_0^t \int_D \tilde{p}(s,x,y) y^{-\alpha/2} dyds < \infty.
$$

Stąd

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \int_D p_N(s,x,y) y^{-\alpha/2-\beta} dyds \le \int_0^t \int_D p_N(s,x,y) (y^{-\alpha/2-\delta} + y^{-\alpha/2}) dyds \\
&\le \int_0^t \int_D p_N(s,x,y) y^{-\alpha/2-\delta} dyds + \int_0^t \int_D \tilde{p}(s,x,y) y^{-\alpha/2} dyds \\
&\le \frac{1}{\kappa} \left(\int_D \tilde{p}(t,x,y) y^{\alpha/2} dy + x^{\alpha/2-\delta} \right) < \infty.
\end{aligned}
$$

Korzystając ze wzoru (3.23) otrzymujemy

$$
\begin{aligned}
&(\kappa - \kappa_\beta) \int_0^t \int_D \sum_{n=0}^{N-1} p_n(s,x,y) y^{-\alpha/2-\beta} dyds \\
&\le \frac{\kappa_\beta}{\kappa} \left(x^{\alpha/2-\delta} + \int_D \tilde{p}(s,x,y) y^{\alpha/2} dy \right) + \int_0^t \int_D \tilde{p}(s,x,y) y^{\alpha/2-\beta} dyds.
\end{aligned}
$$

Zauważmy, że $y^{\alpha/2-\beta} \leq y^{\alpha/2-\delta} + y^{\alpha/2}$, zatem

$$
\begin{aligned}
&(\kappa - \kappa_\beta) \int_0^t \int_D \sum_{n=0}^{N-1} p_n(s,x,y) y^{-\alpha/2-\beta} dyds \\
&\leq \frac{\kappa_\beta}{\kappa} \left(x^{\alpha/2-\delta} + \int_D \tilde{p}(s,x,y) y^{\alpha/2} dy \right) + \int_0^t \int_D \tilde{p}(s,x,y)(y^{\alpha/2-\delta} + y^{\alpha/2}) dyds < \infty.
\end{aligned}
$$

Przechodząc z N do nieskończoności dostajemy

$$
(\kappa - \kappa_\beta) \int_0^t \int_D \tilde{p}(s,x,y) y^{-\alpha/2-\beta} dyds < \infty,
$$

czyli $\tilde{p}$ jest majorantą w całce (3.24). □

Dowód Twierdzenia 3.8. Rozważmy najpierw $\delta < 1/2$. Oznaczmy przez $p^*(t,x,y)$ zaburzenie schrödingerowskie $p_D(t,x,y)$ przez $q(x) = \kappa_{1/2} x^{-\alpha}$. Oczywiście $p_N < \tilde{p} < \tilde{p}^*$. Z dowodu Twierdzenia 3.7 mamy $\int_0^t \int_D \tilde{p}^*(s,x,y) y^{-\beta-\alpha/2} dyds < \infty$. Zatem $\tilde{p}^*$ jest majorantą p_N i dostajemy (3.24). Teraz teza twierdzenia wynika ze wzoru (3.23) oraz twierdzenia o zbieżności monotonicznej.
Dla $\delta = 1/2$ rozważamy $0 < \beta < \delta$. Wtedy $y^{\alpha/2-\beta} < y^{\alpha/2-\delta} + y^{\alpha/2}$ oraz $\int_D \tilde{p}(t,x,y)(y^{\alpha/2-\delta} + y^{\alpha/2}) dy < \infty$. Z Twierdzenia 3.7 mamy $\int_D \tilde{p}(t,x,y) y^{\alpha/2-\beta} dy \geq x^{\alpha/2-\beta}$, zatem biorąc $\beta \to \delta$, z twierdzenia Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej mamy

$$
\int_D \tilde{p}(t,x,y) y^{\alpha/2-\delta} dy \geq x^{\alpha/2-\delta}.
$$

Teraz teza wynika z Lematu 3.12. □

Rozdział 4

Nierówność Hardy'ego

W niniejszym rozdziale udowodnimy nierówność Hardy'ego dla gęstości przejścia $p_D(t,x,y)$.

