

PRACA DOMOWA I

imię i nazwisko

Zadanie 1 Wyznacz pochodne cząstkowe drugiego rzędu z''_{xx} , z''_{xy} oraz z''_{yy} jeśli:

(a) $z = x \ln \frac{x}{y}$, (b) $z = \frac{x-y}{2x+3y}$, (c) $z = \arcsin\left(\frac{x}{y}\right)$, (d) $z = (2x+3y) \operatorname{arctg}(xy)$

odpowiedzi:

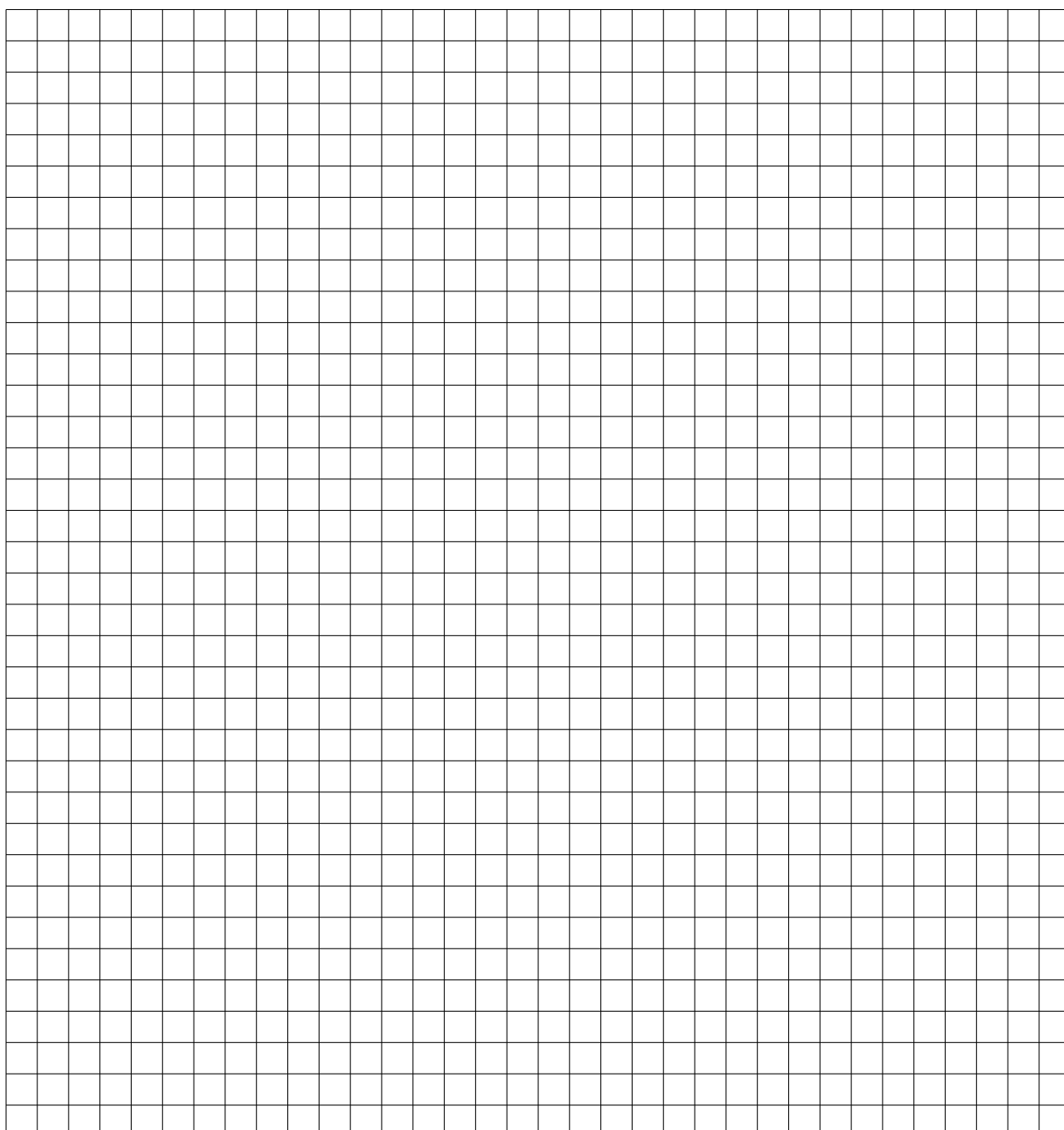
(a) $z'_x = 1 + \ln \frac{x}{y}$, $z'_y = -\frac{x}{y}$, $z''_{xx} = \frac{1}{x}$, $z''_{xy} = -\frac{1}{y}$, $z''_{yy} = \frac{x}{y^2}$

