Obliczenia Naukowe

Lista 4

Paweł Kedzierski

Zadanie 1

Kolejne ilorazy różnicowe obliczam w funkcji ilorazyRoznicowe() bez tworzenia tablicy dwuwymiarowej dzięki wykorzystaniu wzoru

$$f[x_0, ..., x_n] = \sum_{j=0} \frac{f(x_j)}{\prod_{k \in \{0,...,n\} \setminus \{j\}} (x_j - x_k)}$$

Zadanie 2

Wartość wielomianu interpolacyjnego Newtona

$$N_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + ... + f[x_0, x_1, ..., x_n](x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{n-1})$$

obliczam w funkcji warNewton() przy pomocy uogólnionego algorytmu Hornera

$$w_n(x) = f[x_{0,x} 1, ..., x_n]$$
$$w_k(x) = f[x_0, x_1, ..., x_k] + (x - x_k) w_{k+1}(x)(k = n - 1, ..., 0)$$
$$N_n(x) = w_0(x)$$

Zadanie 3

Współczynniki postaci naturalnej wielomianu interpolacyjnego w postaci Newtona obliczam przy pomocy następującego alorytmu

$$a_n = c_n$$

$$k = n - 1, n - 2, ..., 0$$

$$b_k = a_k - b_{k+1}(x_k -_{x+1})$$

Zadanie 4

Wykres wielomianu interpolacyjnego generuje funkcja rysujNnfx(). Funkcją ilorazyRoznicowe() z zadania pierwszego generuję wektor iloczynów różnicowych. Tworzę wektor równoodległych węzłów. Wartości przyjmowane przez interpolowaną funkcję w węzłach obliczam uzywając funkcji warNewton(), co pozwala mi uniknąć wyznaczania wielomianu interpolacyjnego w jawnej postaci.

Zadanie 5

Funkcja rysujNnfx() tworzy wielomian interpolacyjny, który dokładnie przybliża funkcje $f(x) = e^x$ oraz $f(x) = x^2 sin(x)$ w wybranym przedziale niezależnie od liczby węzłów, co widać na wykresach 1 - 6.

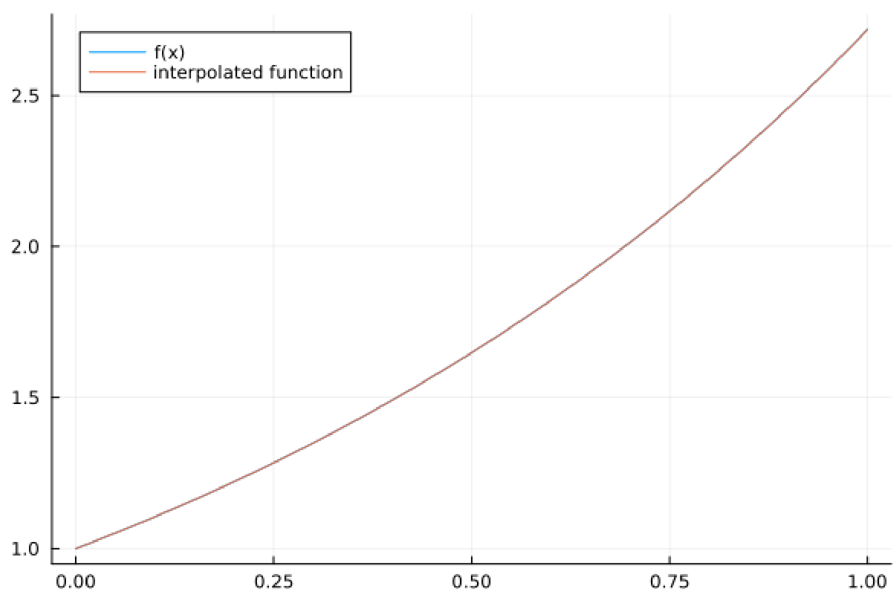

Figure 1: $f(x) = e^x$, [0, 1], n = 5

Zadanie 6

a) $f(x) = |x|$

Zwiększanie liczby węzłów podczas interpolacji funkcji $f(x) = |x|$ prowadzi do poprawy jakości w środku przedziału, lecz na jego krawędziach jakość szybko spada. Przedstawiają to wykresy 7 - 9. To zjawisko wydaje się być sprzeczne z twierdzeniem Stone'a-Weierstrass'a, które stanowi, że każdą funkcję

