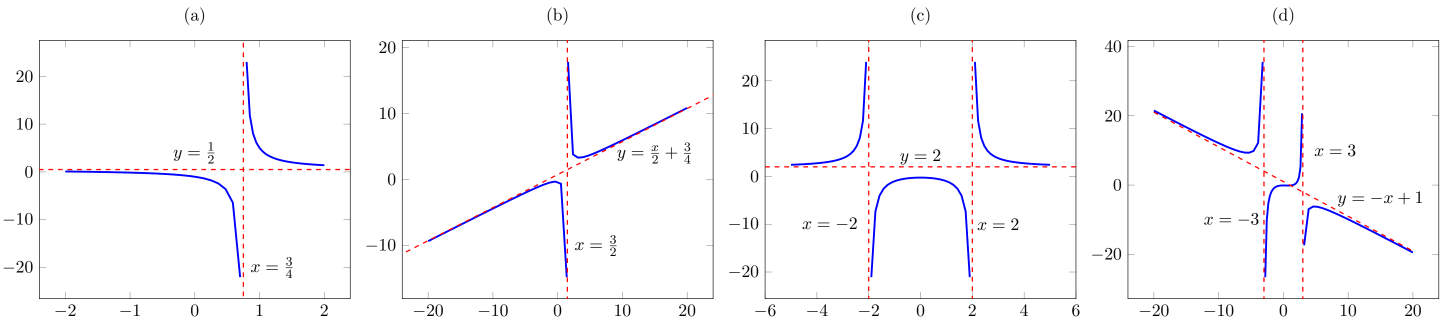
PRACA DOMOWA I

imię i nazwisko ....

Zadanie 1 :
(a) 1) Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \ln \frac{x}{1-x^2}$, 2) Wyznacz dziedzinę funkcji, równania asymptot, naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{2x+3}{4x-3}$,
(b) 1) Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{x^3 - 6x - 4}$, 2) Wyznacz dziedzinę funkcji, równania asymptot, naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x^2+1}{2x-3}$,
(c) 1) Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \sqrt{\frac{3}{x^2} + \frac{2}{x+1} - \frac{3}{x}}$, 2) Wyznacz dziedzinę funkcji, równania asymptot, naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2-4}$,
(d) 1) Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \ln\left(-\frac{5}{x+3} + \frac{1}{x+1} + \frac{6}{(x+1)^2}\right)$, 2) Wyznacz dziedzinę funkcji, równania asymptot, naszkicuj wykres funkcji $f(x) = \frac{x^3-x^2-1}{9-x^2}$.

odpowiedzi:
(a)
1) $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$,
2) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{4}\right\}$, $\lim\limits_{x\to\frac{3}{4}^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{3}{4}^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$,
asymptoty: pionowa $x = \frac{3}{4}$, pozioma $y = \frac{1}{2}$
(b)
1) $x \in \langle -2, 1-\sqrt{3}\rangle \cup \langle 1+\sqrt{3}, +\infty)$,
2) $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{2}\right\}$, $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to\frac{3}{2}^+} f(x) = +\infty$,
asymptota pionowa: $x = \frac{3}{2}$, asymptota ukośna $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$,
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)/x = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - x/2) = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x/2) = \frac{3}{4}$
(c)
1) $x \in (-\infty, -\sqrt{3}\rangle \cup \langle -1, 0) \cup (0, \sqrt{3}\rangle$,
2) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$, $\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = +\infty$,
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, asymptoty: pionowe $x = -2$, $x = 2$, pozioma $y = 2$
(d)
1) $x \in (-\infty, -3) \cup (-2, -1) \cup (-1, 2)$,
2) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$, $\lim\limits_{x\to-3^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-3^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to3^+} f(x) = -\infty$,
asymptoty pionowe: $x = -3$, $x = 3$, asymptota ukośna $y = -x + 1$,
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)/x = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)/x = -1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) + x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) + x) = 1$



Zadanie 2 W oparciu o znane wzory i reguły różniczkowania wyznacz pochodne:

(a) 1) $\left(\frac{3}{x^4} - 5\sqrt[4]{x^3}\right)'$, 2) $(x^3 \log x)'$, 3) $\left(2^{x^3} \arcsin^2 x\right)'$