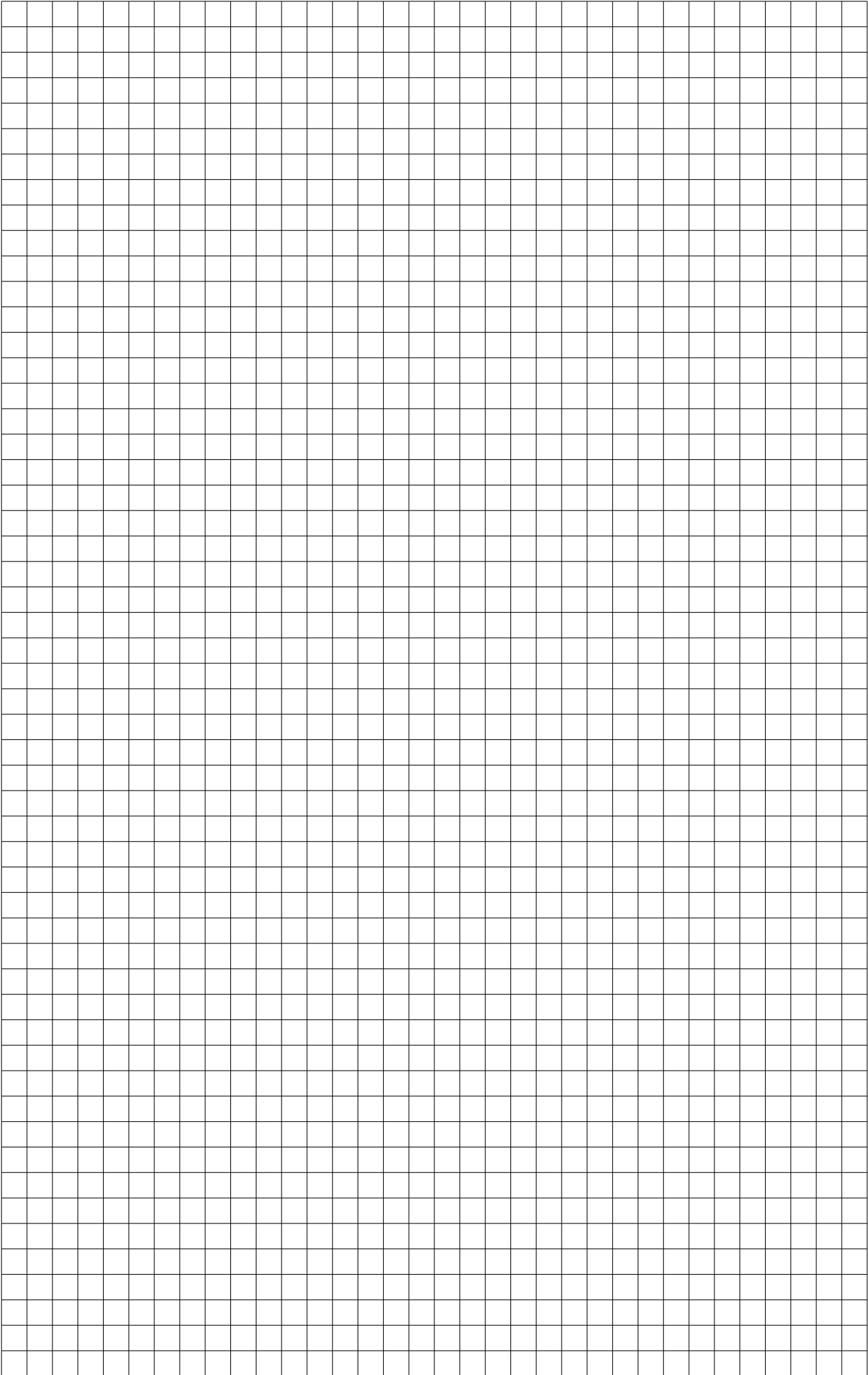
(b) $z'_x = \frac{5y}{(2x+3y)^2}$, $z'_y = -\frac{5x}{(2x+3y)^2}$, $z''_{xx} = -\frac{20y}{(2x+3y)^3}$, $z''_{xy} = \frac{5(2x-3y)}{(2x+3y)^3}$, $z''_{yy} = \frac{30x}{(2x+3y)^3}$

