Rachunek macierzowy

Mnożenie macierzy metodą tradycyjną i rekurencyjną metodą Bineta

Paweł Surdyka, Hanc Bartosz

AGH

Zadanie

- Dla macierzy o rozmiarze mniejszym lub równym $2^l \times 2^l$ mnożenie algorytmem tradycyjnym. Dla macierzy o rozmiarze większym od $2^l \times 2^l$ mnożenie algorytmem rekurencyjny Binéta.
- Narysować wykres: rozmiar macierzy $2^k \times 2^k$ dla $k = 2, 3, 4, \ldots, 16$ względem czasu mnożenia.
- Narysować drugi wykres: rozmiar macierzy $2^k \times 2^k$ dla $k = 2, 3, 4, 16$ względem liczby operacji zmienno-przecinkowych.

Oba wykresy należy narysować dla różnych wartości l z przedziału

$2 < l < k$.

Mnożenie tradycyjne - pseudokod

```
Funkcja TraditionalMatrixMultiplication(A, B, n, Counter):
    Tworzymy macierz wynikową C o wymiarach n × n, wypełnioną zerami
    Dla i od 0 do n - 1:
        Dla j od 0 do n - 1:
            sum_val ← 0
            Dla k od 0 do n - 1:
                sum_val ← sum_val + (A[i][k] * B[k][j])   // Mnożenie i dodanie
            C[i][j] ← sum_val
    Zwróć C
```

Mnożenie tradycyjne - kod z wykładu

```
int mm()
{
  int i,j,k;
  double sum = 0;
  for (i = 0; i < SIZE; i++) { //rows in multiply
    for (j = 0; j < SIZE; j++) { //columns in multiply
      for (k = 0; k < SIZE; k++) { //columns in first and rows in second
        sum = sum + first[i][k]*second[k][j];
      }
      multiply[i][j] = sum;
      sum = 0;
    }
  }
  return 0;
}
```

Algorytm Bineta – ogólna zasada działania

Opis z wykładu:

$$\text{Klasyczny (Binét):} \begin{bmatrix} (A_{11}B_{11} + A_{12}B_{21}) & (A_{11}B_{12} + A_{12}B_{22}) \\ (A_{21}B_{11} + A_{22}B_{21}) & (A_{21}B_{12} + A_{22}B_{22}) \end{bmatrix}$$

