

PRACA DOMOWA II

imię i nazwisko

Zadanie 1 Oblicz całki podwójne przechodząc do współrzędnych biegunowych r, φ :

(a) $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, gdzie $D: x^2 + y^2 \leq 4, y \geq -x, x \geq 0$,

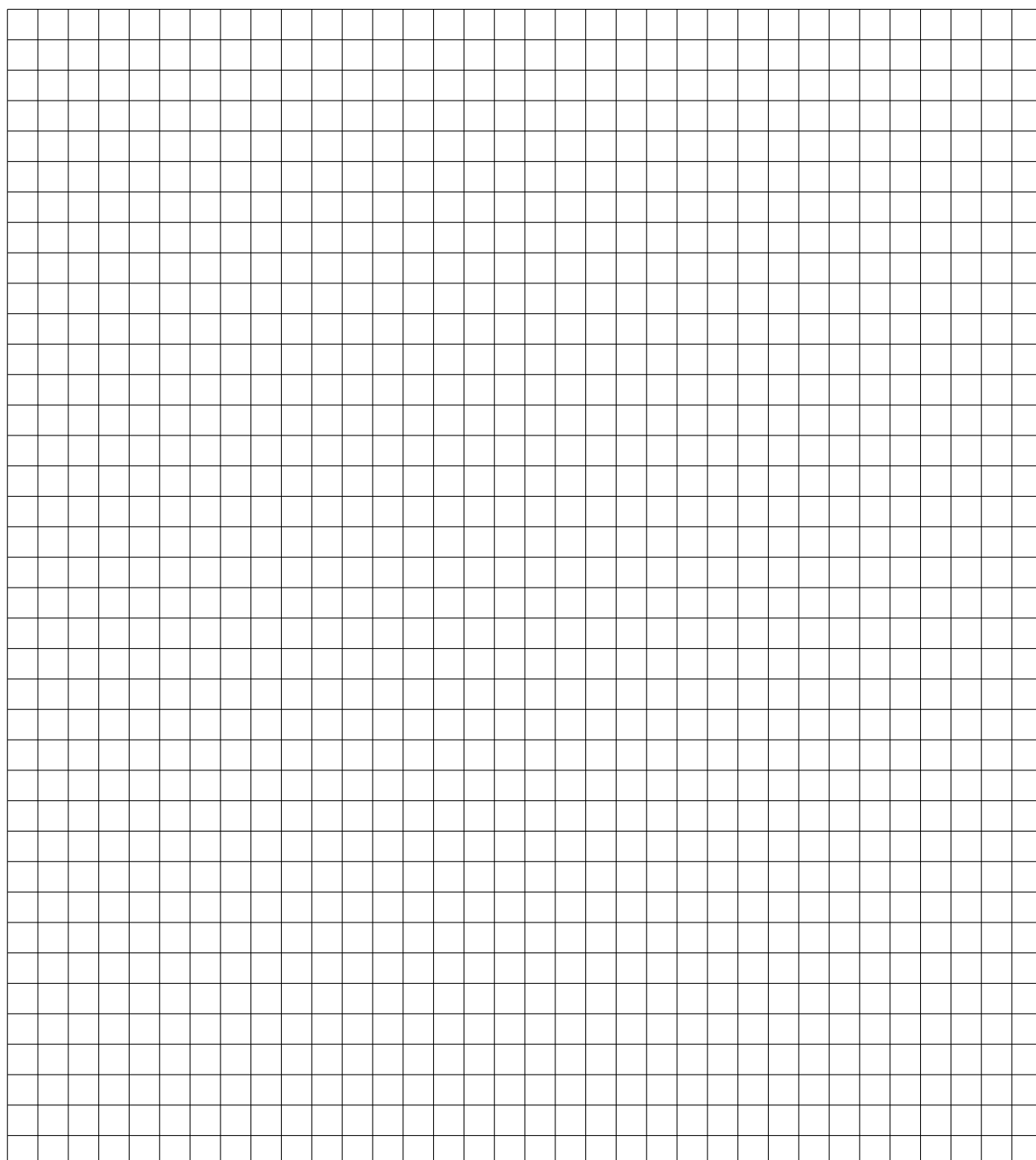
(b) $\iint_D xy^2 dx dy$, gdzie $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0, y \leq x$,