(c) $z'_x = \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}$, $z'_y = -\frac{x}{y\sqrt{y^2-x^2}}$, $z''_{xx} = \frac{x}{y^3\left(1-\frac{x^2}{y^2}\right)^{3/2}}$, $z''_{xy} = -\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}(y^2-x^2)}$, $z''_{yy} = \frac{2xy^2-x^3}{y^3\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}(y^2-x^2)}$,

(d) $z'_x = \frac{y(2x+3y)}{x^2y^2+1} + 2 \operatorname{arctg}(xy)$, $z'_y = \frac{x(2x+3y)}{x^2y^2+1} + 3 \operatorname{arctg}(xy)$, $z''_{xx} = \frac{4y-6xy^4}{(x^2y^2+1)^2}$, $z''_{xy} = \frac{4x+6y}{(x^2y^2+1)^2}$,

$z''_{yy} = \frac{6x-4x^4y}{(x^2y^2+1)^2}$





Zadanie 2 Wyznacz ekstrema lokalne funkcji:

(a) $z = -x^2 + 4xy + 10x - 8y^2 - 4y + 3$, (b) $z = -3x^3 - 8x^2 - 2xy + 9x + y^2 - 2y + 6$,

(c) $z = -4x^2y + x^2 - 4y^3 + 3y$, (d) $z = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + 2xy$

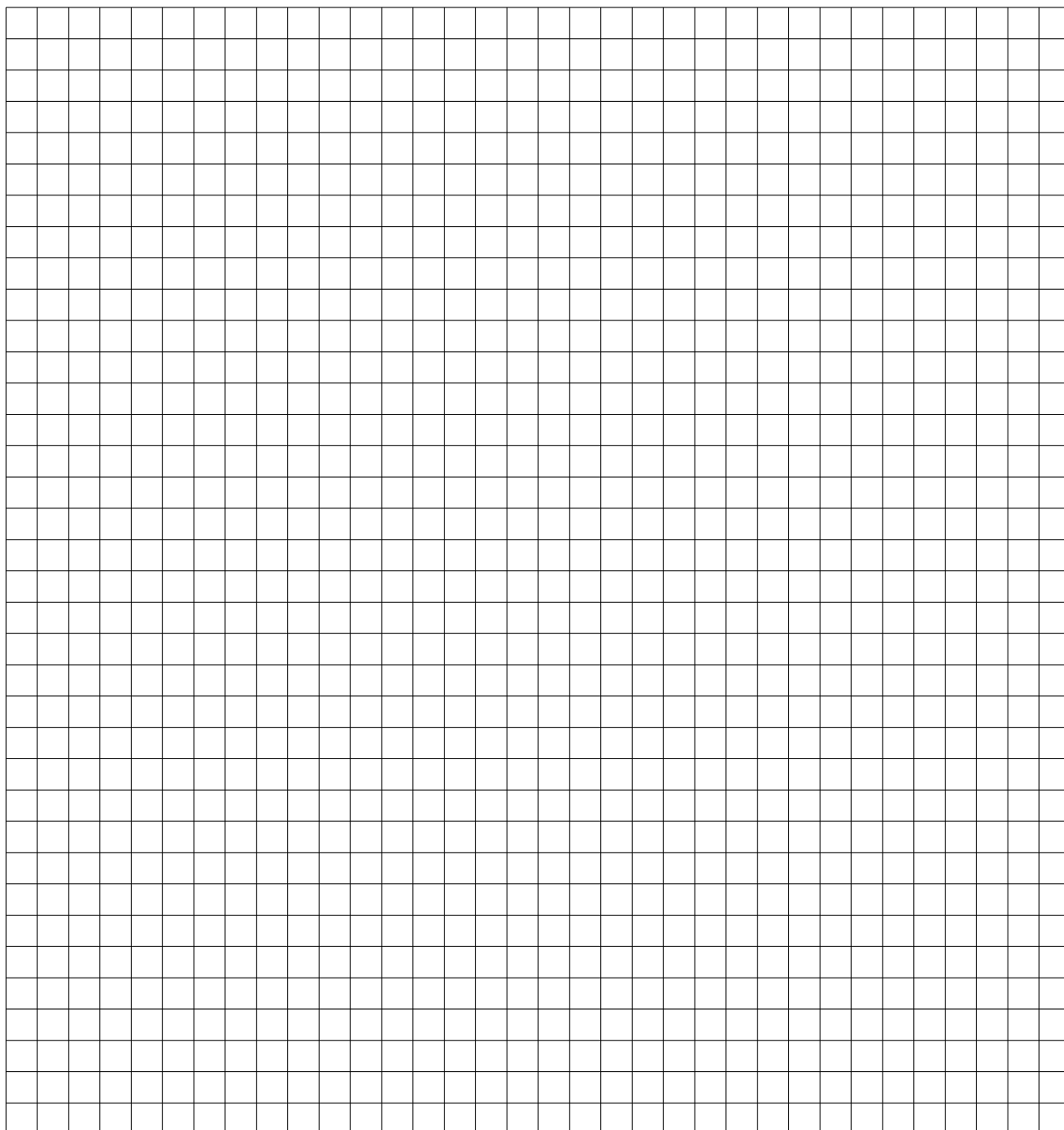
odpowiedzi:

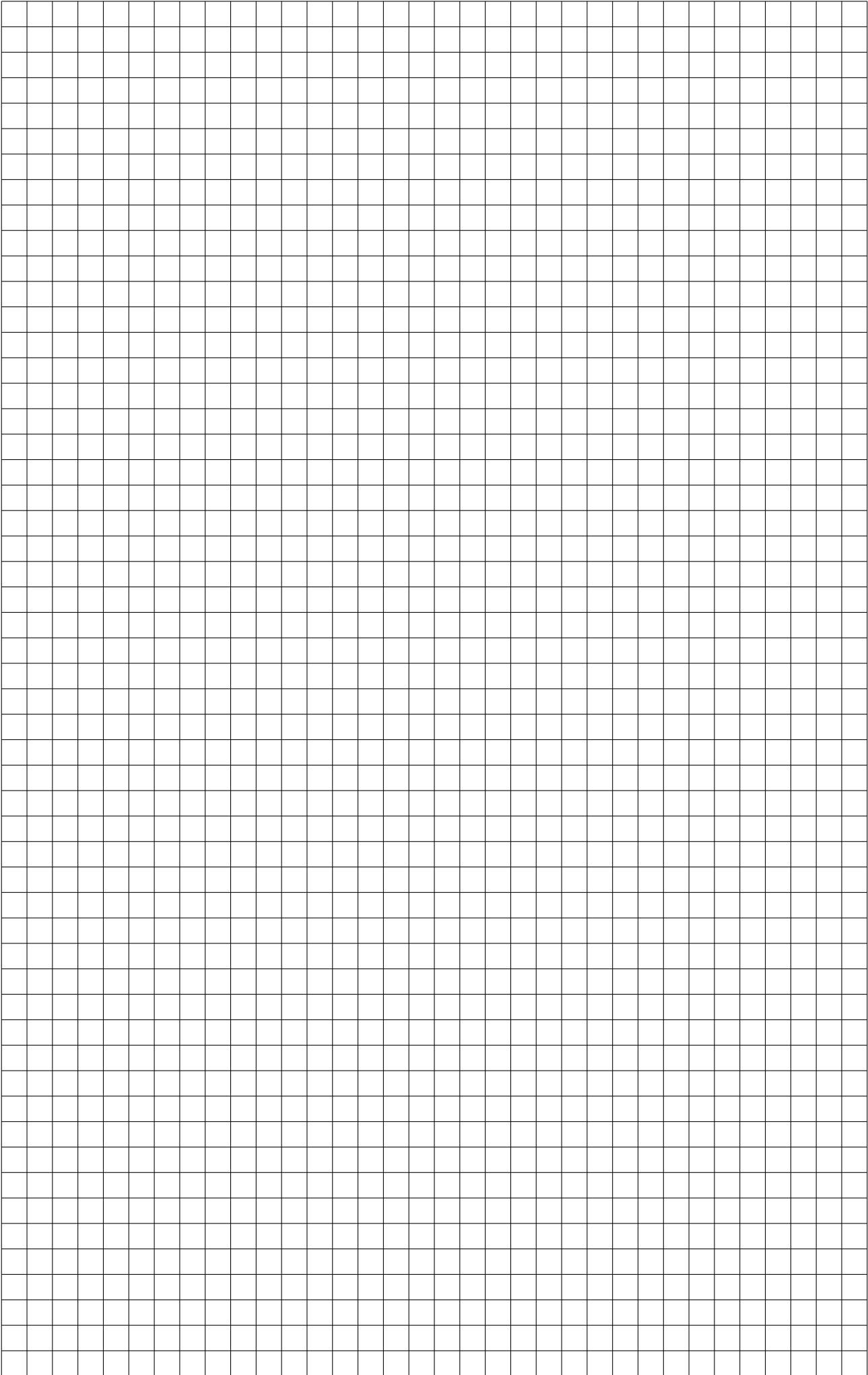
(a) punkty krytyczne: $P(9, 2)$, $H(P) = 16$, $z''_{xx}(P) = -2$

