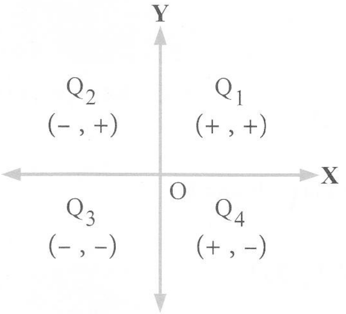
เรขาคณิตวิเคราะห์

1. พิกัด XY

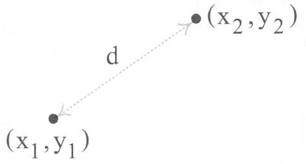
ระบบแกนพิกัดฉาก (Rectangular Coordinates) ใช้ในการอ้างอิงตำแหน่งของจุดด้วยแกน 2 แกน คือ แกน X และแกน Y โดยแกนทั้งสองตัดกันที่จุดกำเนิด (Origin : O) ซึ่งมีพิกัด (0, 0) และแกนทั้งสองแบ่งพื้นที่ออกเป็น 4 ส่วน แต่ละส่วนเรียกว่า **จตุภาค (Quadrant)** ดังรูป



การระบุตำแหน่งของจุดบนระนาบ XY จะเขียนชื่อจุดตามด้วยคู่อันดับ โดยสมาชิกตัวหน้าแสดงตำแหน่งของแกน X เรียกว่า abscissa และสมาชิกตัวหลังแสดงตำแหน่งของแกน Y เรียกว่า ordinate ในรูปแบบ P(x, y)

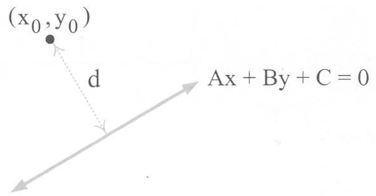
2. สูตรระยะห่าง

ระยะห่างระหว่าง "จุด" กับ "จุด"



$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

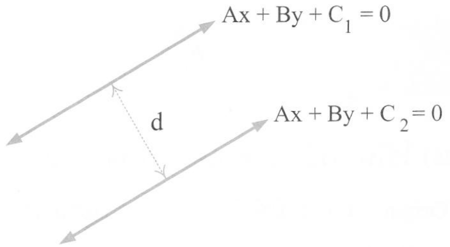
ระยะห่างระหว่าง "จุด" กับ "เส้นตรง"



$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

ระยะห่างระหว่าง "เส้นตรง" กับ "เส้นตรง"

ระยะห่างระหว่างเส้นตรงกับเส้นตรงจะหาได้ก็ต่อเมื่อ <u>เส้นตรงทั้งสองนั้นขนานกัน</u> เท่านั้น

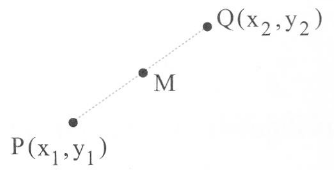


$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

3. สูตรจุดแบ่ง

จุดกึ่งกลาง (midpoint formula)

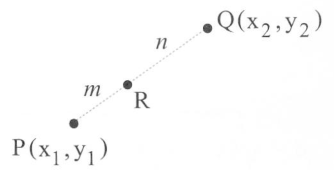
กำหนดให้ M เป็นจุดกึ่งกลางระหว่างจุด P และ Q



พิกัดของจุด M คือ $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

จุดแบ่งอัตราส่วน (ratio formula)

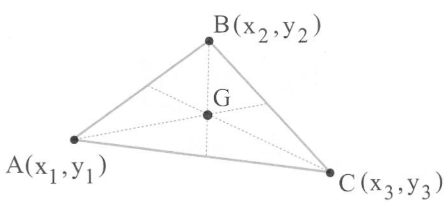
กำหนดให้ $\overline{PR} : \overline{QR} = m : n$



พิกัดของจุด R คือ $\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m + n}, \frac{my_2 + ny_1}{m + n}\right)$

จุดตัดของเส้นมัธยฐาน

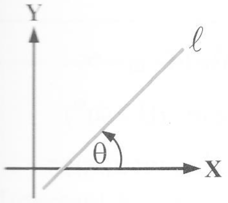
เส้นมัธยฐาน (median) คือ เส้นที่ลากจากจุดยอดไปแบ่งครึ่งด้านตรงข้าม