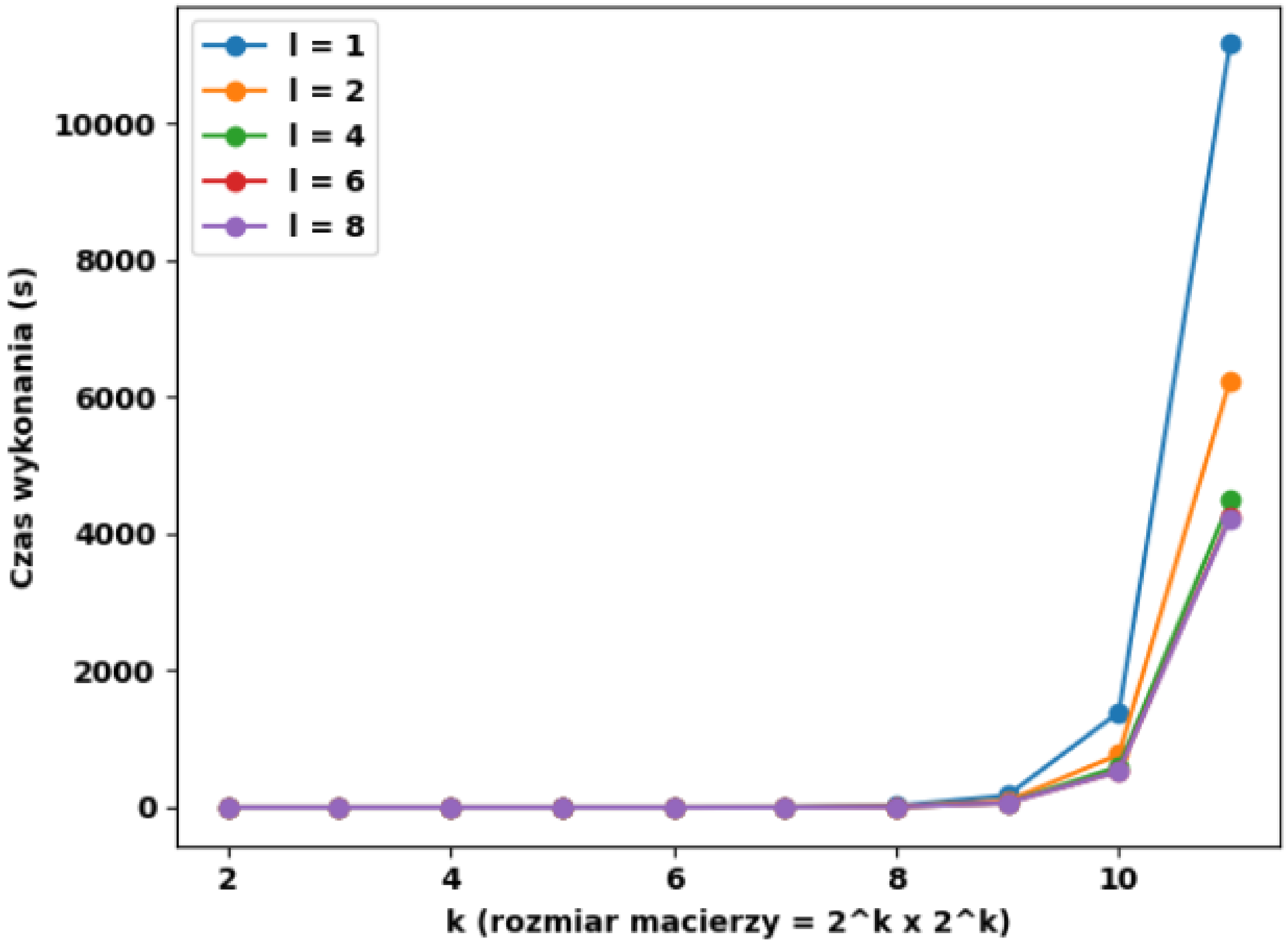
Każde mnożenie np. $A_{11} * B_{11}$ to rekurencyjne mnożenie bloków.

Koszt: 8 mnożeń ($\mathcal{O}((n/2)^3)$), 4 dodawania ($\mathcal{O}((n/2)^2)$)

