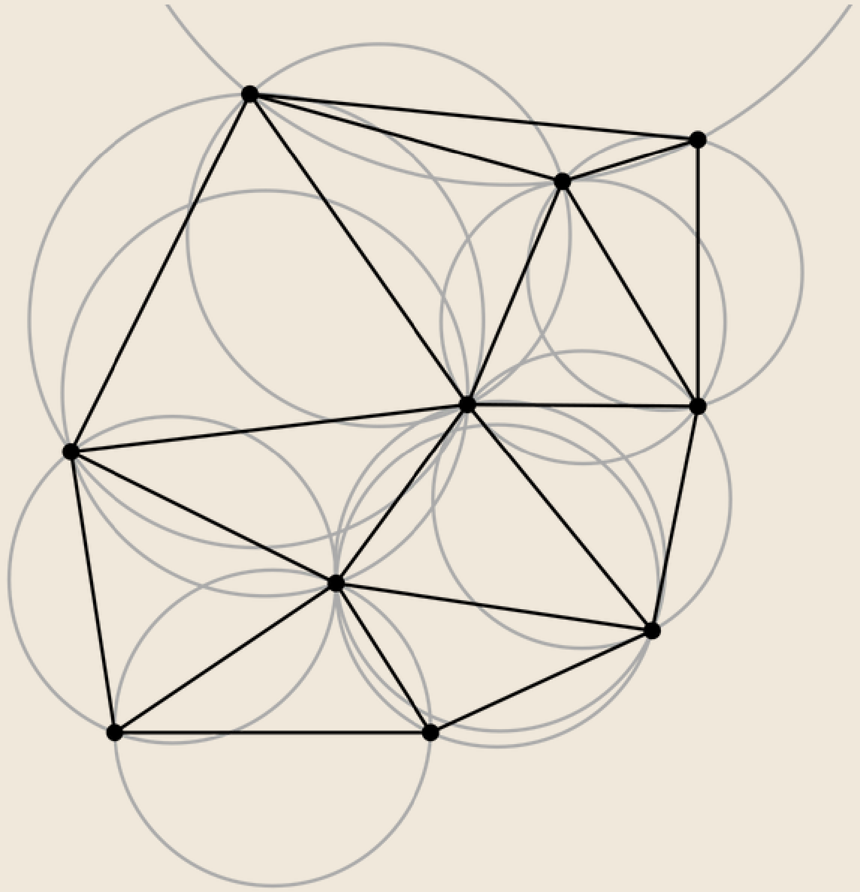
TRIANGULACJA DELAUNAY'A

Autorzy: Paweł Małkowski Wojciech Palczewski

BORYS NIKOLAYEVICH DELAUNAY

Znany również jako Borys Delaunay - rosyjski matematyk francuskiego pochodzenia. W roku 1934 wprowadził pojęcie triangulacji Delone.



OPIS PROBLEMU

Kontekst:

- Rozważamy skończony zbiór punktów na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$.
- Każdemu punktowi przypisujemy wysokość za pomocą funkcji $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
- Zbiór punktów wraz z funkcją f definiujemy jako Teren, stanowiący model topologii (np. gór).

Cel:

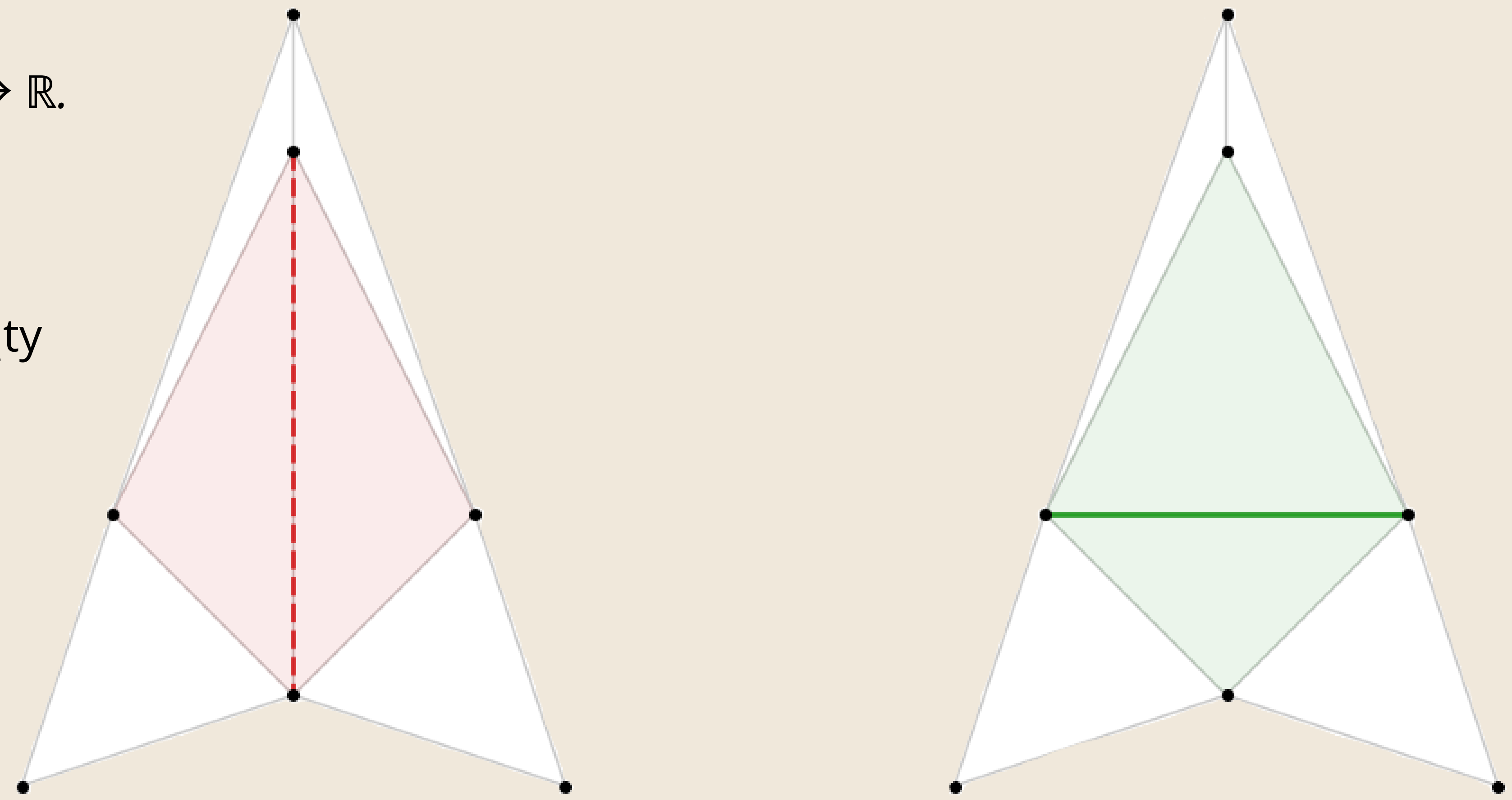
- Wygenerować triangulację maksymalizującą minimalny kąt trójkąta. Trójkąty mają być jak najbardziej zbliżone do równobocznych.

Dlaczego nie każda siatka jest dobra?:

- Dowolne połączenie punktów w trójkąty nie wystarczy, ponieważ mogą powstać trójkąty „długie i ostre".
- Takie zniekształcenia powodują, że model terenu staje się nieczytelny i niedokładny

Rozwiązanie:

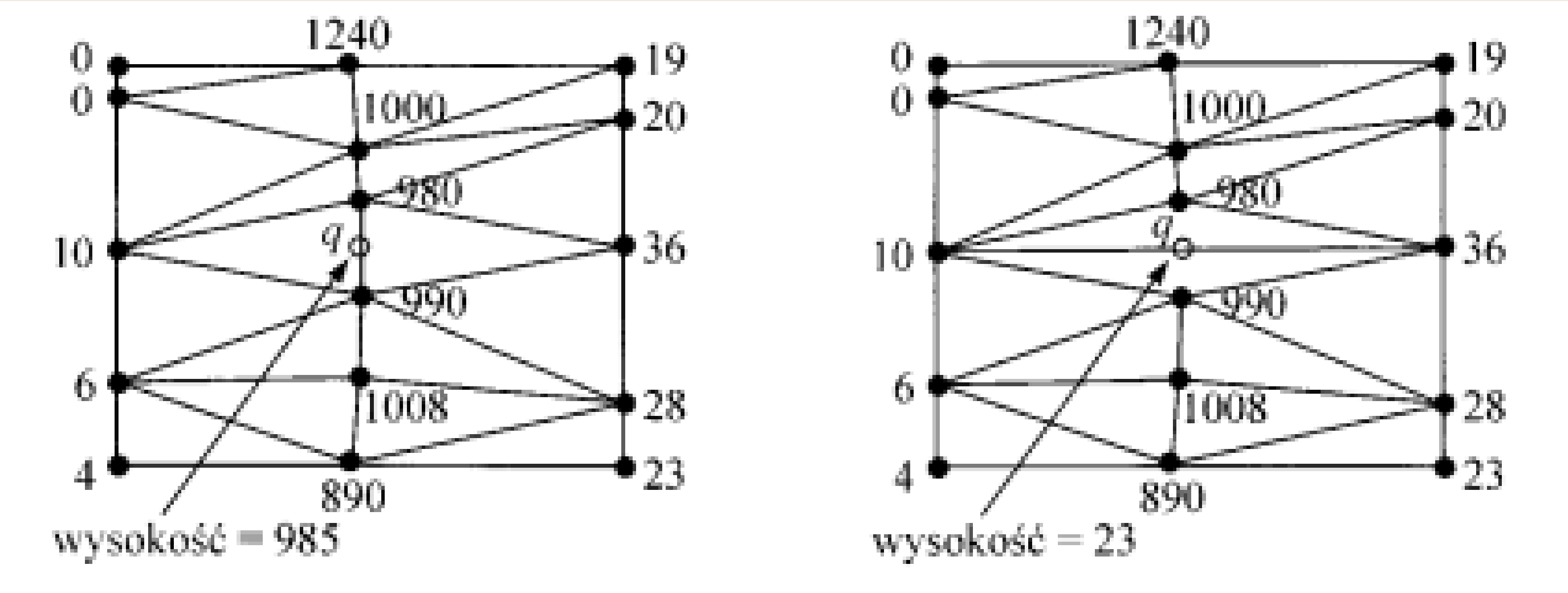
- Szukamy triangulacji **optymalnej**, czyli takiej, która maksymalizuje najmniejsze kąty trójkątów.
- To właśnie zapewnia **Triangulacja Delaunay'a**, tworząc najbardziej naturalną i regularną siatkę.



CZYM WYRÓŻNIA SIĘ TRIANGULACJA DELAUNAY'A

Dla każdej triangulacji możemy wyznaczyć wektor kątów *A(T)* będący wszystkimi kątami *m* trójkątów tworzących triangulacje w kolejności leksykograficznej. Triangulację nazywamy Delone (Delaunay'a) gdy wektor *A(T)* jest maksymalny.

Drugą definicją triangulacji Delone jest brak krawędzi nielegalnych, czyli takich po których przekręceniu rośnie wektor *A(T).*



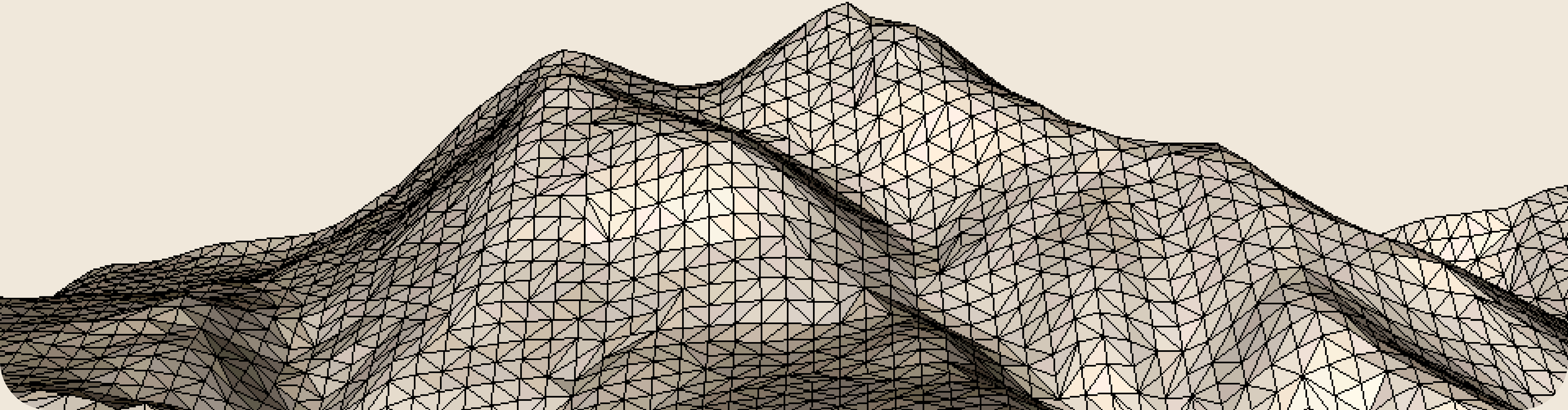
Po lewej stronie triangulacja Delone, po prawej dowolna triangulacja