(b) punkty krytyczne: $P_1\left(-\frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right)$, $P_2\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $H(P_1) = 48$, $z''_{xx}(P_1) = 26$, $H(P_2) = -48$

(c) punkty krytyczne: $P_1\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, $P_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $P_3\left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $P_4\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right)$, $H(P_1) = 72$, $z''_{xx}(P_1) = 6$, $H(P_2) = 24$,
 $z''_{xx}(P_2) = -2$, $H(P_3) = -36$, $H(P_4) = -36$

(d) punkty krytyczne: $P_1(-1, -1)$, $P_2(1, 1)$, $H(P_1) = 32$, $z''_{xx}(P_1) = 6$, $H(P_2) = 32$, $z''_{xx}(P_2) = 6$



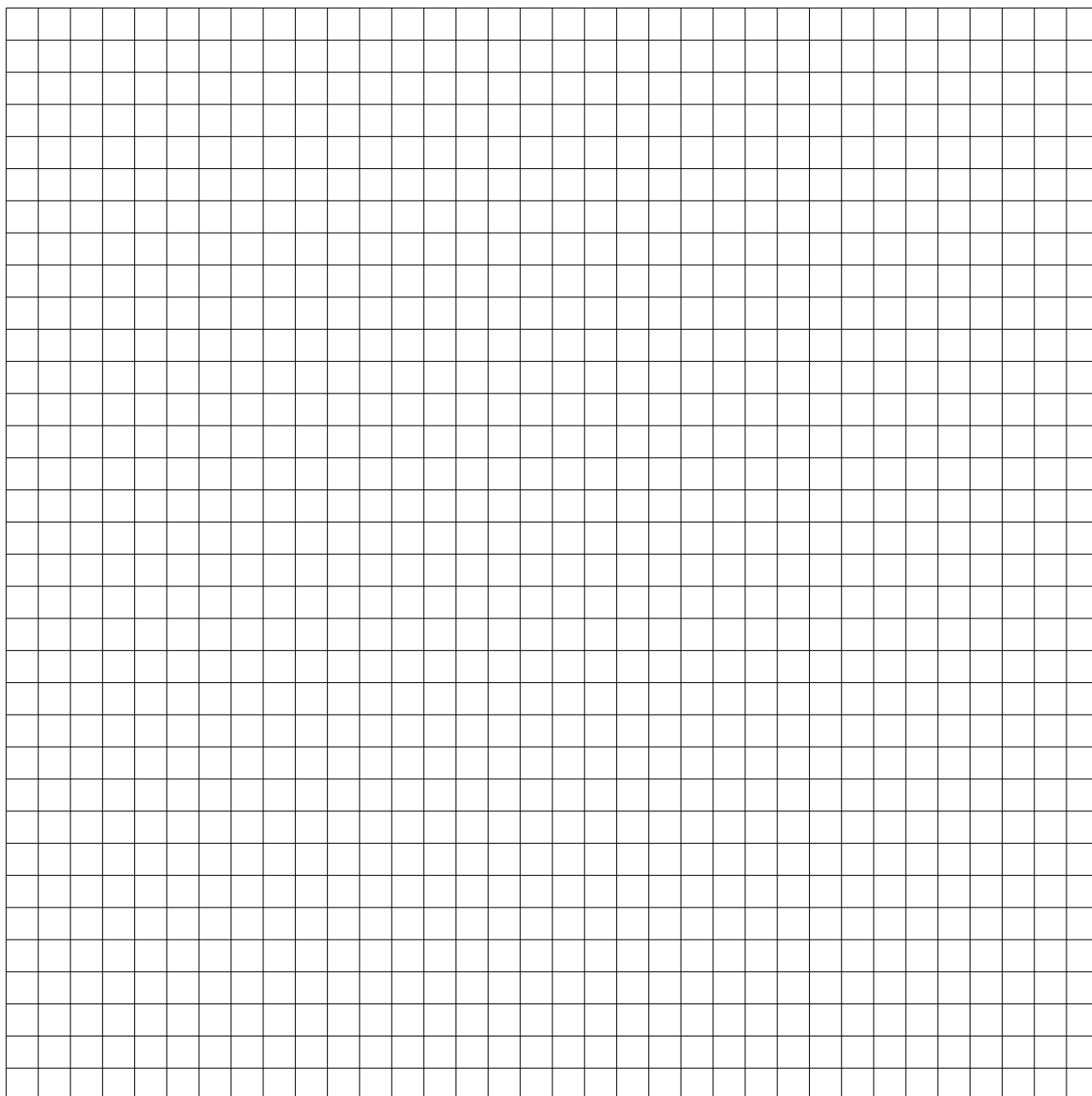


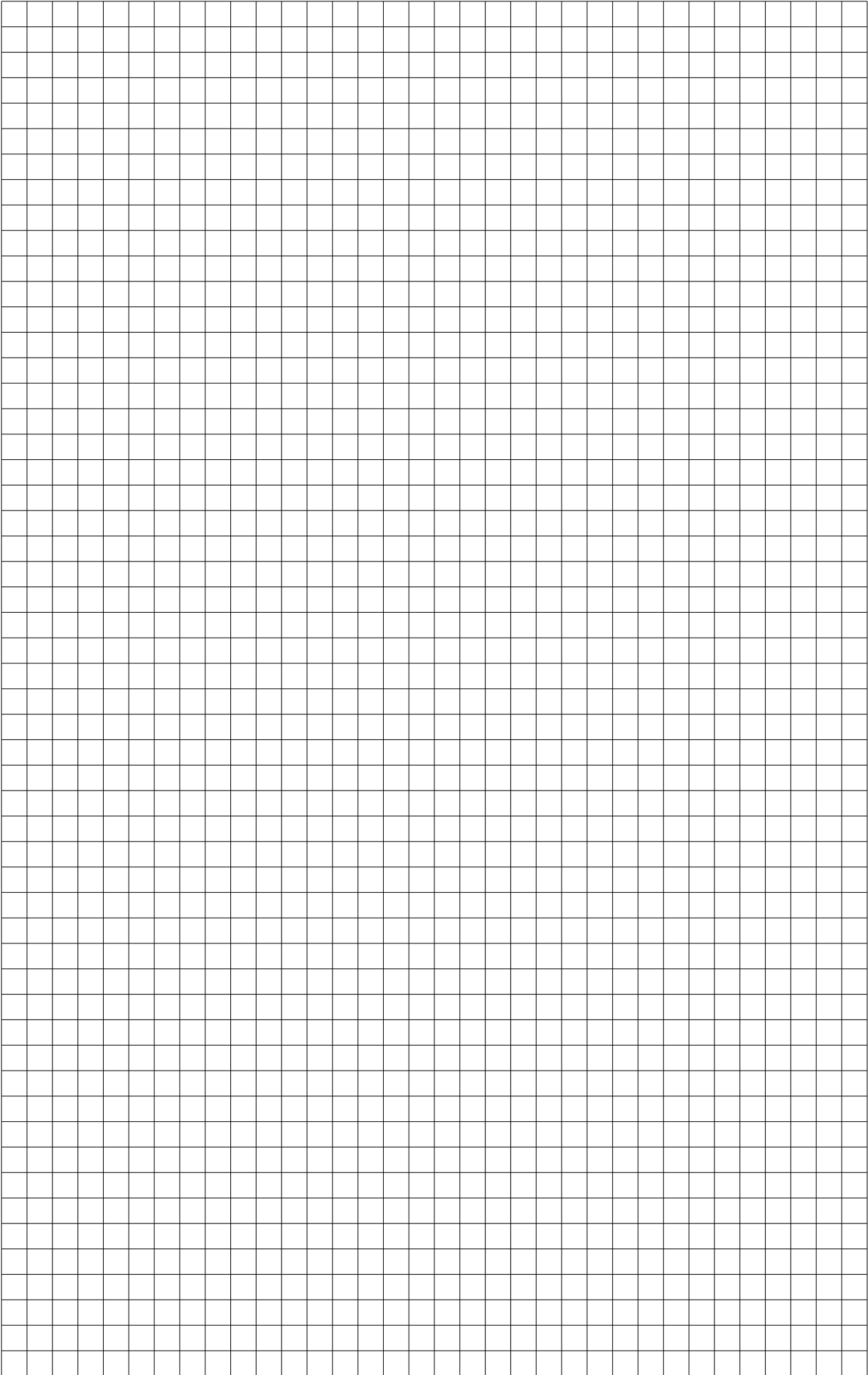
Zadanie 2

- (a) W oparciu o rachunek różniczkowy wyznacz odległość punktu $P(0, 0, 8)$ od płaszczyzny $2x - y + 2z + 2$.