(b) 1) $\left(10\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{\sqrt{x^5}}\right)'$, 2) $\left(\frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{arctg} x}\right)'$, 3) $(\ln(x^2+1)\cos^3 x)'$

(c) 1) $\left(10x^3 - \frac{4}{\sqrt[3]{x^4}}\right)'$, 2) $(10^x \arcsin x)'$, 3) $\left(x^3 \operatorname{arctg} \frac{2x}{x-1}\right)'$

(d) 1) $\left(\frac{1}{x^7} - \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\right)'$, 2) $\left(\frac{\sin x}{x^4+1}\right)'$, 3) $(x \operatorname{tg}^2(3x-2))'$

odpowiedzi:

(a) 1) $-\frac{12}{x^5} - \frac{15}{4\sqrt[4]{x}}$, 2) $3x^2 \log x + \frac{x^2}{\ln 10}$, 3) $\frac{2^{x^3+1} \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + 3\ 2^{x^3} x^2 \ln 2 \arcsin^2 x$

(b) 1) $\frac{20}{3\sqrt[3]{x}}$, 2) $-\frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{\sin^2 x} + \frac{\operatorname{ctg} x}{x^2+1}}{\operatorname{arctg}^2 x}$, 3) $\frac{2x \cos x}{x^2+1} - 3\ln(x^2+1)\cos^2 x \sin x$

(c) 1) $30x^2 + \frac{16}{3\sqrt[3]{x^7}}$, 2) $10^x \ln 10 \arcsin x + \frac{10^x}{\sqrt{1-x^2}}$, 3) $3x^2 \operatorname{arctg} \frac{2x}{x-1} - \frac{2x^3}{5x^2-2x+1}$

(d) 1) $-\frac{7}{x^8} + \frac{6}{5\sqrt[5]{x^8}}$, 2) $\frac{(x^4+1)\cos x - 4x^3 \sin x}{(x^4+1)^2}$, 3) $\operatorname{tg}^2(3x-2) + \frac{6\operatorname{tg}(3x-2)}{\cos^2(3x-2)}$

Zadanie 3

(a) Zapisz wzór Taylora z dokładnością do wyrazów 3 rzędu dla funkcji $y = \operatorname{tg} x$ w okolicy $x_0 = 0$. W oparciu o ten wzór oblicz $\operatorname{tg} 10^\circ$, do obliczeń przyjmij: $\pi \approx \frac{333}{106}$; wg kalkulatora: $\operatorname{tg} 10^\circ \approx 0,176322$.

(b) Zapisz wzór Taylora z dokładnością do wyrazów rzędu 8 dla funkcji $y = \sqrt{x+1}$ w okolicy $x_0 = 0$. W oparciu o uzyskany wzór oblicz $\sqrt{2}$, wg kalkulatora $\sqrt{2} \approx 1,41421$.

(c) W oparciu o wzór Taylora zapisz przybliżenie funkcji $y = \frac{8x^2}{x+1}$ w pobliżu punktu $x_0 = 1$ za pomocą paraboli. Sprawdź dokładność przybliżenia dla punktów $x = 1,5$ oraz $x = 1,1$.

odpowiedzi:

(a) $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, 10° to w mierze łukowej $\frac{\pi}{18} \approx \frac{37}{212} \approx 0,174528$, $\operatorname{tg} 10^\circ \approx 0,1763$

(b) $\sqrt{x+1} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} - \frac{21x^6}{1024} + \frac{33x^7}{2048} - \frac{429x^8}{32768} + o(x^8)$, $\sqrt{2} = \sqrt{1+1} \approx \frac{46147}{32768} \approx 1,40829$

(c) przybliżenie: $\frac{x}{3x+2} = x^2 + 4x - 1 + o((x-1)^2)$, wartości dokładne: $y(1,5) = \frac{36}{5} = 7,2$, $y(1,1) = \frac{484}{105} \approx 4,60952$; wartości przybliżone: $y(1.5) \approx \frac{29}{4} = 7,25$, $y(1,1) \approx \frac{461}{100} = 4,61$