PRACA DOMOWA I

imię i nazwisko ....

Zadanie 1 W oparciu o znane wzory i reguły różniczkowania wyznacz pochodne:

(a) 1) $\left(\frac{3}{x^4} - 5\sqrt[4]{x^3}\right)'$, 2) $(x^3 \log x)'$, 3) $\left(2^{x^3} \arcsin^2 x\right)'$

(b) 1) $\left(10\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{\sqrt{x^5}}\right)'$, 2) $\left(\frac{\operatorname{ctg} x}{\operatorname{arctg} x}\right)'$, 3) $(\ln(x^2+1)\cos^3 x)'$

(c) 1) $\left(10x^3 - \frac{4}{\sqrt[3]{x^4}}\right)'$, 2) $(10^x \arcsin x)'$, 3) $\left(x^3 \operatorname{arctg} \frac{2x}{x-1}\right)'$

(d) 1) $\left(\frac{1}{x^7} - \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}}\right)'$, 2) $\left(\frac{\sin x}{x^4+1}\right)'$, 3) $(x \operatorname{tg}^2(3x-2))'$

odpowiedzi:

(a) 1) $-\frac{12}{x^5} - \frac{15}{4\sqrt[4]{x}}$, 2) $3x^2 \log x + \frac{x^2}{\ln 10}$, 3) $\frac{2^{x^3+1}\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + 3\ 2^{x^3} x^2 \ln 2 \arcsin^2 x$

(b) 1) $\frac{20}{3\sqrt[3]{x}}$, 2) $-\frac{\frac{\operatorname{arctg} x}{\sin^2 x} + \frac{\operatorname{ctg} x}{x^2+1}}{\operatorname{arctg}^2 x}$, 3) $\frac{2x\cos x}{x^2+1} - 3\ln(x^2+1)\cos^2 x \sin x$

(c) 1) $30x^2 + \frac{16}{3\sqrt[3]{x^7}}$, 2) $10^x \ln 10 \arcsin x + \frac{10^x}{\sqrt{1-x^2}}$, 3) $3x^2 \operatorname{arctg} \frac{2x}{x-1} - \frac{2x^3}{5x^2-2x+1}$

(d) 1) $-\frac{7}{x^8} + \frac{6}{5\sqrt[5]{x^8}}$, 2) $\frac{(x^4+1)\cos x - 4x^3 \sin x}{(x^4+1)^2}$, 3) $\operatorname{tg}^2(3x-2) + \frac{6\operatorname{tg}(3x-2)}{\cos^2(3x-2)}$

Zadanie 2

(a) Zapisz wzór Taylora z dokładnością do wyrazów 3 rzędu dla funkcji $y = \operatorname{tg} x$ w okolicy $x_0 = 0$. W oparciu o ten wzór oblicz $\operatorname{tg} 10°$, do obliczeń przyjmij: $\pi \approx \frac{333}{106}$; wg kalkulatora: $\operatorname{tg} 10° \approx 0,176322$.

(b) Zapisz wzór Taylora z dokładnością do wyrazów rzędu 8 dla funkcji $y = \sqrt{x+1}$ w okolicy $x_0 = 0$. W oparciu o uzyskany wzór oblicz $\sqrt{2}$, wg kalkulatora $\sqrt{2} \approx 1,41421$.

(c) W oparciu o wzór Taylora zapisz przybliżenie funkcji $y = \frac{8x^2}{x+1}$ w pobliżu punktu $x_0 = 1$ za pomocą paraboli. Sprawdź dokładność przybliżenia dla punktów $x = 1,5$ oraz $x = 1,1$.

odpowiedzi:

(a) $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$, $10°$ to w mierze łukowej $\frac{\pi}{18} \approx \frac{37}{212} \approx 0,174528$, $\operatorname{tg} 10° \approx 0,1763$

(b) $\sqrt{x+1} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \frac{7x^5}{256} - \frac{21x^6}{1024} + \frac{33x^7}{2048} - \frac{429x^8}{32768} + o(x^8)$, $\sqrt{2} = \sqrt{1+1} \approx \frac{46147}{32768} \approx 1,40829$

(c) przybliżenie: $\frac{x}{3x+2} = x^2 + 4x - 1 + o((x-1)^2)$, wartości dokładne: $y(1,5) = \frac{36}{5} = 7,2$, $y(1,1) = \frac{484}{105} \approx 4,60952$; wartości przybliżone: $y(1.5) \approx \frac{29}{4} = 7,25$, $y(1,1) \approx \frac{461}{100} = 4,61$

Zadanie 3 Wyznaczyć przedziały monotoniczności podanych funkcji oraz ich ekstrema lokalne:
(a) $y = 3x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 2$, **(b)** $y = (2x+3)^6(3x+2)^8$, **(c)** $y = \frac{x^2-3x+4}{x-3}$, **(d)** $y = e^{-x^2}(2x+1)$.

odpowiedzi:
(a) $y \nearrow$ dla $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{4}\right)$, $x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, $y \searrow$ dla $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, maksimum lokalne dla $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, minima lokalne dla $x = -\frac{1}{4}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
(b) $y \nearrow$ dla $x \in (-3/2, -8/7), x \in (-2/3, +\infty)$, $y \searrow$ dla $x \in (-\infty, -3/2), x \in (-7/8, -2/3)$, maksimum lokalne dla $x = -7/8$, minima lokalne dla $x = -3/2$, $x = -2/3$,
(c) $y \nearrow$ dla $x \in (-\infty, 1), x \in (5, \infty)$, $y \searrow$ dla $x \in (1, 3)$, $x \in (3, 5)$, maksimum lokalne dla $x = 1$, minimum lokalne dla $x = 5$,
(d) $y \nearrow$ dla $x \in (-\infty, -1), x \in (1/2, \infty)$, $y \searrow$ dla $x \in (-1, 1/2)$, maksimum lokalne dla $x = 1/2$, minimum lokalne dla $x = -1$.