พิกัดของจุด G คือ $\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

4. ความชัน (slope : m)

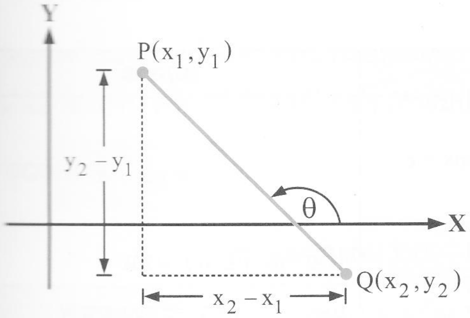
มุมเอียง (angle of inclination)



มุมเอียง (θ) คือ มุมที่เล็กที่สุดซึ่งวัดจากแกน X ในทิศทวนเข็ม–นาฬิกามายังเส้นตรง ℓ

สูตรหาความชัน

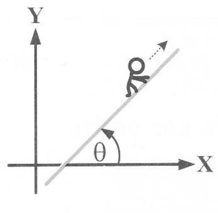
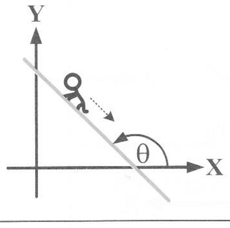
ความชันของเส้นตรงที่ลากเชื่อม $P(x_1, y_1)$ และ $Q(x_2, y_2)$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ m

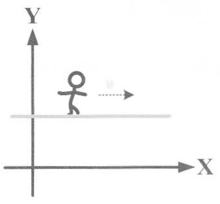
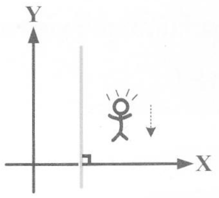


$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$$

ประเภทของความชัน

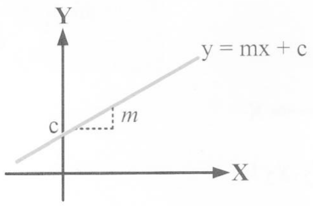
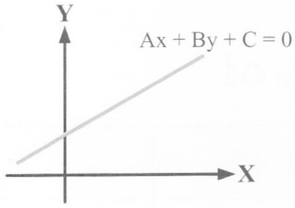
ความชันของเส้นตรงแบ่งได้เป็น 4 ประเภท ดังนี้

	รูปตัวอย่าง	ข้อสรุปสำคัญ
①		• ความชันเป็นบวก : $m > 0$ • มุมเอียงเป็นมุมแหลม ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) • จินตนาการว่า *คนกำลังขึ้นเขา*
②		• ความชันเป็นลบ : $m < 0$ • มุมเอียงเป็นมุมป้าน ($90^\circ < \theta < 180^\circ$) • จินตนาการว่า *คนกำลังลงเขา*

③		• ความชันเป็นศูนย์ : m = 0 • มุมเอียง = 0 องศา ($\theta = 0^\circ$) • จินตนาการว่า *เดินบนพื้นราบ (ไม่มีความชัน)* • เส้นตรงขนานกับแกน X
④		• ความชันหาค่าไม่ได้ : m = ∞ • มุมเอียง = 90 องศา ($\theta = 90^\circ$) • จินตนาการว่า *ชันมากจนตกเขา* • เส้นตรงขนานกับแกน Y

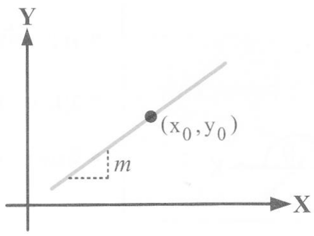
5. สมการเส้นตรง

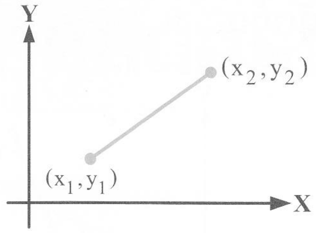
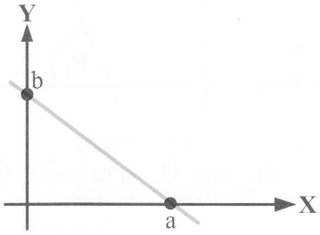
รูปแบบสมการเส้นตรง