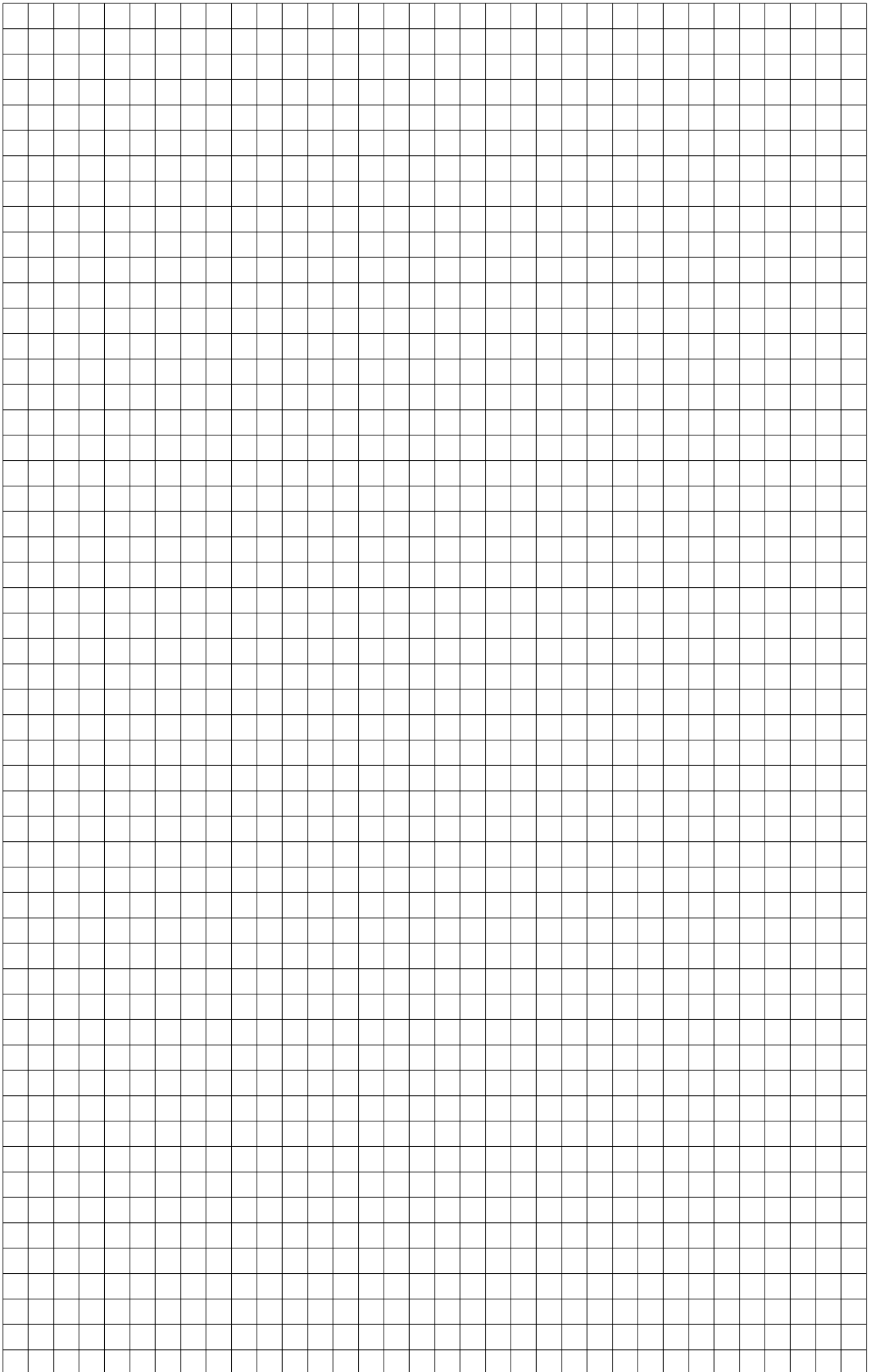
(c) $\iint_D \frac{xy dx dy}{x^2 + y^2 + 1}$, gdzie $D: x^2 + y^2 \leq 1, y \geq \sqrt{3}x, x \geq 0$,

(d) $\iint_D xy dx dy$, gdzie $D: x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0$

odpowiedzi:

(a) 3π , (b) $\frac{31\sqrt{2}}{60}$, (c) $\frac{1-\ln 2}{16}$, (d) $\frac{2}{3}$



