

## ZADANIA 17/11/2022

**Zadanie 1** Stosując indukcję matematyczną:

- (a) Uzasadnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  zachodzi nierówność  $3^{n^2} > (n!)^4$ .
- (b) Uzasadnij, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  oraz  $x \geq -1$  zachodzi nierówność  $(1+x)^n > 1+nx$  (nierówność ta nazywana jest nierównością Bernoulliego).
- (c) Uzasadnij, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  oraz liczby pierwszej  $p$  mamy  $p$  dzieli  $n^p - n$  (jest to tzw. małe twierdzenie Fermata).
- (d) Uzasadnij, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  liczba  $7^{7^n} + 1$  jest iloczynem co najmniej  $2n + 3$  liczb pierwszych (niekoniecznie różnych).

**Zadanie 2** Linia prosta przecina boki  $AB$  i  $BC$  trójkąta  $ABC$  odpowiednio w punktach  $M$  i  $K$  w ten sposób, że pole trójkąta  $MBK$  oraz czworokąta  $AMKC$  są równe. Udowodnij, że

$$\frac{MB + BK}{AM + CA + KC} \geq \frac{1}{3}.$$

**Zadanie 3** Dla dowolnego ułamka nieskracalnego  $p/q$  ( $p, q$  – liczby całkowite dodatnie) przyporządkowujemy iloczyn licznika i mianownika  $p \cdot q$ . Dla ilu takich ułamków reprezentujących liczby wymierne z przedziału  $(0, 1)$  przyporządkowano iloczyn wynoszący 20!?

**Zadanie 4** Ciąg rosnący  $1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, \dots$  zawiera potęgi 3-ki oraz liczby, które dadzą się zapisać jako sumy różnych potęg 3-ki. Wyznacz setny wyraz tego ciągu.

### (10/11/2022) Zadanie 2

Niech  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  – pierwiastki wielomianu  $P_n(x) = x^n - 1$  różne od  $x = 1$ . Udowodnij, że dla  $n \geq 2$ :

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \dots + \frac{1}{1-x_{n-1}} = \frac{n-1}{2}$$

### (10/11/2022) Zadanie 3

Na ile sposobów można ustawić 6 dziewcząt i 15 chłopców tańczących w kole w ten sposób, żeby było co najmniej dwóch chłopców pomiędzy kolejnymi dziewczętami.

### (20/10/2022) Zadanie 1

(c) Niech  $w_1, w_2, \dots, w_n$  – liczby zespolone. Linie  $L$  nazwiemy średnią dla punktów  $w_1, w_2, \dots, w_n$  jeśli można na niej znaleźć takie punkty  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , że  $\sum_{k=1}^n (z_k - w_k) = 0$ . Dla liczb zespolonych  $w_1 = 32 + 170i$ ,  $w_2 = -7 + 64i$ ,  $w_3 = -9 + 200i$ ,  $w_4 = 1 + 27i$ ,  $w_5 = -14 + 43i$  istnieje tylko jedna linia średnia przecinająca oś  $y$  w 3. Wyznacz współczynnik kierunkowy tej linii.

**(6/10/2022) Zadanie 8** Niech  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Wyznaczyć liczbę funkcji  $f : S \mapsto S$  spełniających zależność  $f^{50}(x) = x$  dla wszystkich  $x \in S$ , przy czym  $f^{50}$  oznacza pięćdziesięciokrotne złożenie funkcji  $f$  ze sobą.