ZADANIA 19/01/2023

Zadanie 1 Tablica $n \times n$ jest wypełniona przez 0 i 1 w ten sposób, że losowo wybierając n komórek tej tabeli (z różnych wierszy i kolumn) conajmniej jedna będzie zawierała 1. Udowodnij, że można wybrać i wierszy i j kolumn $(i + j \geqslant n + 1)$ w taki sposób, że na ich przecięciu występują same 1.

Zadanie 2 Dodatnie liczby całkowite n i k spełniają nierówność $k > n!$. Udowodnić, że istnieją różne liczby pierwsze p_1, p_2, ..., p_n będące odpowiednio dzielnikami liczb $k + 1$, $k + 2$, ..., $k + n$.

Zadanie 3 Wyznaczyć wszystkie trójki liczb pierwszych $p \leqslant q \leqslant r$, że liczby

$$pq + r,\ pq + r^2,\ qr + p,\ qr + p^2,\ rp + q,\ rp + q^2$$

są pierwsze.

Zadanie 4 Dany jest czworościan $ABCD$. Dowieść, że krawędzie AB i CD są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje w przestrzeni taki równoległobok $CDPQ$, że $PA = PB = PD$ oraz $QA = QB = QC$.

(05/01/2023) Zadanie 1 Uzasadnij, że kwadratu nie sie podzielić na pięć kwadratów.

(05/01/2023) Zadanie 2
Udowodnij następujące twierdzenie (**Lemat Halla**): Niech na pewnym przyjęciu znajduje się n chłopców i n dziewcząt, każdy chłopiec zna pewną grupę dziewcząt. Udowodnić, że jeśli wśród dowolnego zbioru k–elementowego chłopców $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ilość dziewcząt znanych przez tych chłopców jest nie mniejsza od k, to da się tak dobrać chłopców i dziewczęta w pary aby w każdej parze były osoby, które się znają.

(22/12/2022) Zadanie 1
(a) czy istnieją funkcje $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, że $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^3$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$?
(b) czy istnieją funkcje $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, że $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^4$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$?

(15/12/2022) Zadanie 3 Karty z talii 52 zostały umieszczone w tablicy 4×13. Udowodnij, że można z każdej kolumny wybrać jedną kartę w ten sposób, że wśród wybranych 13 kart znajdzie się każdy rodzaj karty, tzn. jedna 2, jedna 3 itd.