Przyjmujemy założenia z Paragrafu 3.2. Niech $L^2(X,m)$ będzie przestrzenią funkcji rzeczywistych na X, mierzalnych względem miary m i całkowalnych z kwadratem. Przez $\langle \cdot, \cdot \rangle$ oznaczać będziemy iloczyn skalarny na tejże przestrzeni dany wzorem

$$\langle u, v \rangle = \int_X u(x)v(x)m(dx), \qquad u, v \in L^2(X,m).$$

Definicja 4.1. Będziemy mówili, że $(\mathcal{E}, \mathcal{D}(\mathcal{E}))$ jest symetryczną formą na $L^2(X,m)$, jeśli $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ jest gęstą liniową podprzestrzenią na $L^2(X,m)$ oraz

- $\mathcal{E}(u,v) = \mathcal{E}(v,u), \qquad u, v \in \mathcal{D}(\mathcal{E}),$
- $\mathcal{E}(u,u) \geq 0, \qquad u \in \mathcal{D}(\mathcal{E}),$
- $\mathcal{E}(au_1 + bu_2, v) = a\mathcal{E}(u_1, v) + b\mathcal{E}(u_2, v), \qquad u_1, u_2 \in \mathcal{D}(\mathcal{E}),\ a, b \in \mathbb{R}.$

Przestrzeń $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ nazywamy dziedziną formy $\mathcal{E}$.

Definicja 4.2. Formę symetryczną $\mathcal{E}$ na $L^2(X,m)$ nazywamy domkniętą, jeśli przestrzeń $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ jest zupełna z normą

$$||u||_{\mathcal{E}_1} := \sqrt{\mathcal{E}(u,u) + ||u||^2}.$$

Definicja 4.3. Formę symetryczną $\mathcal{E}$ na $L^2(X,m)$ nazywamy symetryczną formą markowską, jeśli dla $u \in \mathcal{D}(\mathcal{E})$

$$u^* := (0 \vee u) \wedge 1 \in \mathcal{D}(\mathcal{E}) \text{ i } \mathcal{E}(u^*, u^*) \leq \mathcal{E}(u,u).$$

Definicja 4.4. Formą Dirichleta nazywamy symetryczną formę $\mathcal{E}$ na $L^2(X,m)$, która jest domknięta i markowska.

Niech $(p_t)_{t \geq 0}$ będzie półgrupą markowską oraz

$$p_t u(x) = \mathbb{E}^x[u(X_t)].$$

Dla $t > 0$ i $u, v \in L^2(X,m)$ definiujemy

$$\mathcal{E}^{(t)}(u,v) := \frac{1}{t}\langle u - p_t u, v \rangle.$$

Powyższa równość definiuje symetryczną formę $\mathcal{E}^{(t)}$ na $L^2(X,m)$. Dla każdego $u \in L^2(X,m)$ forma $\mathcal{E}^{(t)}(u,u)$ jest nieujemna. Forma $\mathcal{E}^{(t)}$ jest niemalejąca gdy t zbiega do 0, zatem istnieje

$$\mathcal{E}(u,u) = \lim_{t\to 0} \mathcal{E}^{(t)}(u,u), \qquad u \in L^2(D).$$

Dziedziną formy $\mathcal{E}$ jest zbiór

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \{u \in L^2(D) : \mathcal{E}(u,u) < \infty\},$$

okazuje się, że $\mathcal{E}$ jest formą Dirichleta.

Niech funkcje f, h, q będą zdefiniowane tak samo jak w Paragrafie 3.2. W pracy [28] udowodniono

Twierdzenie 4.5. *Jeśli $u \in L^2(X,m)$ oraz $u = 0$ na $\{x \in X : h(x) = 0$ lub $\infty\}$, to*

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u,u) &\geq \int_X u(x)q(x)m(dx)\\ &+ \liminf_{t\to 0} \int_X \int_X \frac{p_t(x,y)}{2t}\left(\frac{u(x)}{h(x)} - \frac{u(y)}{h(y)}\right)^2 h(y)h(x)m(dy)m(dx).\end{aligned}$$

Jeśli $f(t) = t_+^\gamma$, gdzie $\gamma \geq 0$, we wzorze (3.3) lub ogólniej, jeśli f jest absolutnie ciągła oraz istnieje $\delta > 0$ oraz $c < \infty$, takie, że

$$[f(s) - f(s-t)]/t \leq cf'(s) \text{ dla wszystkich } s > 0 \text{ oraz } 0 < t < \delta,$$

to dla każdego $u \in L^2(X,m)$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u,u) &= \int_D u(x)q(x)m(dx)\\ &+ \liminf_{t\to 0} \int_X \int_X \frac{p_t(x,y)}{2t}\left(\frac{u(x)}{h(x)} - \frac{u(y)}{h(y)}\right)^2 h(y)h(x)m(dy)m(dx).\end{aligned}$$