รูปแบบ	กราฟ	สมการ
1. **รูปมาตรฐาน**		y = mx + c เมื่อ m คือ ความชัน และ c คือ ระยะตัดแกน Y
2. **รูปทั่วไป**		Ax + By + C = 0 ความชัน = $-\dfrac{A}{B}$

วิธีการสร้างสมการเส้นตรง

ในการสร้างสมการเส้นตรง จะต้องรู้ 2 อย่าง คือ *ความชัน* และ *จุดผ่าน*

รูปแบบ	กราฟ	สมการ
1. Point – Slope Form (รู้จุดและความชัน)		$y - y_0 = m(x - x_0)$

2. **Point – Point Form** (รู้จุดสองจุด)		$y - y_1 = \left(\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)(x - x_1)$
3. **Intercept Form** (รู้ระยะตัดแกนทั้งสอง)		$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

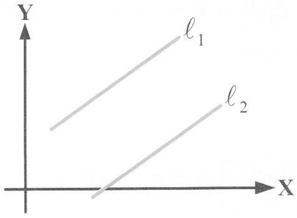
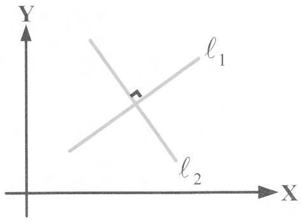
จุดตัดของกราฟ

หาจุดตัดของกราฟได้โดยการแก้ระบบสมการ อาจใช้ **วิธีแทนค่า** (จัดรูปสมการใดสมการหนึ่งแล้วนำไปแทนในอีกสมการ) หรือ **วิธีกำจัดตัวแปร** (ทำสัมประสิทธิ์ของตัวแปรในสองสมการให้เท่ากันแล้วบวกลบกัน)

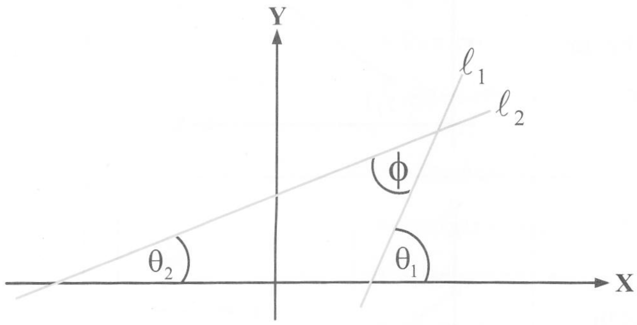
จุดตัดแกน

	จุดตัดแกน X (X – intercept)	**จุดตัดแกน Y (Y – intercept)**
วิธีหา	ให้ $y = 0$ แล้วแก้สมการหาค่า x	ให้ $x = 0$ แล้วแก้สมการหาค่า y
คำตอบ	ค่า x ที่ได้ เรียกว่า ระยะตัดแกน X จุดตัดแกน X ต้องตอบในรูป $(x, 0)$	ค่า y ที่ได้ เรียกว่า ระยะตัดแกน Y จุดตัดแกน Y ต้องตอบในรูป $(0, y)$

6. ขนานและตั้งฉาก

ขนาน	**ตั้งฉาก**
	
เส้นตรง ℓ_1 ขนานกับ ℓ_2 เมื่อ $m_{\ell_1} = m_{\ell_2}$	เส้นตรง ℓ_1 ตั้งฉากกับ ℓ_2 เมื่อ $m_{\ell_1} \cdot m_{\ell_2} = -1$

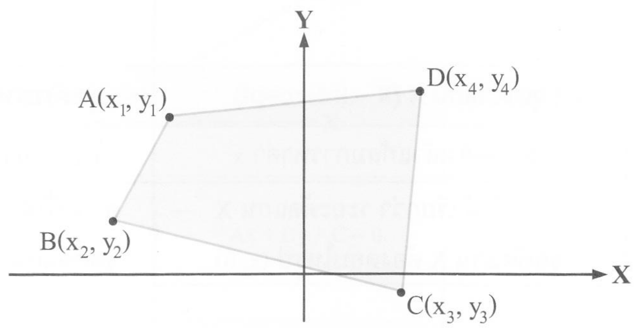
7. มุมระหว่างเส้นตรงที่ตัดกัน



จากรูป ℓ_1 และ ℓ_2 มีมุมเอียงเท่ากับ θ_1 และ θ_2 ตามลำดับ, ϕ เป็นมุมระหว่างเส้นตรง จะได้ว่า

$$\tan\phi = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

8. พื้นที่รูปหลายเหลี่ยม



พิจารณาตัวอย่างการหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยม ABCD (วิธีนี้ใช้ได้กับรูปกี่เหลี่ยมก็ได้ แต่ต้องยึดหลักต่อไปนี้)