Wektor kątów:

$$A\left(T\right) = \left[\alpha_{1,}\alpha_2, \ldots, \alpha_{3m}\right]$$

KIEDY WYKORZYSTUJEMY TRIANGULACJE DELAUNAY'A?

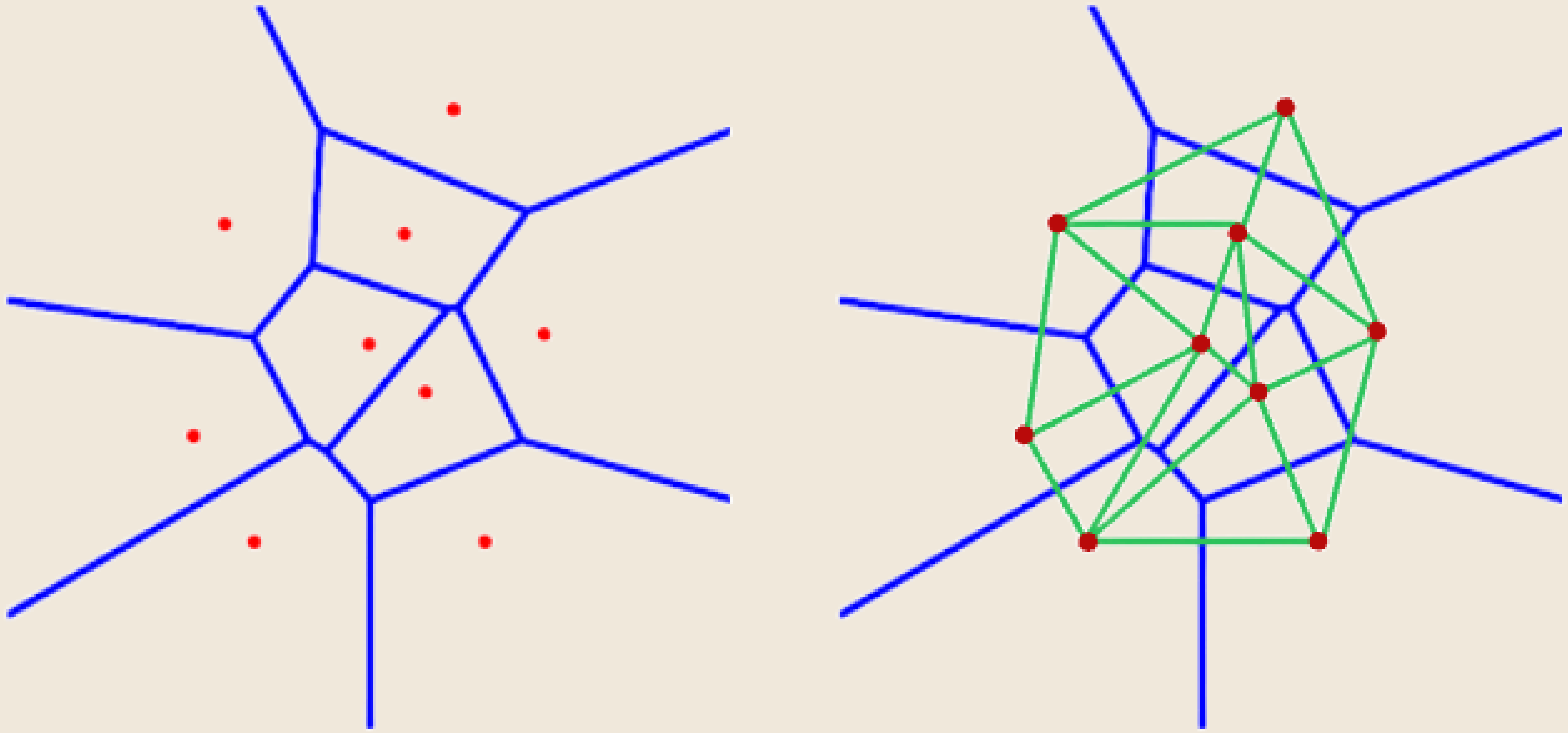
Triangulacja Delaunay'a wykorzystywana jest do tworzenia siatek dla np. dwuwymiarowego zbioru punktów wraz z wysokościami będących modelem topologii pewnego obszaru geograficznego. Dzięki zastosowaniu tej metody umożliwione jest estymowanie wysokości punktów, których wysokości nie znamy.