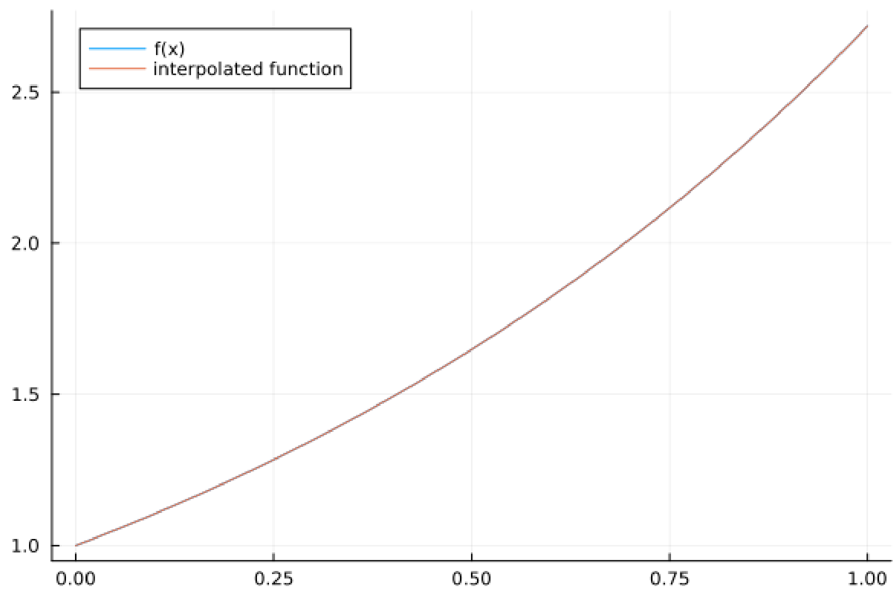

Figure 2: $f(x) = e^x$, [0, 1], n = 10

ciągłą zdefiniowaną w przedziale można przybliżyć z dowolną precyzją przy pomocy funkcji wielomianowej. Jest to jednak spowodowane wyborem węzłów w równych odległościach.

b) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Interpolując funkcję $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ łatwo zauważyć, że początkowo zwiększenie liczby węzłów poprawia jakość przybliżenia, lecz potem następuje pogorszenie. Przedstawiają to wykresy 10 - 12. Pogorszenie jakości jest szczególnie drastyczne przy końcach przedziału. Takie zachowanie jest spowodowane rozmieszczeniem węzłów w równych odległościach. Zagęszczenie węzłów bliżej krawędzi przedziału, na przykład według sposobu Chebysheva, pomogłoby rozwiązać ten problem.