1. ลงจุดในระนาบคร่าวๆ แล้ว นำพิกัดมาเขียนเรียงโดยเริ่มจากจุดใดก็ได้ ในที่นี้ ใช้จุด A เป็นจุดเริ่ม แล้วไล่จุดวนใน *ทิศทวนเข็มนาฬิกา* ไปเรื่อยๆ จนกลับมาที่จุดเริ่มอีกครั้ง เขียนได้ดังนี้

$$x_2y_1 \quad x_3y_2 \quad x_4y_3 \quad x_1y_4 = x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4 \rightarrow \text{ก้อนบน}$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$$

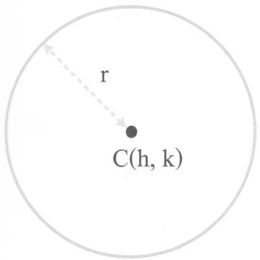
$$x_1y_2 \quad x_2y_3 \quad x_3y_4 \quad x_4y_1 = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1 \rightarrow \text{ก้อนล่าง}$$

2. คูณทแยงตามแนวเส้นประ แล้วนำผลคูณที่ได้มาบวกกันจะได้ *ผลรวมก้อนบน* และ *ผลรวมก้อนล่าง*
3. นำผลรวมก้อนล่าง <u>ลบด้วย</u> ผลรวมก้อนบน แล้วคูณด้วย $\frac{1}{2}$ ก็จะได้พื้นที่ตามต้องการ

ภาคตัดกรวย

1. วงกลม

สมการมาตรฐานของวงกลม



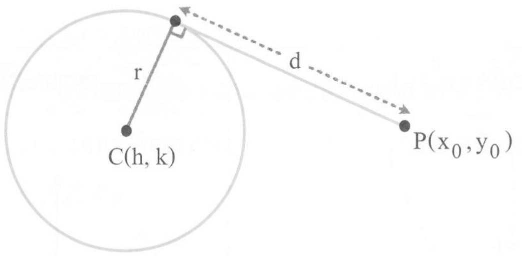
สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่ C(h, k) และมีรัศมี r หน่วย คือ

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

สมการทั่วไปของวงกลม

วงกลม $x^2+y^2+Ax+By+C=0$ มีจุดศูนย์กลางที่ $C\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}\right)$ และ $r=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2-4C}$

เส้นสัมผัสของวงกลม



- เส้นสัมผัสวงกลมตั้งฉากกับรัศมี ณ จุดสัมผัส
- ความยาวเส้นสัมผัสที่ลากจากจุดภายนอกวงกลม $P(x_0, y_0)$ มายังจุดสัมผัส (ระยะ d) หาได้จากสูตร

$$d=\sqrt{(x_0-h)^2+(y_0-k)^2-r^2} \quad \text{หรือ} \quad d=\sqrt{x_0^2+y_0^2+Ax_0+By_0+C}$$

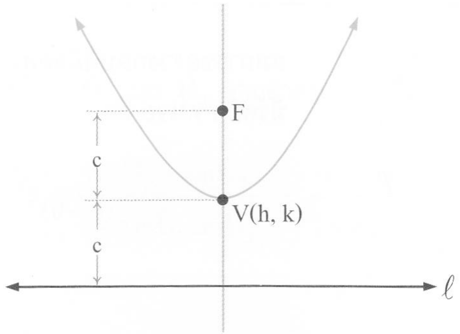
** แทนจุดดังกล่าวลงไปในสมการวงกลมที่จัดให้ฝั่งใดฝั่งหนึ่งเป็นศูนย์แล้วถอดรากที่สอง*