Oznaczmy przez $p_t^D(x,y) = p_D(t,x,y)$. Zatem w naszym przypadku półgrupą markowską jest $(p_t^D)_{t\geq 0}$. Rozważamy przestrzeń $L^2(D,m)$ (w skrócie $L^2(D)$) gdzie m jest miarą Lebesgue'a. Dla prostoty będziemy pisać $m(dx) = dx$. Ustalmy $\beta \in (0,1)$. Niech $h(x) = x^{\alpha/2-\beta}$ (Lemat 3.2) oraz $q(x) = \kappa_\beta x^{-\alpha}$ (Lemat 3.3). Udowodnimy lemat pomocniczy.

Lemat 4.6. *Niech $x, y \in D$. Zachodzi*

$$\lim_{t\to 0} \frac{p_D(t,x,y)}{t} = \nu(x-y).$$

Dowód. Ze wzoru Hunta,

$$\frac{p_D(t,x,y)}{t} = \frac{p(t,x,y)}{t} - \frac{\mathbb{E}^x[p(t-\tau_D, X_{\tau_D}, y)\mathbf{1}_{\{\tau_D<t\}}]}{t},$$

gdzie granicą pierwszego wyrażenia jest (zob. np. [31])

$$\lim_{t\to 0} \frac{p(t,x,y)}{t} = \nu(x-y).$$

Pozostało zatem wykazać, że drugie z wyrażeń zbiega do zera. Mamy

$$\frac{\mathbb{E}^x[p(t-\tau_D, X_{\tau_D}, y)\mathbf{1}_{\{\tau_D<t\}}]}{t} \le c\mathbb{E}^x\left[\frac{t-\tau_D}{|X_{\tau_D}-y|^{1+\alpha}}\mathbf{1}_{\{\tau_D<t\}}\right]t^{-1} \le \frac{c}{y^{1+\alpha}}\mathbb{P}^x(\tau_D<t).$$

Ze wzoru Ikedy-Watanaby oraz własności skalowania mamy,

$$\mathbb{P}^x(\tau_D<t) = \int_D\int_{D^c}\int_0^t p_D(s,x,y)\nu(z-y)dsdydz =$$

$$c\int_D\int_0^t p_D(s,x,y)y^{-\alpha}dsdy = c\int_D\int_0^{tx^{-\alpha}} p_D(s,1,y)y^{-\alpha}dsdy.$$

Dla t takich, że $tx^{-\alpha}<1$, z Lematu 2.2 mamy

$$\int_D\int_0^{tx^{-\alpha}} p_D(s,1,y)y^{-\alpha}dsdy \le ct.$$

Przechodząc z t do 0 otrzymujemy tezę. □

Twierdzenie 4.7. *Jeśli $u\in L^2(D)$, wtedy*

$$\mathcal{E}(u,u) = \kappa_\beta\int_D \frac{u^2(x)}{x^\alpha}dx \tag{4.1}$$

$$+\frac{1}{2}\int_D\int_D\left(\frac{u(x)}{x^{\alpha/2-\beta}}-\frac{u(y)}{y^{\alpha/2-\beta}}\right)^2 x^{\alpha/2-\beta}y^{\alpha/2-\beta}\nu(x-y)dxdy. \tag{4.2}$$

Dowód. Ponieważ spełnione są założenia Twierdzenia 4.5, mamy

$$\mathcal{E}(u,u) =\kappa_\beta\int_D \frac{u(x)}{x^{\alpha/2}}dx \tag{4.3}$$

$$+\lim_{t\to0}\int_D\int_D\left(\frac{u(x)}{x^{\alpha/2-\beta}}-\frac{u(y)}{y^{\alpha/2-\beta}}\right)^2 x^{\alpha/2-\beta}y^{\alpha/2-\beta}\frac{p_D(t,x,y)}{2t}dxdy. \tag{4.4}$$