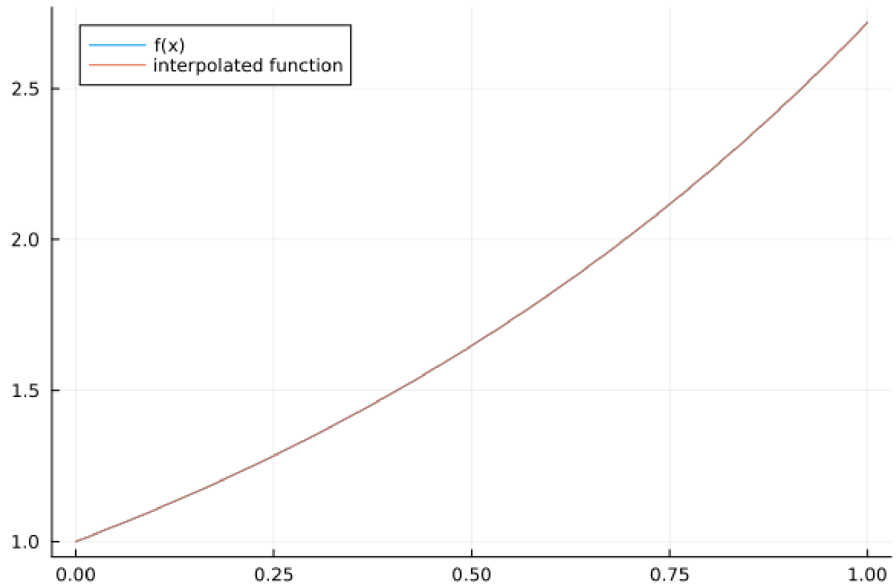

Figure 3: $f(x) = e^x$, [0, 1], n = 15

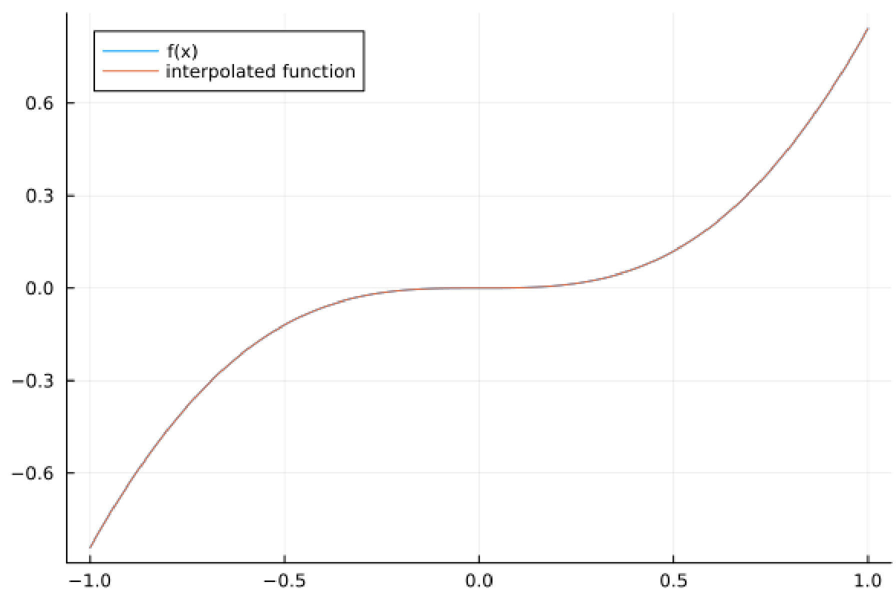

Figure 4: $f(x) = x^2 sin(x)$, [-1, 1], n = 5

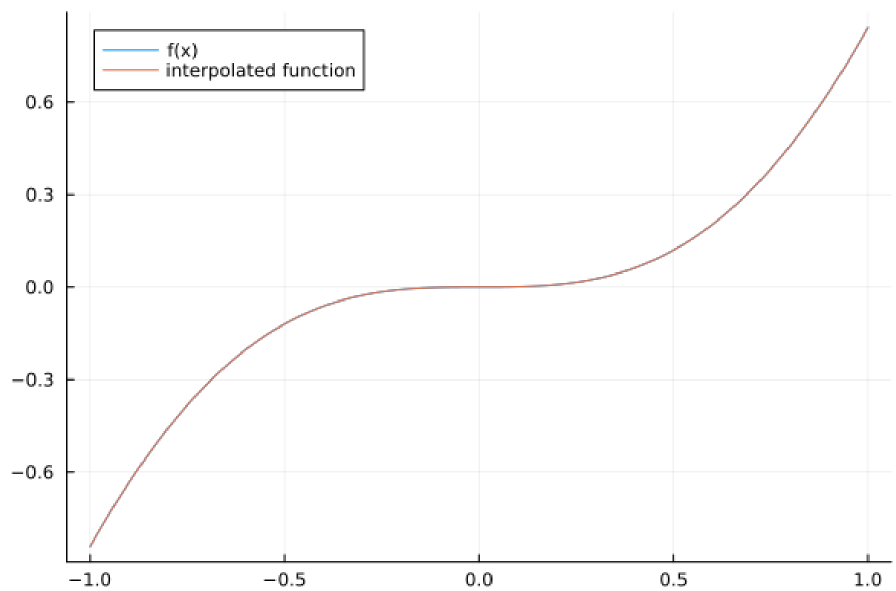

Figure 5: $f(x) = x^2 sin(x)$, [-1, 1], n = 10