2. พาราโบลา

นิยามของพาราโบลา

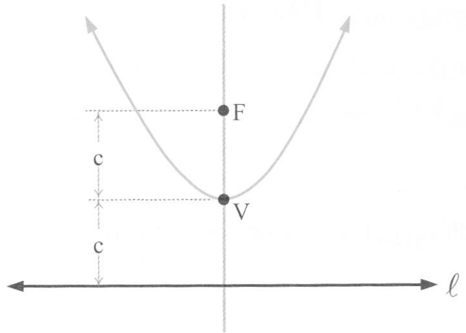
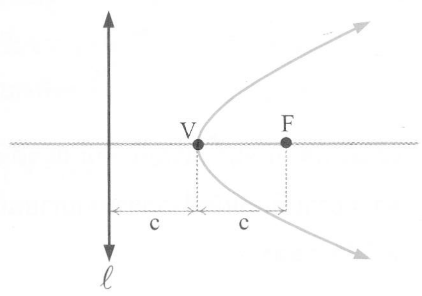
ระยะห่างระหว่างจุด ๆ หนึ่งบนพาราโบลากับจุดโฟกัส มีค่าเท่ากับระยะห่างจากจุด ๆ นั้นกับเส้นไดเรกตริกซ์

ส่วนประกอบของพาราโบลา



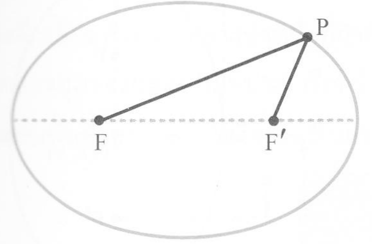
- **จุดยอด (จุดวกกลับ)** อยู่ที่ V(h, k)
- พาราโบลาโอบล้อม **จุดโฟกัส (F)** เสมอ โดยมีระยะห่างระหว่างจุดยอดกับจุดโฟกัส เท่ากับ c
- เส้นตรง ℓ ที่รองก้นของพาราโบลา เรียกว่า **เส้นไดเรกตริกซ์** ห่างจากจุดยอดเป็นระยะ c
- **ลาตัสเรกตัม (Latus Rectum)** คือ ความกว้างของพาราโบลา ณ ตำแหน่งโฟกัส ยาว 4c หน่วย

ประเภทของพาราโบลา

<table>
<tr><th colspan="3">หงาย – คว่ำ (x^2/y)</th><th colspan="3">ตะแคงซ้าย – ขวา (y^2/x)</th></tr>
<tr><td colspan="3">
</td><td colspan="3">
</td></tr>
<tr><td>รูปสมการ</td><td colspan="2">$(x-h)^2 = 4c(y-k)$</td><td>รูปสมการ</td><td colspan="2">$(y-k)^2 = 4c(x-h)$</td></tr>
<tr><td>ทิศทาง</td><td>หงาย : $c > 0$</td><td>คว่ำ : $c < 0$</td><td>ทิศทาง</td><td>เปิดขวา : $c > 0$</td><td>เปิดซ้าย : $c < 0$</td></tr>
</table>

