

ZADANIA 08/12/2022

Zadanie 1 Wyznacz ilość rozwiązań rzeczywistych równania:

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2x}{3} \right\rfloor = x,$$

przy czym $\lfloor x \rfloor$ – liczba całkowita k , taka, że $k \leq x < x + 1$.

Zadanie 2 W trójkącie ABC wysokość, dwusieczna i środkowa „wypuszczone” z punktu C dzielą $\angle C$ na cztery równe części. Wyznacz kąty tego trójkąta.

(01/12/2022) Zadanie 1 Stosując tożsamość $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$:

(c) uzasadnij, że jeśli $x = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ oraz $y = a_1^3 + b_1^3 + c_1^3 - 3a_1b_1c_1$ dla pewnych a, b, c, a_1, b_1, c_1 , to także $x \cdot y = a_2^3 + b_2^3 + c_2^3 - 3a_2b_2c_2$ dla pewnych a_2, b_2, c_2

(24/11/2022) Zadanie 2 Rozwiąż równanie $\sqrt{5-x} = 5-x^2$.

(24/11/2022) Zadanie 1 Stosując indukcję matematyczną:

(d) Uzasadnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $7^{7^n} + 1$ jest iloczynem co najmniej $2n + 3$ liczb pierwszych (niekoniecznie różnych).

(24/11/2022) Zadanie 4 Ciąg rosnący $1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, \dots$ zawiera potęgi 3-ki oraz liczby, które dadzą się zapisać jako sumy różnych potęg 3-ki. Wyznacz setny wyraz tego ciągu.

(20/10/2022) Zadanie 1

Niech w_1, w_2, \dots, w_n – liczby zespolone. Linię L nazwiemy średnią dla punktów w_1, w_2, \dots, w_n jeśli można na niej znaleźć takie punkty z_1, z_2, \dots, z_n , że $\sum_{k=1}^n (z_k - w_k) = 0$. Dla liczb zespolonych $w_1 = 32 + 170i$, $w_2 = -7 + 64i$, $w_3 = -9 + 200i$, $w_4 = 1 + 27i$, $w_5 = -14 + 43i$ istnieje tylko jedna linia średnia przecinająca oś y w 3. Wyznacz współczynnik kierunkowy tej linii.

(6/10/2022) Zadanie 8 Niech $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wyznaczyć liczbę funkcji $f : S \mapsto S$ spełniających zależność $f^{50}(x) = x$ dla wszystkich $x \in S$, przy czym f^{50} oznacza pięćdziesięciokrotne złożenie funkcji f ze sobą.