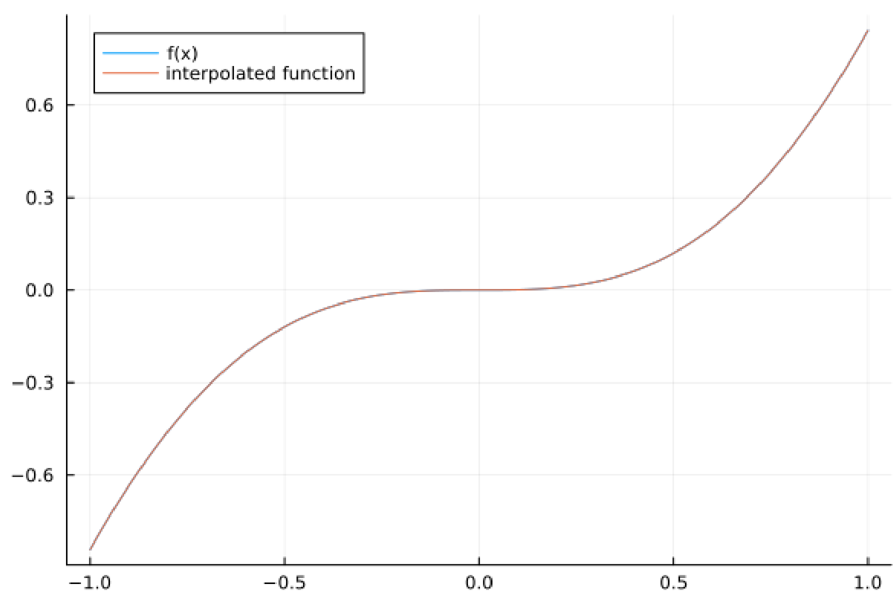

Figure 6: $f(x) = x^2 sin(x)$, [-1, 1], n = 15

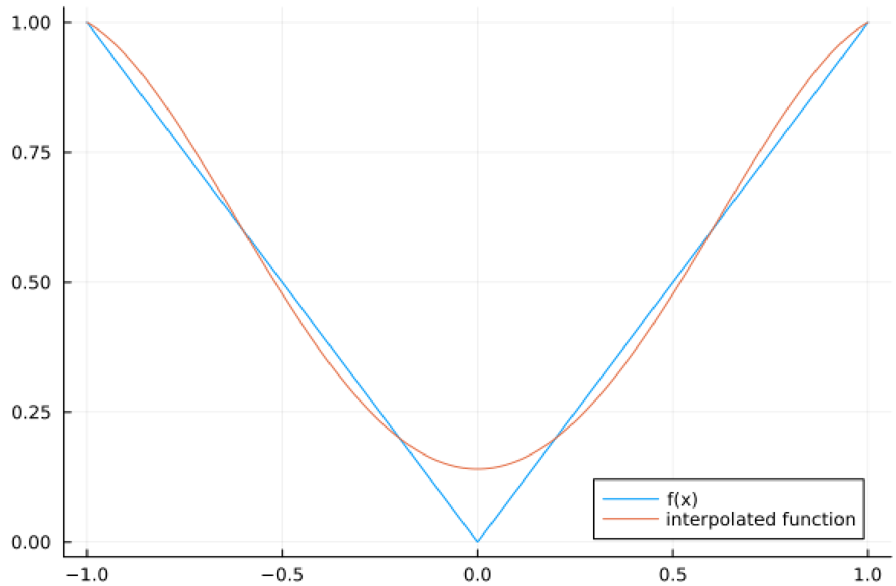

Figure 7: $f(x) = |x|$, [-1, 1], n = 5

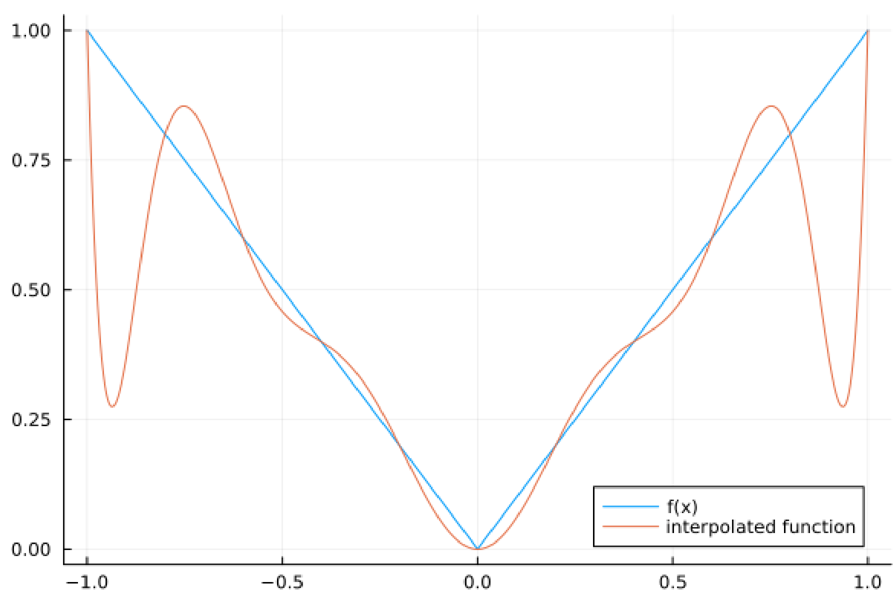