- (b) Pudełko ozdobne o pojemności 20 litrów zostało pomalowane dwoma różnymi rodzajami farb : dno farbą pierwszego rodzaju, pozostałe ściany farbą drugiego rodzaju. Wiedząc, że cena farby pierwszego rodzaju wynosi 1 zł za pomalowanie 1 dm^2 , a cena farby drugiego rodzaju wynosi 4 zł za pomalowanie 1 dm^2 wyznacz wymiary pudełka o minimalnej cenie.
- (c) Układ do odcinkowego pomiaru prędkości oblicza jej średnią wartość w oparciu o wzór $v = \frac{s}{t}$, gdzie s – przebyta droga, t – czas, w którym została ona została pokonana. Pewien samochód odcinek $s = 2 \text{ km}$ przebył w czasie 1,5 min, dokładność pomiaru drogi, to $\Delta s = 5 \text{ m}$, dokładność pomiaru czasu to $\Delta t = 10 \text{ s}$. Oblicz prędkość samochodu na tym odcinku oraz dokładność z jaką została wyznaczona, wynik podaj w km/h .
- (d) Należy wyznaczyć długość przekątnej prostopadłościenną kostki $a \times b \times c = 2 \text{ cm} \times 2 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$, wzór $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Wyznacz także błąd, z jaką tą przekątną wyznaczono, jeśli pomiarów długości krawędzi prostopadłościanu dokonano z dokładnością 0,1 cm.