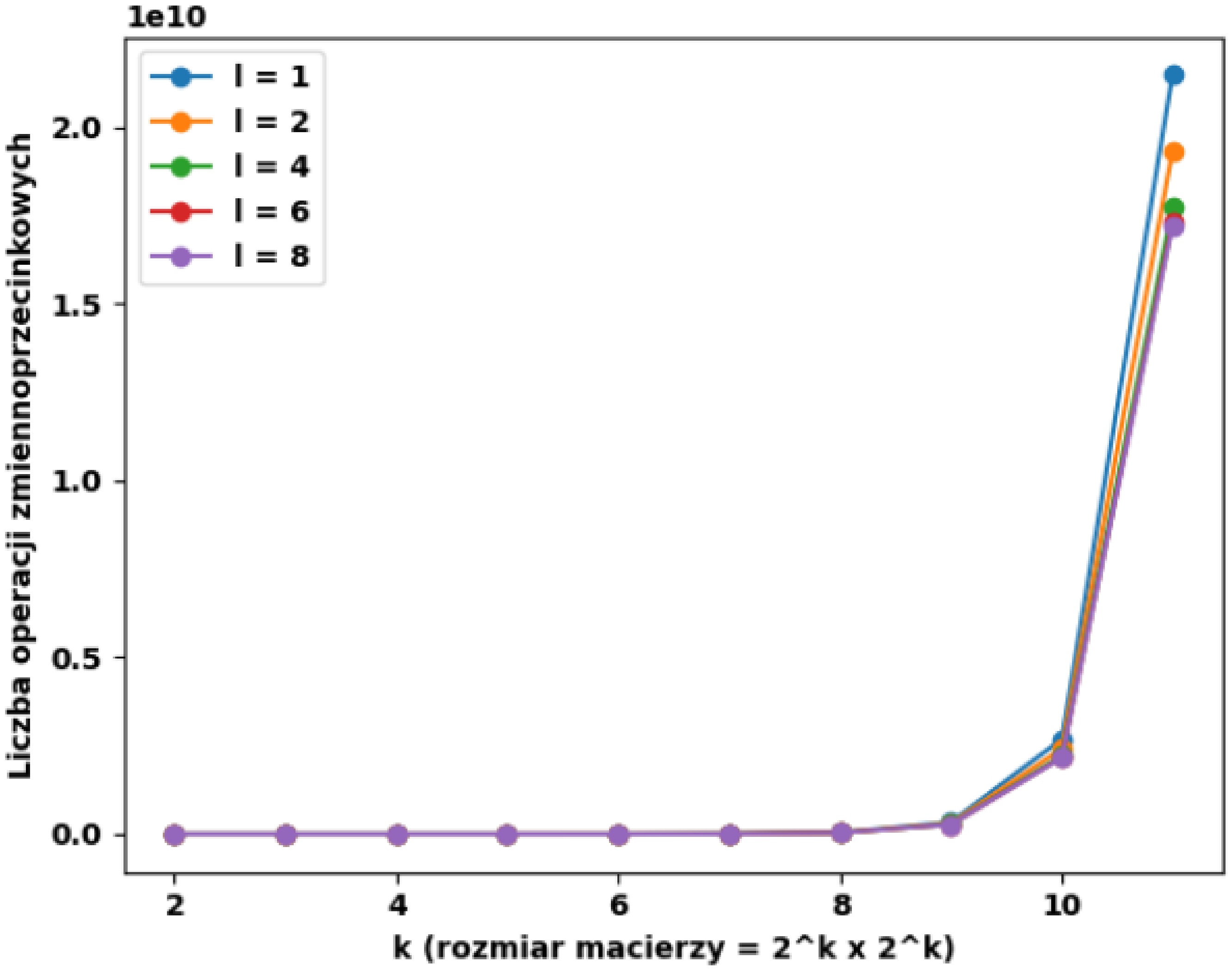
Algorytm Bineta – pseudokod

```
Funkcja RecursiveMatrixMultiplication(A, B, l, Counter):
    n ← długość A
    Jeżeli n = 1:
        Zwróć [[A[0][0] * B[0][0]]]

    Jeżeli n ≤ l:  // Gdy macierz jest mała, używamy tradycyjnego mnożenia
        Zwróć TraditionalMatrixMultiplication(A, B, Counter)

    W przecwinym wypadku rekurencyjnie liczymy podmacierze
        (A11, A12, A21, A22) ← PodzielMacierz(A)
        (B11, B12, B21, B22) ← PodzielMacierz(B)

        M1 ← RecursiveMatrixMultiplication(A11, B11, l, Counter)
        M2 ← RecursiveMatrixMultiplication(A12, B21, l, Counter)
        M3 ← RecursiveMatrixMultiplication(A11, B12, l, Counter)
        M4 ← RecursiveMatrixMultiplication(A12, B22, l, Counter)
        M5 ← RecursiveMatrixMultiplication(A21, B11, l, Counter)
        M6 ← RecursiveMatrixMultiplication(A22, B21, l, Counter)
        M7 ← RecursiveMatrixMultiplication(A21, B12, l, Counter)
        M8 ← RecursiveMatrixMultiplication(A22, B22, l, Counter)

        C11 ← AddMatrix(M1, M2, Counter)
        C12 ← AddMatrix(M3, M4, Counter)
        C21 ← AddMatrix(M5, M6, Counter)
        C22 ← AddMatrix(M7, M8, Counter)

    Zwróć PolaczMacierze(C11, C12, C21, C22)
```