ZALEŻNOŚĆ MIĘDZY DIAGRAMAMI VORONOI, A TRIANGULACJĄ DELAUNAY’A

Graf Delaunay’a jest prostoliniowym zanurzeniem grafu odpowiadającego diagramowi Voronoi. Ponadto graf Delaunay’a zawsze będzie grafem planarnym.

Łączenie centrów sąsiednich komórek Voronoi za pomocą odcinków, prowadzi to utworzenia triangulacji Delaunay’a



JAKIE SĄ SPOSOBY WYZNACZANIA TRIANGULACJI DELAUNAY’A?

Wyznaczenie triangulacji Delaunay’a chmury punktów może dokonać w następujące sposoby:

- połaczenie centrów komórek diagramu Voronoi
- sprawdzanie każdej możliwej triangulacji (jest ich skończona liczba jednak algorytm nie będzie szybki)
- metoda obracania krawędzi nielegalnych
- idea Bowyera-Watsona (algorytm przyrostowy)

W naszej prezentacji zajęliśmy się ostatnim sposobem. Rozważamy również usprawnienia przyśpieszające działanie algorytmu.

ALGORYTM ODWRACANIA KRAWĘDZI

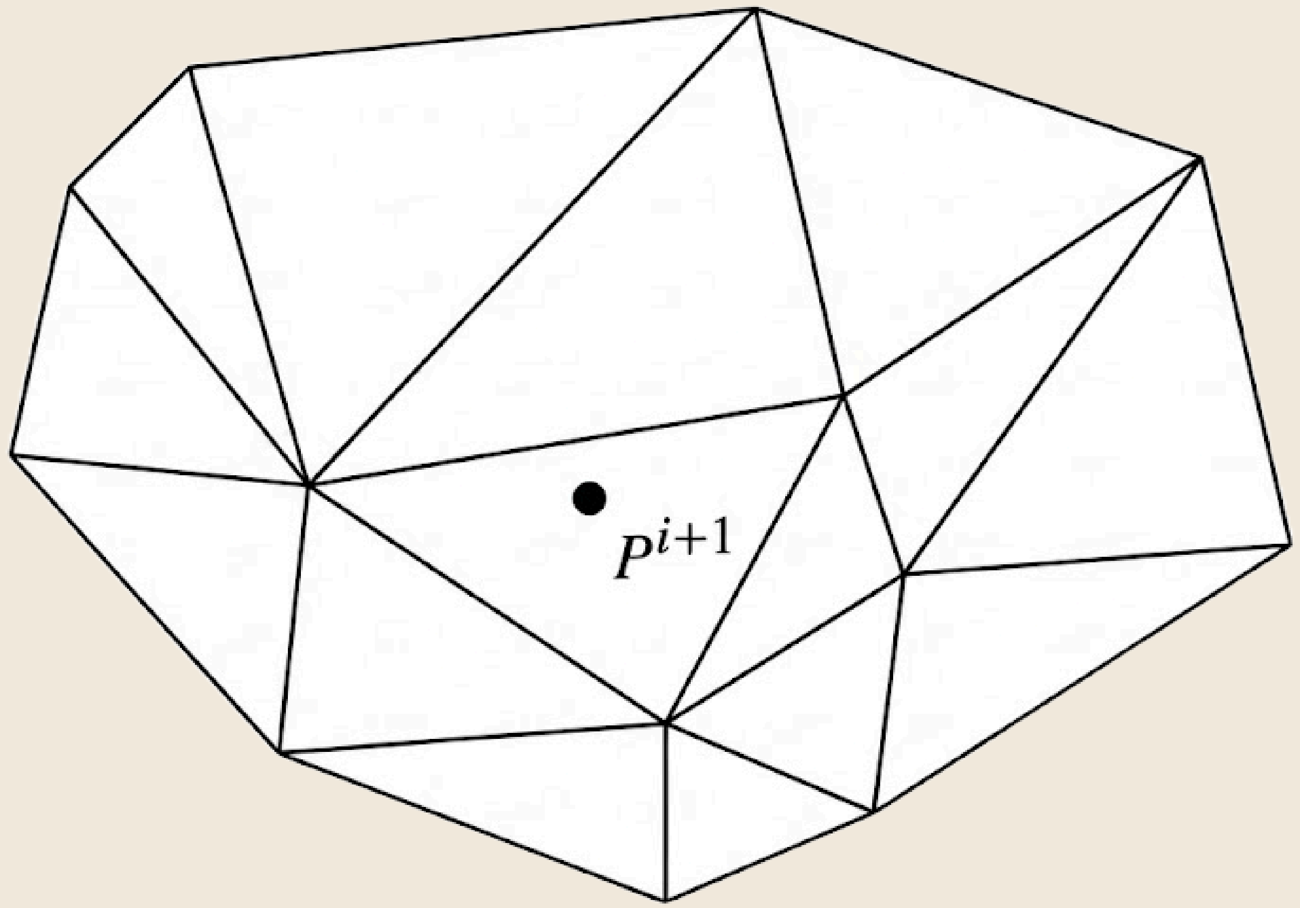
Jest to algorytm zachłanny polegający na wyznaczeniu dowolnej triangulacji, a następnie na przejściu przez wszystkie jej krawędzie sprawdzając czy któraś krawędź jest nielegalna. Jeśli tak, obracamy ją tak długo, aż stanie się legalna.
Złożoność czasowa tego algorytmu to $O(n^2)$