odpowiedzi:

- (a) odległość: 2, (b) wymiary pudełka (w decymetrach): $a = 2\sqrt[3]{4}$, $b = 2\sqrt[3]{4}$, $c = \frac{5}{4}\sqrt[3]{4}$,
(c) $v = 80 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, $\Delta v \approx 9,09 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, (d) $d = 3 \text{ cm}$, $\Delta d \approx 0,17 \text{ cm}$.





Zadanie 4 Oblicz całki podwójne po podanych obszarach:

- (a) $\iint_D xy dx dy$, gdzie D : trójkąt ABC , $A(0,0)$, $B(1,-2)$, $C(1,4)$,
(b) $\iint_D (x+y) dx dy$, gdzie D : obszar ograniczony liniami $x+y=1$, $x-y=1$, $y=1$,
(c) $\iint_D xe^y dx dy$, gdzie D : obszar ograniczony liniami $y=x$, $y=x^2$,
(d) $\iint_D x dx dy$, gdzie D : obszar ograniczony okręgiem $x^2+y^2=1$, przy czym $x \geq 0$.

odpowiedzi:

- (a) $\frac{3}{2}$, (b) $\frac{5}{3}$, (c) $\frac{3}{2} - \frac{e}{2}$, (d) $\frac{2}{3}$,

