

ZADANIA 24/11/2022

Zadanie 1 Stosując tożsamość $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$:

- (a) uzasadnij, że dla trzech różnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi tożsamość $\sqrt[3]{a-b} + \sqrt[3]{b-c} + \sqrt[3]{c-a} = 0$,
- (b) znajdź miejsce geometryczne punktów (x, y) spełniających równanie $x^3 + y^3 + 3xy = 1$,
- (c) uzasadnij, że jeśli $x = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ oraz $y = a_1^3 + b_1^3 + c_1^3 - 3a_1b_1c_1$ dla pewnych a, b, c, a_1, b_1, c_1 , to także $x \cdot y = a_2^3 + b_2^3 + c_2^3 - 3a_2b_2c_2$ dla pewnych a_2, b_2, c_2

Zadanie 2 Rozważmy wypukły czworokąt $ABCD$. Udowodnij, że AC jest prostopadłe do BD wtedy i tylko wtedy, gdy $AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$.

(24/11/2022) Zadanie 1 Dany jest czworokąt $ABCD$ taki, że boki AB i CD nie są równoległe. Wyznacz miejsce geometryczne punktów M leżących wewnątrz tego czworokąta, że pole trójkątów ABM i CDM są jednakowe.

(24/11/2022) Zadanie 2 Rozwiąż równanie $\sqrt{5-x} = 5-x^2$.

(24/11/2022) Zadanie 1 Stosując indukcję matematyczną:

- (d) Uzasadnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n liczba $7^{7^n} + 1$ jest iloczynem co najmniej $2n + 3$ liczb pierwszych (niekoniecznie różnych).

(24/11/2022) Zadanie 4 Ciąg rosnący $1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, \dots$ zawiera potęgi 3-ki oraz liczby, które dadzą się zapisać jako sumy różnych potęg 3-ki. Wyznacz setny wyraz tego ciągu.

(20/10/2022) Zadanie 1

Niech w_1, w_2, \dots, w_n – liczby zespolone. Linie L nazwiemy średnią dla punktów w_1, w_2, \dots, w_n jeśli można na niej znaleźć takie punkty z_1, z_2, \dots, z_n , że $\sum_{k=1}^n (z_k - w_k) = 0$. Dla liczb zespolonych $w_1 = 32 + 170i$, $w_2 = -7 + 64i$, $w_3 = -9 + 200i$, $w_4 = 1 + 27i$, $w_5 = -14 + 43i$ istnieje tylko jedna linia średnia przecinająca oś y w 3. Wyznacz współczynnik kierunkowy tej linii.

(6/10/2022) Zadanie 8 Niech $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wyznaczyć liczbę funkcji $f : S \mapsto S$ spełniających zależność $f^{50}(x) = x$ dla wszystkich $x \in S$, przy czym f^{50} oznacza pięćdziesięciokrotne złożenie funkcji f ze sobą.