Z Lematu 4.6 mamy

$$\lim_{t\to0}\frac{p_D(t,x,y)}{t} = \nu(x-y),$$

zatem wystarczy pokazać, że możemy wejść z granicą pod całkę. Zauważmy, że $\frac{p_D(t,x,y)}{t}\le \nu(x-y)$, zatem jeśli

$$\int_D\int_D\left(\frac{u(x)}{x^{\alpha/2-\beta}}-\frac{u(y)}{y^{\alpha/2-\beta}}\right)^2 x^{\alpha/2-\beta}y^{\alpha/2-\beta}\nu(x-y)dxdy<\infty,$$

stosujemy twierdzenie Lebesgue'a o zbieżności zmajoryzowanej. Jeśli

$$\int_D\int_D\left(\frac{u(x)}{x^{\alpha/2-\beta}}-\frac{u(y)}{y^{\alpha/2-\beta}}\right)^2 x^{\alpha/2-\beta}y^{\alpha/2-\beta}\nu(x-y)dxdy=\infty,$$

to teza wynika z Lematu Fatou. □

Ponieważ κ_β jest rosnąca na $(0,1/2)$ i malejąca na $(1/2,1)$ dostajemy (zob. także [31, (1.5)]).

Wniosek 4.8 (Nierówność Hardy'ego)**.** *Dla $u\in L^2(D)$ mamy*

$$\mathcal{E}(u,u)\ge\frac{\Gamma((\alpha+1)/2)^2}{\pi}\int_D\frac{u^2(x)}{x^\alpha}dx.$$

W [31] zostało pokazane, że stała $\frac{\Gamma((\alpha+1)/2)^2}{\pi}$ w powyższej nierówności jest najlepsza z możliwych. To znaczy dla każdego $c>\frac{\Gamma((\alpha+1)/2)^2}{\pi}$ istnieje funkcja $u\in D(\mathcal{E})$ taka, że

$$\mathcal{E}(u,u)<c\int_D\frac{u^2(x)}{x^\alpha}dx.$$

Bibliografia

[1] J. L. Doob, *Semimartingales and subharmonic functions*, Trans. Amer. Math. Soc. **77** (1954), 86–121, DOI 10.2307/1990680.

[2] Sidney C. Port and Charles J. Stone, *Brownian motion and classical potential theory*, Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978. Probability and Mathematical Statistics. MR0492329

[3] Joseph L. Doob, *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1984 edition. MR1814344

[4] G. A. Hunt, *Markoff processes and potentials. I, II*, Illinois J. Math. **1** (1957), 44–93, 316–369. MR91349

[5] ———, *Markoff processes and potentials. III*, Illinois J. Math. **2** (1958), 151–213. MR107097

[6] Kai Lai Chung and Zhong Xin Zhao, *From Brownian motion to Schrödinger's equation*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], vol. 312, Springer-Verlag, Berlin, 1995. MR1329992

[7] Krzysztof Bogdan, Tomasz Byczkowski, Tadeusz Kulczycki, Michal Ryznar, Renming Song, and Zoran Vondraček, *Potential analysis of stable processes and its extensions*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1980, Springer-Verlag, Berlin, 2009. Edited by Piotr Graczyk and Andrzej Stos. MR2569321

[8] Krzysztof Bogdan, Wolfhard Hansen, and Tomasz Jakubowski, *Time-dependent Schrödinger perturbations of transition densities*, Studia Math. **189** (2008), no. 3, 235–254, DOI 10.4064/sm189-3-3. MR2457489

[9] Krzysztof Bogdan and Tomasz Jakubowski, *Estimates of heat kernel of fractional Laplacian perturbed by gradient operators*, Comm. Math. Phys. **271** (2007), no. 1, DOI 10.1007/s00220-006-0178-y. MR2283957

[10] ———, *Estimates of the Green function for the fractional Laplacian perturbed by gradient*, Potential Anal. **36** (2012), no. 3, 455–481, DOI 10.1007/s11118-011-9237-x. MR2892584

[11] Krzysztof Bogdan, Tomasz Jakubowski, and Sebastian Sydor, *Estimates of perturbation series for kernels*, J. Evol. Equ. **12** (2012), no. 4, 973–984, DOI 10.1007/s00028-012-0164-0. MR3000465

[12] Zhen-Qing Chen, Panki Kim, and Renming Song, *Dirichlet heat kernel estimates for fractional Laplacian with gradient perturbation*, Ann. Probab. **40** (2012), no. 6, 2483–2538, DOI 10.1214/11-AOP682. MR3050510

[13] ———, *Stability of Dirichlet heat kernel estimates for non-local operators under Feynman-Kac perturbation*, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), no. 7, 5237–5270, DOI 10.1090/S0002-9947-2014-06190-4. MR3335416

[14] Tomasz Jakubowski, *On combinatorics of Schrödinger perturbations*, Potential Anal. **31** (2009), no. 1, 45–55, DOI 10.1007/s11118-009-9123-y. MR2507445