Wizualizacja obrotu nielegalnej krawędzi:

IDEA BOWYERA-WATSONA

Oba zaimplementowane algorytmy realizują koncepcję Bowyera-Watsona w celu wyznaczenia poprawnej triangulacji Delaunay’a. Proces ten odbywa się w następujących krokach:

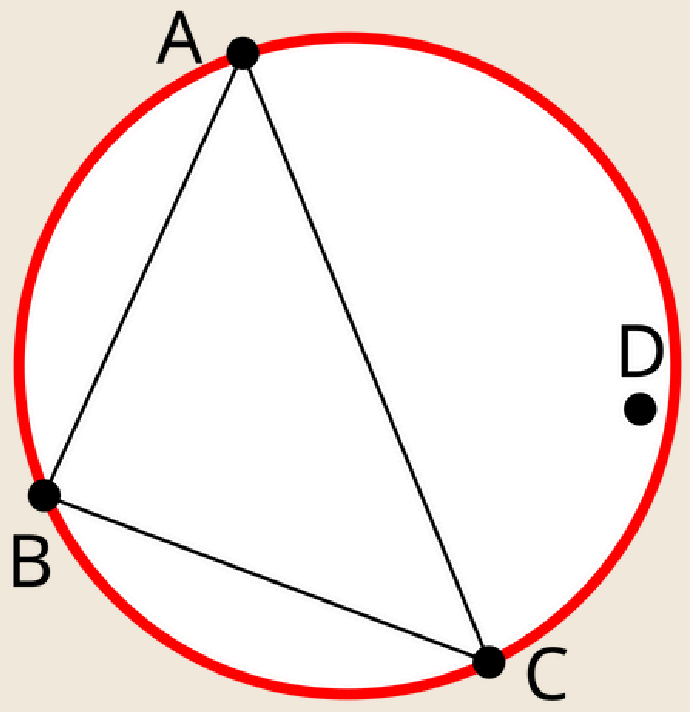
1. **Stworzenie „supertrójkąta”** – zawierającego wewnątrz wszystkie punkty chmury poddawanej triangulacji. Dzięki temu otrzymujemy początkową triangulację Delaunay’a T_0.
2. **Dodanie punktu p_{i+1}** – do istniejącej triangulacji T_{i+1} w celu wyznaczenia kolejnej triangulacji T_{i+1}.
3. **Odnalezienie trójkątów** – których koła opisane zawierają nowo dodany punkt. Zbiór tych trójkątów zostaje usunięty z triangulacji.
4. **Wypełnienie „wnęki”** – pusta przestrzeń powstała po usunięciu trójkątów stanowi spójny wielokąt. Algorytm łączy punkt p_{i+1} ze wszystkimi wierzchołkami brzegu tej wnęki, tworząc wachlarz nowych, poprawnych trójkątów wypełniających obszar.