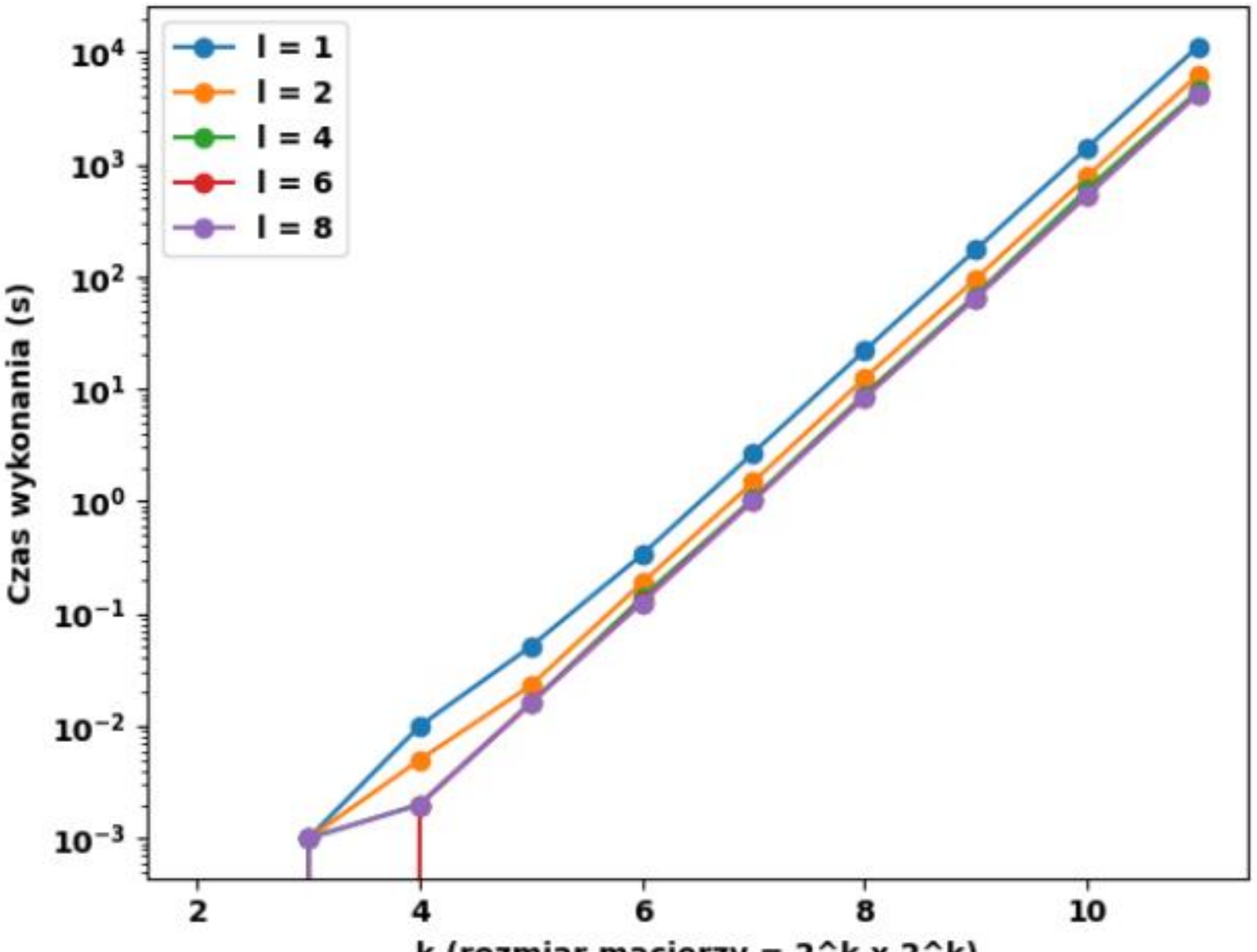
Wykres czasu wykonania od wielkości macierzy