[15] Daehong Kim and Kazuhiro Kuwae, *General analytic characterization of gaugeability for Feynman-Kac functionals*, Math. Ann. **370** (2018), no. 1-2, 1–37, DOI 10.1007/s00208-017-1516-4. MR3747482

[16] Tadeusz Kulczycki, *Gradient estimates of q-harmonic functions of fractional Schrödinger operator*, Potential Anal. **39** (2013), no. 1, 69–98, DOI 10.1007/s11118-012-9322-9. MR3065315

[17] Renming Song, *Two-sided estimates on the density of the Feynman-Kac semigroups of stable-like processes*, Electron. J. Probab. **11** (2006), no. 6, 146–161, DOI 10.1214/EJP.v11-308. MR2217813

[18] Masayoshi Takeda, *Gaugeability for Feynman-Kac functionals with applications to symmetric α-stable processes*, Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), no. 9, 2729–2738, DOI 10.1090/S0002-9939-06-08281-5. MR2213753

[19] Pierre Baras and Jerome A. Goldstein, *The heat equation with a singular potential*, Trans. Amer. Math. Soc. **284** (1984), no. 1, 121–139, DOI 10.2307/1999277. MR742415

[20] Vitali Liskevich and Zeev Sobol, *Estimates of integral kernels for semigroups associated with second-order elliptic operators with singular coefficients*, Potential Anal. **18** (2003), no. 4, 359–390, DOI 10.1023/A:1021877025938. MR1953267

[21] Boumediene Abdellaoui, María Medina, Ireneo Peral, and Ana Primo, *The effect of the Hardy potential in some Calderón-Zygmund properties for the fractional Laplacian*, J. Differential Equations **260** (2016), no. 11, 8160–8206, DOI 10.1016/j.jde.2016.02.016. MR3479207

[22] ———, *Optimal results for the fractional heat equation involving the Hardy potential*, Nonlinear Anal. **140** (2016), 166–207, DOI 10.1016/j.na.2016.03.013. MR3492734

[23] Ali BenAmor, *The heat equation for the Dirichlet fractional Laplacian with Hardy's potentials: properties of minimal solutions and blow-up*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **66** (2021), no. 1, 43–66. MR4216547

[24] Krzysztof Bogdan, Tomasz Grzywny, Tomasz Jakubowski, and Dominika Pilarczyk, *Fractional Laplacian with Hardy potential*, Comm. Partial Differential Equations **44** (2019), no. 1, 20–50, DOI 10.1080/03605302.2018.1539102. MR3933622

[25] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*, 7th ed., Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2007. Translated from the Russian; Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey and Daniel Zwillinger; With one CD-ROM (Windows, Macintosh and UNIX). MR2360010

[26] Nobuyuki Ikeda and Shinzo Watanabe, *On some relations between the harmonic measure and the Lévy measure for a certain class of Markov processes*, J. Math. Kyoto Univ. **2** (1962), 79–95, DOI 10.1215/kjm/1250524975. MR142153

[27] Tomasz Jakubowski and Jian Wang, *Heat kernel estimates of fractional Schrödinger operators with negative Hardy potential*, Potential Anal. **53** (2020), no. 3, 997–1024, DOI 10.1007/s11118-019-09795-7. MR4140086

[28] Krzysztof Bogdan, Bartłomiej Dyda, and Panki Kim, *Hardy inequalities and non-explosion results for semigroups*, Potential Anal. **44** (2016), no. 2, 229–247, DOI 10.1007/s11118-015-9507-0. MR3460023

[29] Mateusz Kwaśnicki, *Fractional Laplace operator and its properties*, Handbook of fractional calculus with applications. Vol. 1, De Gruyter, Berlin, 2019, pp. 159–193. MR3888401

[30] Mateusz Kwaśnicki, *Ten equivalent definitions of the fractional laplace operator*, Fractional Calculus and Applied Analysis **20** (2017), no. 1, 7–51, DOI doi:10.1515/fca-2017-0002.

[31] Krzysztof Bogdan and Bartłomiej Dyda, *The best constant in a fractional Hardy inequality*, Math. Nachr. **284** (2011), no. 5-6, 629–638, DOI 10.1002/mana.200810109. MR2663757

[32] Krzysztof Bogdan, Tomasz Grzywny, and Michał Ryznar, *Heat kernel estimates for the fractional Laplacian with Dirichlet conditions*, Ann. Probab. **38** (2010), no. 5, 1901–1923, DOI 10.1214/10-AOP532. MR2722789