Przykładowy zestaw na egzamin z Analizy Matematycznej w przedłużonej sesji poprawkowej

Zadanie 1 Oblicz pochodne: (a) $\left(\sqrt[3]{x^4} - \frac{1}{x}\right)'$, (b) $(x^3 e^{\cos x})'$.

Zadanie 2 Oblicz całki (a) $\int x^2(1+x^3)^4 dx$, (b) $\int \ln x dx$.

Zadanie 3 Zapisz wielomian Taylora stopnia II–go dla funkcji $y = \sqrt{x}$ w okolicy $x_0 = 4$. Oblicz za jego pomocą przybliżoną wartość $\sqrt{4{,}1}$.

Zadanie 4 Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji: $y = 6x^4 - 8x^3 - 3x^2 + 6x$.

Zadanie 5 Wyznacz przybliżoną wartość całki $\int\limits_{-1}^{2} x^2 dx$ dzieląc przedział całkowania na **trzy** równe części, za punkty pośrednie przyjąć środki kolejnych przedziałów. Obliczenia prowadzić na ułamkach zwykłych, wynik podać w takiej samej postaci.

Zadanie 6 Wyznacz pole obszaru ograniczonego liniami $y = 2x - x^2$, $y = 2 - x$. Wykonaj rysunek!

Zadanie 7 Oblicz z''_{xy}, jeśli $z = \ln(xy+1)$.

Odpowiedzi

Zadanie 1
(a) $\left(\sqrt[3]{x^4} - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} + \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$,
(b) $\left(x^3 e^{\cos x}\right)' = 3x^2 e^{\cos x} - x^3 e^{\cos x} \sin x$.

Zadanie 2
(a) $\int x^2(1+x^3)^4 dx = \frac{1}{15}(x^3+1)^5 + C$, wskazówka: podstawić $u = 1 + x^3$,
(b) $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$, wskazówka: we wzorze na całkowanie przez części przyjąć: $f(x) = \ln x$, $g'(x) = 1$.

Zadanie 3
$W_2(x) = -\frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{x-4}{4} + 2$,
$\sqrt{4{,}1} \approx W_2(4{,}1) = -\frac{1}{64}(4{,}1-4)^2 + \frac{4{,}1-4}{4} + 2 = \ldots = \frac{12959}{6400} \approx 2{,}02485$.

Zadanie 4
$y' = 24x^3 - 24x^2 - 6x + 6 = 6(x-1)(2x-1)(2x+1)$,
funkcja rośnie dla $x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $x \in (1, +\infty)$,
funkcja maleje dla $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$,
minima lokalne dla $x = -\frac{1}{2}$ oraz dla $x = 1$,
maksimum lokalne dla $x = \frac{1}{2}$.

Zadanie 5
przedziały $I_1 = \langle -1, 0 \rangle$, $I_2 = \langle 0, 1 \rangle$, $I_1 = \langle 1, 2 \rangle$, długości przedziałów: $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = 1$, punkty pośrednie: $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{1}{2}$, $c_3 = \frac{3}{2}$,
przybliżenie całki: $\int\limits_{-1}^{2} x^2 dx \approx f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + f(c_3)\Delta x_3 = \ldots = \frac{11}{4}$.

Zadanie 6
$S = \int\limits_{1}^{2} (2x - x^2 - (2-x)) dx = \ldots = \frac{1}{6}$.

Zadanie 7
$z''_{xy} = \left(z'_y\right)'_x$, $z'_y = \frac{x}{xy+1}$, $z''_{xy} = \left(\frac{x}{xy+1}\right)'_x = \frac{1}{(xy+1)^2}$.