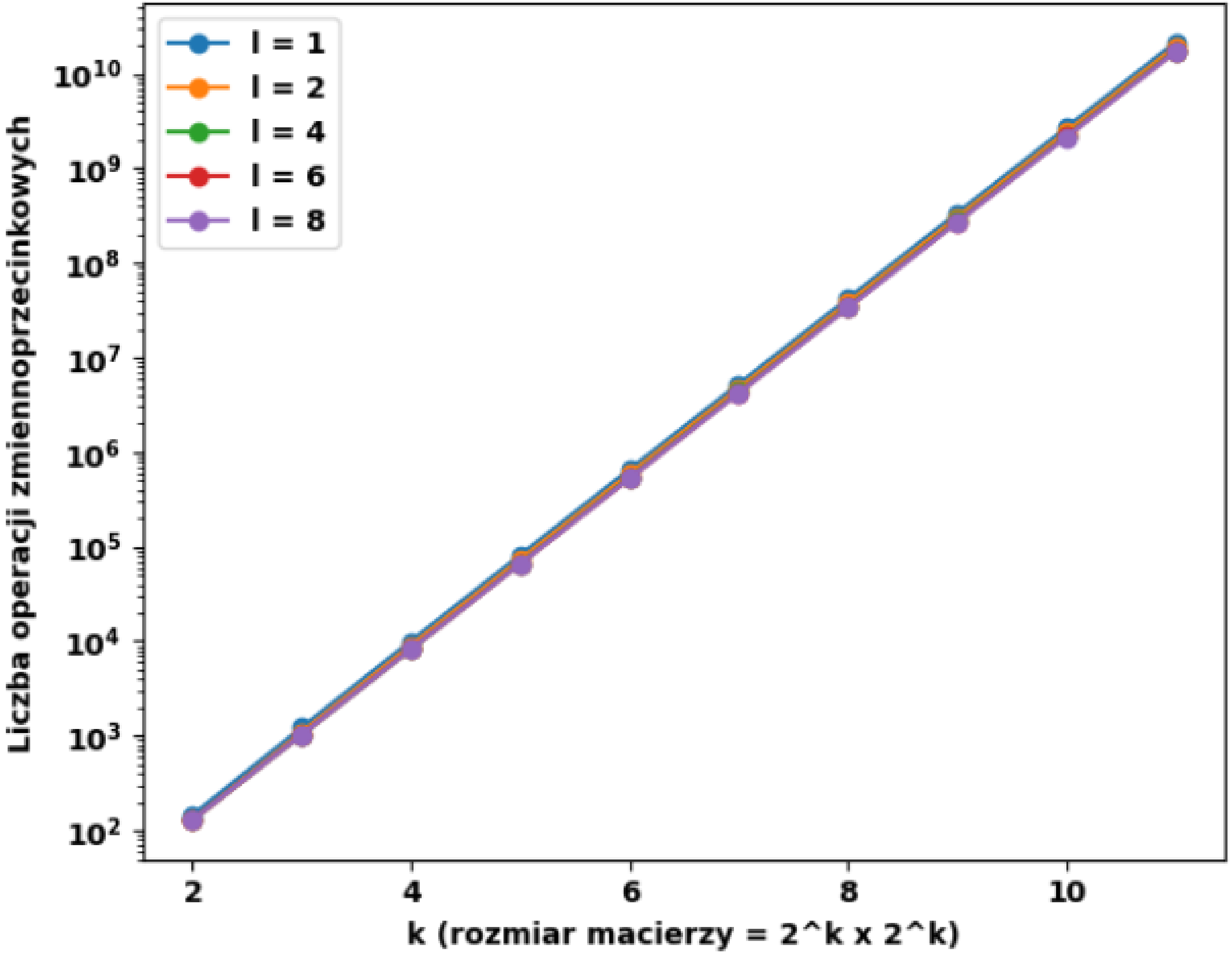
Wykres ilości operacji zmienno-przecinkowych od wielkości macierzy



Wykres logarytmiczny czasu wykonania od wielkości macierzy



Wykres ilości operacji zmienno-przecinkowych od wielkości macierzy



Wnioski

- Wyższe l zmniejsza czas działa i ilość operacji zmiennoprzecinkowych, ponieważ wcześniej przechodzimy na mnożenie tradycyjne, które jest bardziej efektywne niż rekurencyjna dekompozycja.
- Dla małych wartości l algorytm wykonuje więcej poziomów rekurencji, co zwiększa liczbę wywołań i operacji dodawania, powodując wydłużenie czasu działania.
- Zależność pomiędzy rozmiarem macierzy k a czasem wykonania jest wykładnicza.