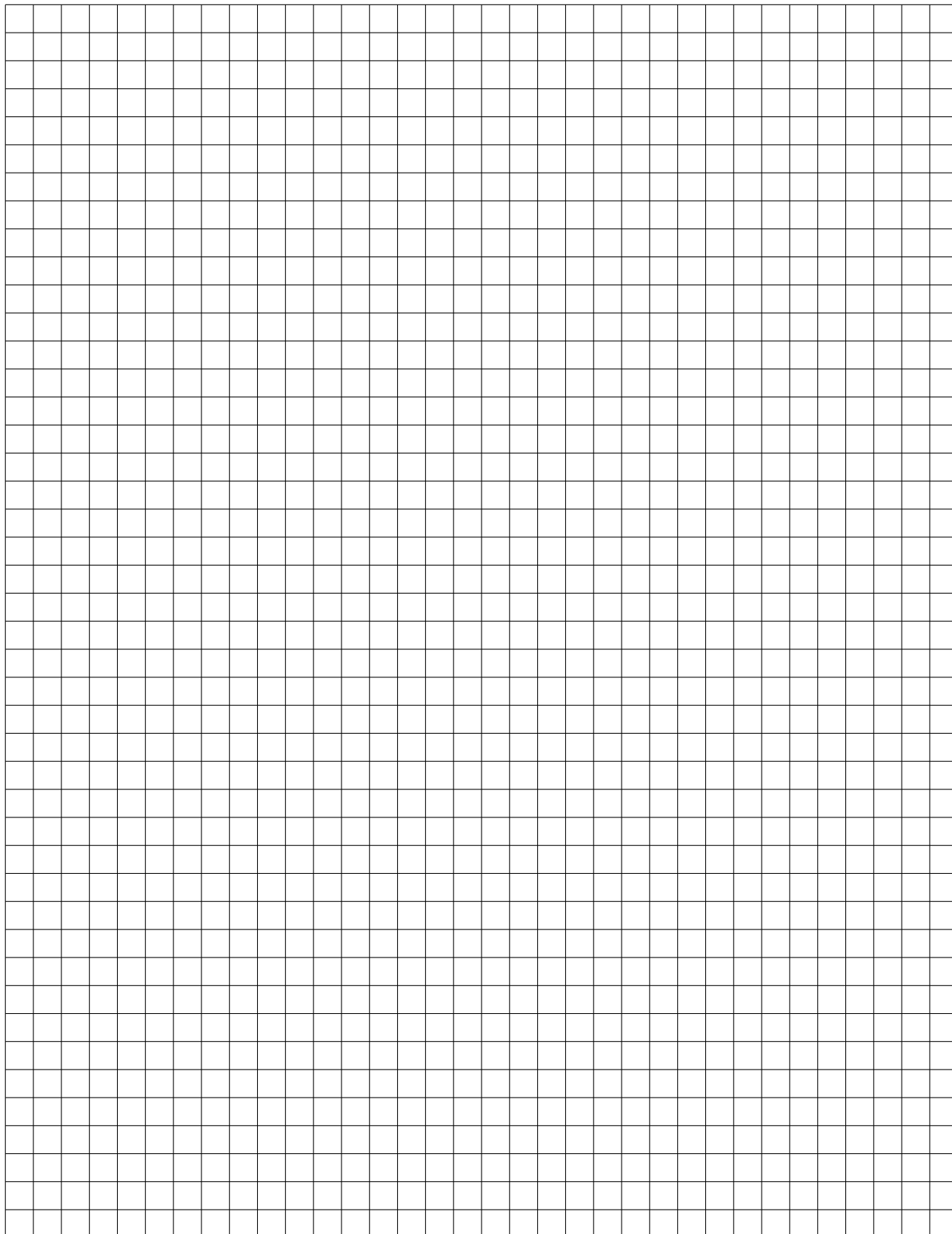


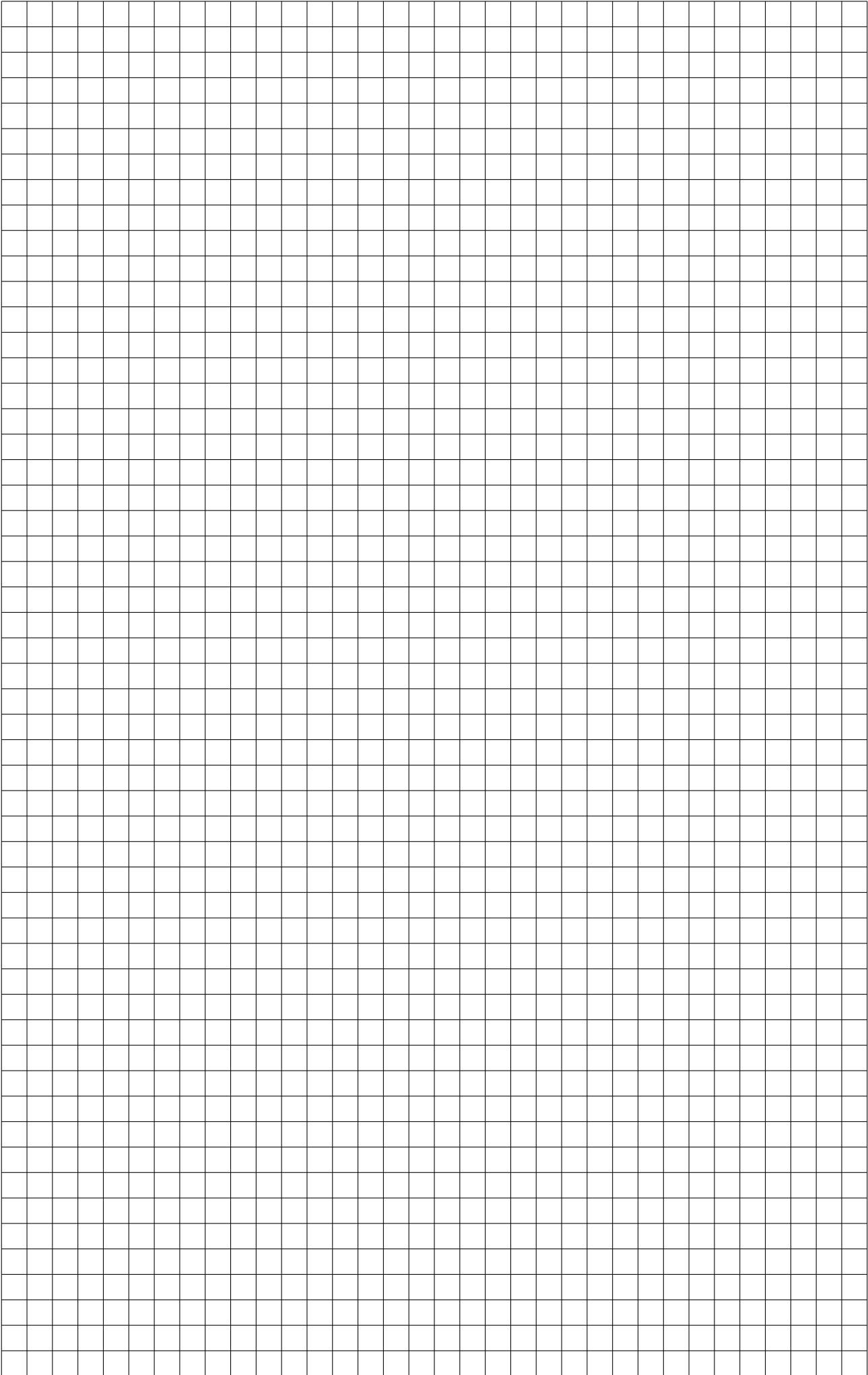
Zadanie 2

- (a) wyznaczyć objętość obszaru ograniczonego powierzchniami $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $3x + 4y + 6z - 12 = 0$,
(b) wyznaczyć objętość obszaru ograniczonego powierzchniami $z = 0$, $z = 16 - x^2 - y^2$,
(c) wyznaczyć położenie środka ciężkości obszaru ograniczonego liniami $y = x$ oraz $y = x^2$,
(d) wyznaczyć położenie środka ciężkości obszaru D : $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$, $y \geq x$, $x \geq 0$.

odpowiedzi:

- (a) $V = 4$, (b) $V = 128\pi$, (c) $G = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}\right)$, (d) $G = \left(\frac{28(2-\sqrt{2})}{9\pi}, \frac{28\sqrt{2}}{9\pi}\right)$.





