ZADANIA 26/01/2023

Zadanie 1 Wykazać, że dla każdej liczby pierwszej $p > 3$ istnieją liczby całkowite x, y, k spełniające warunki $0 < 2k < p$ oraz
$$kp + 3 = x^2 + y^2.$$

Zadanie 2 Na bokach AB i AC trójkąta ostrokątnego zbudowano, po jego zewnętrznej stronie prostokąty $ACPQ$ i $BKLC$ o równych polach. Udowodnić, że środek odcinka PL, punkt C oraz środek okręgu opisanego na trójkącie ABC leżą na jednej prostej.

Zadanie 3 Liczby rzeczywiste $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n \geqslant 2)$ spełniają warunek $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n > 0$. Udowodnić nierówność:
$$a_1 a_2 \ldots a_n + (2a_2 - a_1)(2a_3 - a_2)\ldots(2a_n - a_{n-1}) \geqslant 2a_2 a_3 \ldots a_n.$$

(19/01/2023) Zadanie 1 Tablica $n \times n$ jest wypełniona przez 0 i 1 w ten sposób, że losowo wybierając n komórek tej tabeli (z różnych wierszy i kolumn) conajmniej jedna będzie zawierała 1. Udowodnij, że można wybrać i wierszy i j kolumn $(i + j \geqslant n + 1)$ w taki sposób, że na ich przecięciu występują same 1.

(19/01/2023) Zadanie 2 Dodatnie liczby całkowite n i k spełniają nierówność $k > n!$. Udowodnić, że istnieją różne liczby pierwsze p_1, p_2, ..., p_n będące odpowiednio dzielnikami liczb $k + 1$, $k + 2$, ..., $k + n$.

(05/01/2023) Zadanie 1 Uzasadnij, że kwadratu nie sie podzielić na pięć kwadratów.

(05/01/2023) Zadanie 2
Udowodnij następujące twierdzenie (**Lemat Halla**): Niech na pewnym przyjęciu znajduje się n chłopców i n dziewcząt, każdy chłopiec zna pewną grupę dziewcząt. Udowodnić, że jeśli wśród dowolnego zbioru k–elementowego chłopców $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ilość dziewcząt znanych przez tych chłopców jest nie mniejsza od k, to da się tak dobrać chłopców i dziewczęta w pary aby w każdej parze były osoby, które się znają.

(22/12/2022) Zadanie 1
(b) czy istnieją funkcje $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, że $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^4$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$?