WARUNEK DELAUNAY'A

Niech *A*, *B* i *C* będą wierzchołkami trójkąta ułożonymi w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara, a D będzie punktem, którego położnie badamy względem okregu opisanego na trójkącie *ABC.* Wówczas dodatni znak wyznacznika macierzy znajdującej się poniżej oznacza, że punkt D znajduje się w środku okręgu opisanego na trójkącie *ABC*

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_x^2 + A_y^2 & 1 \\ B_x & B_y & B_x^2 + B_y^2 & 1 \\ C_x & C_y & C_x^2 + C_y^2 & 1 \\ D_x & D_y & D_x^2 + D_y^2 & 1 \end{vmatrix} > 0$$



KLASY UMOŻLIWIAJĄCE TRIANGULACJE DELAUNAY'A

Point:

- Przechowuje współrzędne kartezjańskie $p_i = (x, y)$.
- Implementuje metody do obliczania odległości euklidesowej
- Zapewnia stabilność numeryczną dzięki tolerancji EPS i zaokrąglaniu współrzędnych w haszowaniu.

Krawędź:

- Reprezentuje odcinek łączący dwa obiekty klasy **Point**.
- Struktura nieskierowana: (p_i, p_j) jest tożsama z (p_j, p_i).
- Sortowanie punktów przed haszowaniem zapewnia poprawne wykrywanie krawędzi granicznych podczas usuwania trójkątów.

Trójkąt

- Przechowuje trzy wierzchołki (p_i, p_j, p_k) oraz trzy krawędzie
- Wymusza orientację wierzchołków przeciwną do ruchu wskazówek zegara *(CCW)*.
- Przechowuje listę ***neighbours*** (referencje do sąsiadów), co umożliwia szybką nawigację po grafie triangulacji i wydajną lokalizację punktów.
- Zawiera test przynależności punktu do wnętrza (***is_inside***) oraz test okręgu opisanego (***is_in_circumcircle***), który jest warunkiem koniecznym triangulacji Delaunaya.

Cała struktura triangulacji przechowywana jest wewnątrz kolekcji typu ***set***, co zapewnia unikalność trójkątów i umożliwia usuwanie oraz dodawanie elementów w czasie stałym $O(1)$.

SPOSOBY PRZESZUKIWANIA TRÓJKĄTÓW W TRIANGULACJI CZYLI KLUCZ DO WYDAJNOSCI

Wydajność algorytmu Bowyera-Watsona jest głównie zdeterminowana przez szybkość lokalizacji trójkąta, w którym znajduje się nowo dodawany punkt. Poniżej przedstawiono dwa wybrane podejścia:

Metoda Podstawowa:

- **Mechanizm:** Identyfikacja trójkątów do usunięcia następuje poprzez przegląd wszystkich elementów aktualnej triangulacji.
- **Warunek geometryczny**: Dla każdego istniejącego trójkąta sprawdzane jest, czy nowo dodawany punkt znajduje się we wnętrzu koła opisanego na tym trójkącie.
- **Złożoność**: Pełny przegląd zbioru przy każdym wstawieniu punktu prowadzi do całkowitej złożoności obliczeniowej $O(N^2)$.

Metoda Przeszukiwania sąsiedztwa topologicznego:

- **Mechanizm:** Lokalizacja trójkąta zawierającego punkt odbywa się poprzez nawigację z wykorzystaniem sąsiedztwa topologicznego.
- **Przebieg:** Wyszukiwanie rozpoczyna się od ostatnio znalezionego trójkąta i przechodzi przez krawędzie do kolejnych sąsiadów w kierunku nowego punktu. Wierzchołki trójkątów posortowane są w kolejności CCW. Jeżeli nowy punkt znajduje się po prawej stronie danej krawędzi to przechodzimy do kolejnego trójkąta zbudowanego na tym odcinku.
- **Zakończenie:** Proces trwa do momentu trafienia na właściwy element siatki.
- **Złożoność:** Metoda ta zachowuje znacznie wyższą efektywność przy dużych zbiorach danych, zbliżoną do $O(N\sqrt{N})$.

BIBLIOGRAFIA

Literatura i źródła:

1. M. de Berg et al., Computational Geometry - Algorithms and Applications, Springer.
2. B. Głut, Wielościany Voronoi i triangulacja Delaunay’a, Wykład.
3. Wikipedia: Bowyer–Watson algorithm (dostęp online).
4. Wikipedia: Delaunay triangulation (dostęp online).