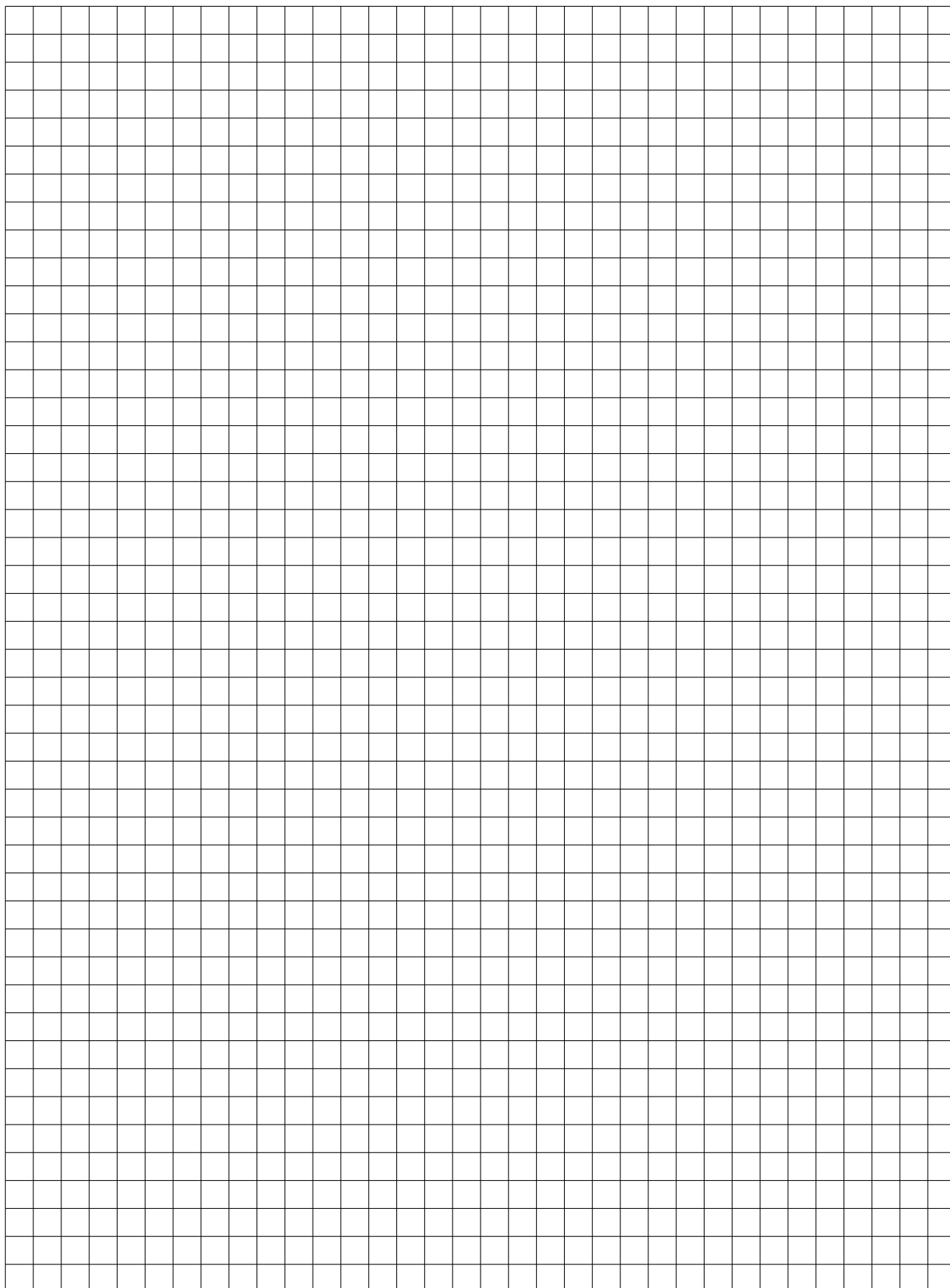
Zadanie 3 Rozwiąż równania różniczkowe:

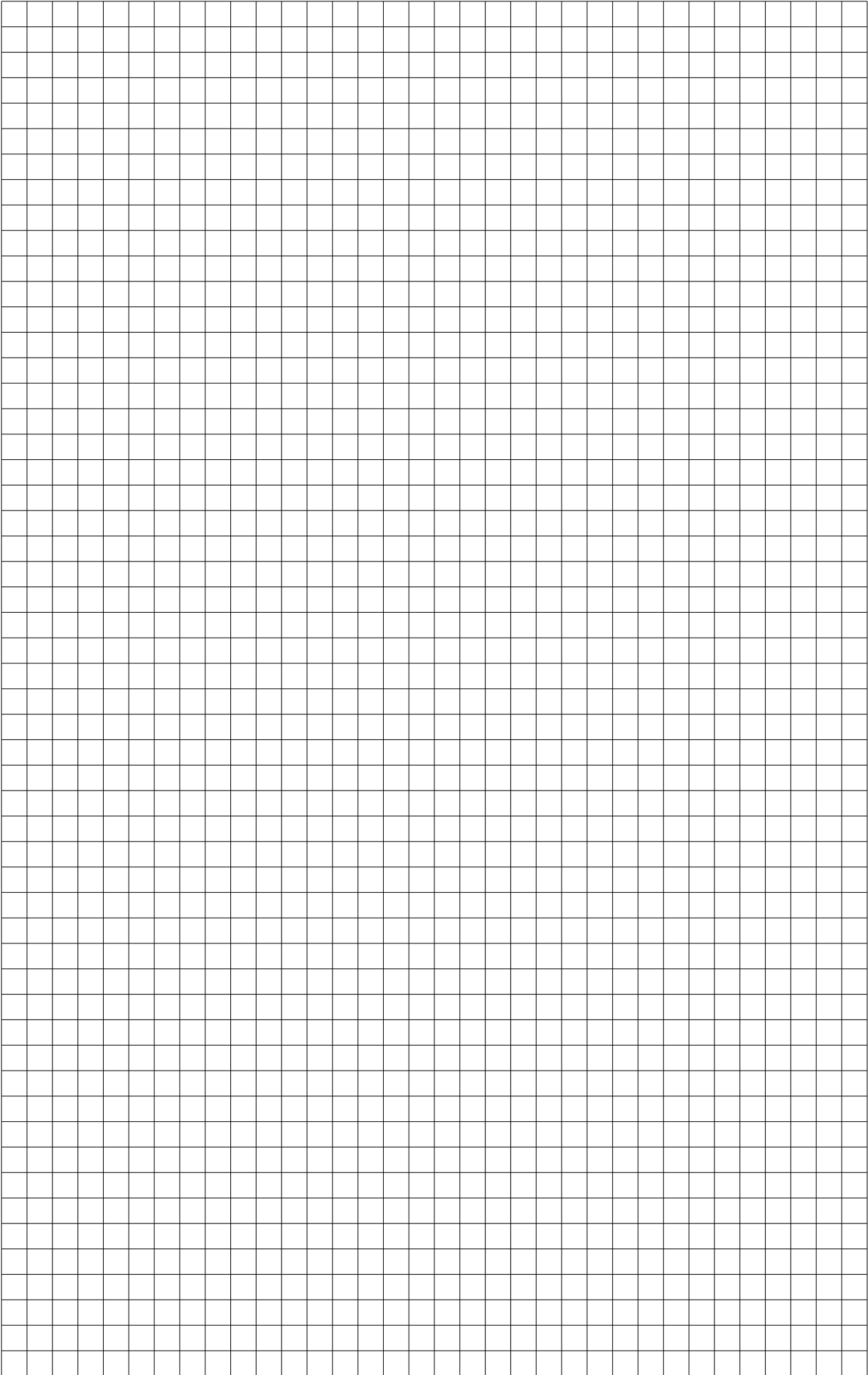
(a) $\frac{y'}{x^2} - y^2 = 0$, $y(0) = 1$, (b) $y'x^3 - 2y = 0$, $y(1) = \frac{1}{e}$, (c) $\frac{y'}{\cos x} + 4 \sin x \cos^2 y = 0$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$,

(d) $\frac{y'}{x} - \frac{1}{y^2\sqrt{x^2+1}} = 0$, $y(0) = 1$.

odpowiedzi:

(a) $y(x) = \frac{3}{3-x^3}$, (b) $y(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, (c) $y(x) = \arctg(\cos(2x))$, (d) $y(x) = \sqrt[3]{3\sqrt{x^2+1}-2}$.





Zadanie 4 Rozwiąż równania różniczkowe:

(a) $3y'' - 4y' + y = 16e^{3x}$, (b) $y'' + 4y' + 13y = \sin(3x)$, (c) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$, (d) $y'' + 4y' + 5y = 25x^2$.

odpowiedzi:

(a) $y(x) = C_1 e^{x/3} + C_2 e^x + e^{3x}$, (b) $y(x) = e^{-2x}(C_1 \cos(3x) + C_2 \sin(3x)) + \frac{1}{40} \sin(3x) - \frac{3}{40} \cos(3x)$,

(c) $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + x^2 e^{2x}$, (d) $y(x) = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + 5x^2 - 8x + \frac{22}{5}$.