3. วงรี

นิยามของวงรี

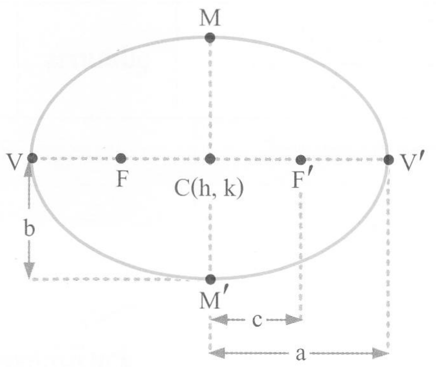


สำหรับทุกจุด P บนวงรี จะได้ว่า

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 2a$$

เรียก 2a ว่า *ค่าคงที่ของวงรี*

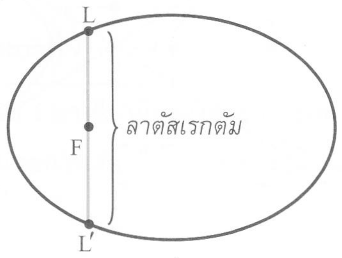
ส่วนประกอบของวงรี



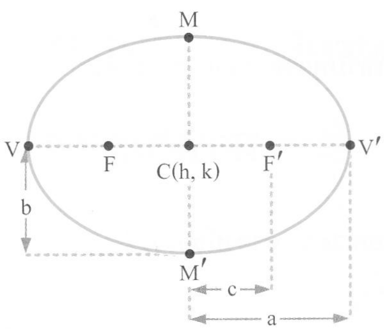
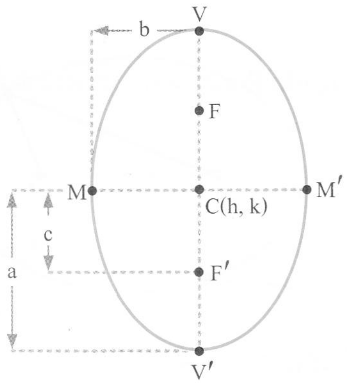
- **จุดศูนย์กลาง** ของวงรีอยู่ที่ C(h, k)
- **แกนเอก** คือ แกนที่ยาวกว่า มีความยาว 2a หน่วย, **จุดปลายแกนเอก (จุดยอด)** คือ V และ V′
- **แกนโท** คือ แกนที่สั้นกว่า มีความยาว 2b หน่วย, **จุดปลายแกนโท** คือ M และ M′
- **จุดโฟกัส** F และ F′ อยู่ในแนวเดียวกับแกนเอก ห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะ c หน่วย
- ความสัมพันธ์ของ a, b, c ในวงรี คือ

$$a^2 = b^2 + c^2$$

- **ลาตัสเรกตัม (Latus Rectum)** คือ ความกว้างของวงรี ณ ตำแหน่งโฟกัส เท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$ หน่วย

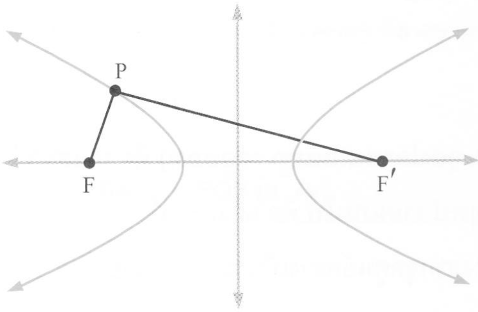


ประเภทของวงรี

วงรีตามแกน X (เลขมากอยู่ใต้ x^2)		วงรีตามแกน Y (เลขมากอยู่ใต้ y^2)	
			
รูปสมการ	$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	**รูปสมการ**	$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

4. ไฮเพอร์โบลา

นิยามของไฮเพอร์โบลา

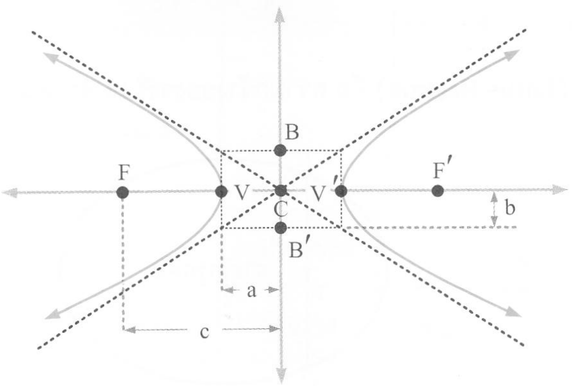


สำหรับทุกจุด P บนไฮเพอร์โบลา จะได้ว่า

$$\left|\overline{PF} - \overline{PF'}\right| = 2a$$

เรียก 2a ว่า *ค่าคงที่ของไฮเพอร์โบลา*

ส่วนประกอบของไฮเพอร์โบลา

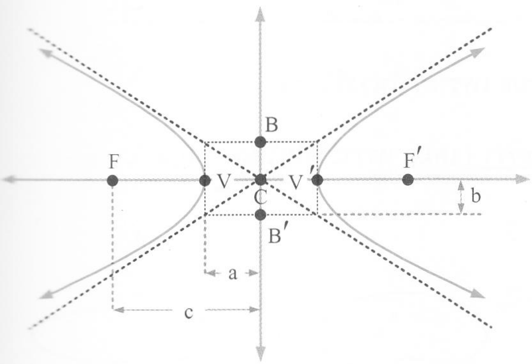
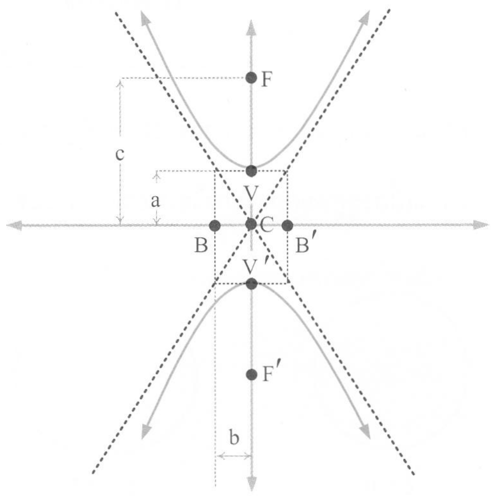