Figure 8: $f(x) = |x|$, [-1, 1], n = 10

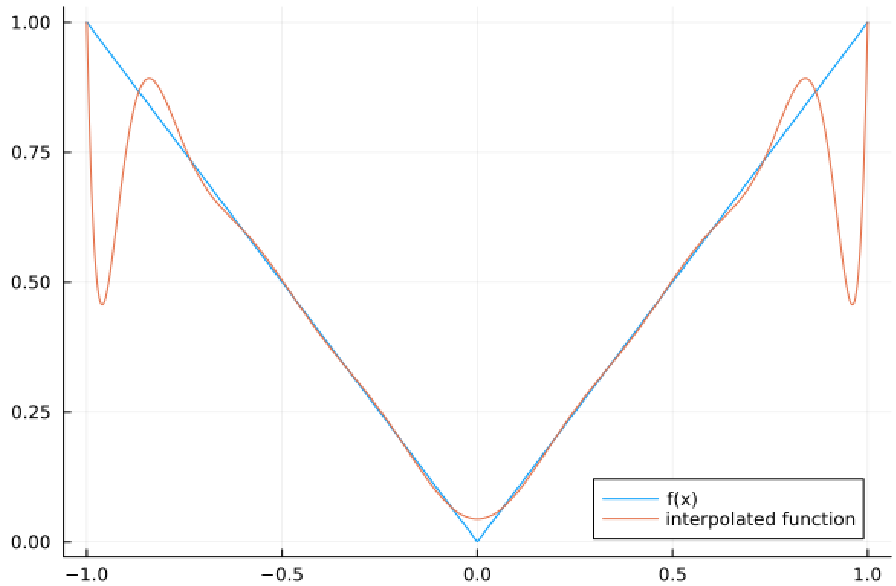

Figure 9: $f(x) = |x|$, [-1, 1], n = 15

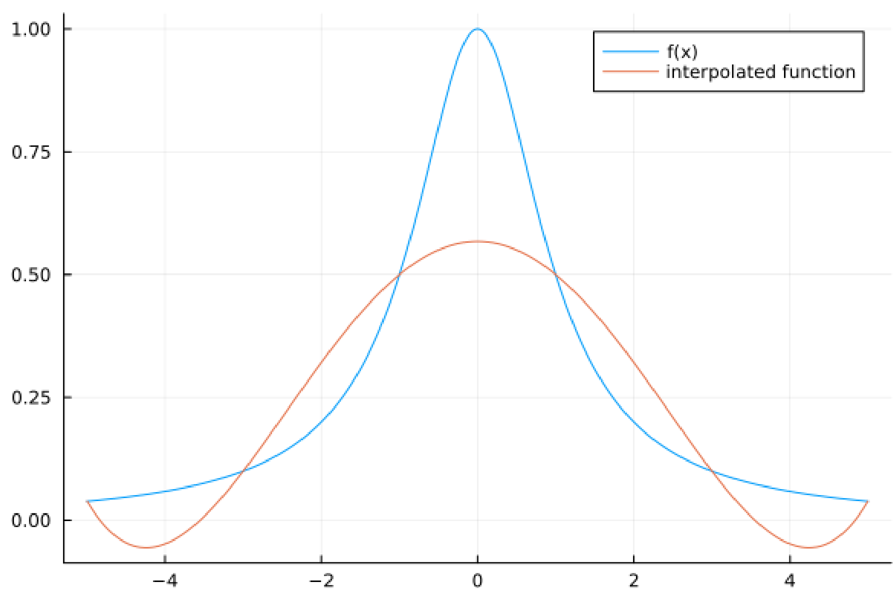

Figure 10: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, [-5, 5], n = 5