- **จุดศูนย์กลาง** ของไฮเพอร์โบลาอยู่ที่ C(h, k)
- V และ V′ คือ **จุดยอด** ของไฮเพอร์โบลา เรียก VV′ ว่า **แกนตามขวาง** ยาว 2a หน่วย
- BB′ คือ **แกนสังยุค** ยาว 2b หน่วย
- **จุดโฟกัส** F และ F′ อยู่ในแนวเดียวกับแกนตามขวาง ห่างจากจุดศูนย์กลางเป็นระยะ c หน่วย
- กล่องสี่เหลี่ยมที่อยู่ตรงกลางทำหน้าที่กำกับทิศทางของไฮเพอร์โบลา
  เส้นทแยงมุมของกล่อง (เส้นประ) เรียกว่า **เส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา (asymptote)**
- ความสัมพันธ์ของ a, b, c ในไฮเพอร์โบลา คือ

$$c^2 = a^2 + b^2$$

- **ลาตัสเรกตัม** (ความกว้างของไฮเพอร์โบลา ณ ตำแหน่งโฟกัส) ยาวเท่ากับ $\frac{2b^2}{a}$ หน่วย

ประเภทของไฮเพอร์โบลา

ไฮเพอร์โบลาตามแกน X (x^2 อยู่หน้า)	ไฮเพอร์โบลาตามแกน Y (y^2 อยู่หน้า)
 	
รูปสมการ $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	**รูปสมการ** $\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

วิธีการหาสมการเส้นกำกับ (asymptote)

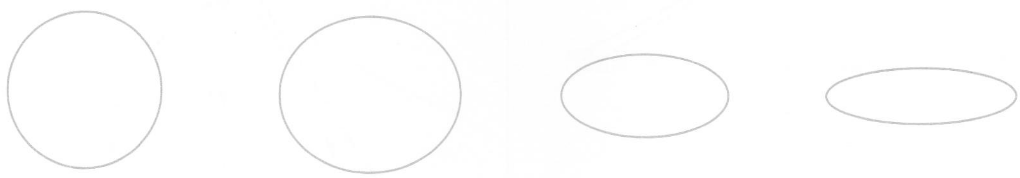
หาสมการเส้นกำกับได้โดยเปลี่ยน **เลข 1** ทางขวามือของสมการไฮเพอร์โบลาให้เป็น **เลข 0** แล้วแก้สมการก็จะได้สมการเส้นตรงสองเส้น ซึ่งเป็นสมการเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลานั่นเอง

5. ความเยื้องสู่ศูนย์กลาง

- **ความเยื้องสู่ศูนย์กลาง (eccentricity : e)** เป็นค่าที่ใช้บอกว่าภาคตัดกรวยรูปนั้นๆ มีความเพี้ยนไปจากความกลมมากน้อยเพียงใด โดยเทียบจากรูป *วงกลม* ซึ่งถูกกำหนดให้มีค่าความเยื้องสู่ศูนย์กลางเท่ากับ 0 (กลมดิ๊ก!)

ภาคตัดกรวย	ความเยื้องสู่ศูนย์กลาง
วงกลม	$e = 0$
พาราโบลา	$e = 1$
วงรี	$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$
ไฮเพอร์โบลา	$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

- ความเยื้องสู่ศูนย์กลางของวงรีจะมีค่าน้อยกว่า 1 เสมอ เพราะว่าในวงรี $c < a$
- ความเยื้องสู่ศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาจะมีค่ามากกว่า 1 เสมอ เพราะว่าในไฮเพอร์โบลา $c > a$



$e = 0$ $e = 0.5$ $e = 0.9$ $e = 0.95$

- จากรูปด้านบน จะเห็นว่า วงรีที่มีความเยื้องสู่ศูนย์กลางเพิ่มขึ้นเรื่อยๆ (ค่า e มากขึ้น) ก็จะยิ่งมีความรี (กลมน้อยลง) มากขึ้นตามไปด้วย