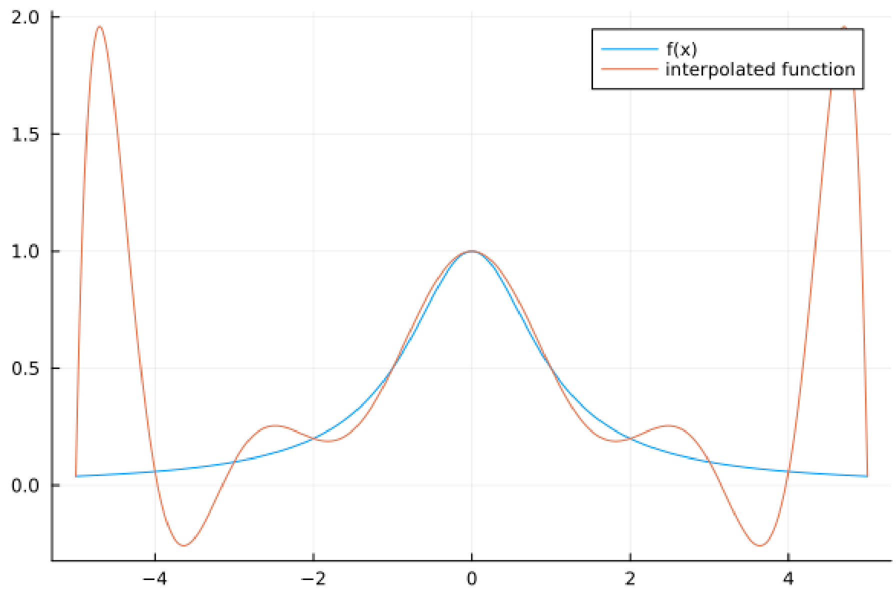

Figure 11: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, [-5, 5], n = 10

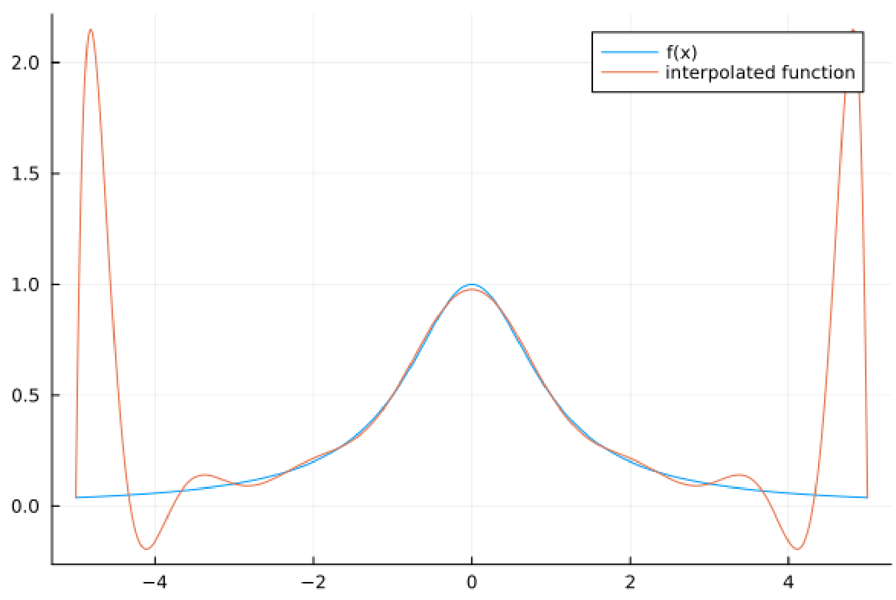

Figure 12: $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, [-5, 5], n = 15