ZADANIA 02/02/2023

Zadanie 1
nierówność Cauchy'ego–Schwarza: Dla liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ zachodzi nierówność:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)^2$$

nierówność Jensena: dla dowolnej funkcji wypukłej $y = f(x)$ w przedziale I oraz $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, nieujemnych liczb rzeczywistych $t_1, t_2, \ldots, t_n$, takich, że $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$ zachodzi nierówność:

$$t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + \ldots + t_n f(x_n) \geqslant f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_n x_n)$$

Wykorzystując powyższe nierówności (obie lub jedną z nich) udowodnij, że zachodzą nierówności:
(a) $a, b, c, d > 0$, wtedy:

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \geqslant \frac{16}{3(a+b+c+d)}$$

(b) $a, b, c > 0$, wtedy:

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} < \sqrt{2(a+b+c)}$$

(c) $a, b, c > 0$, wtedy:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$$

(d) $a_1, a_2, \ldots a_n > 0$, wtedy:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

(e) $a, b, c > 0$, wtedy:

$$\sqrt{ab^2(b+c)} + \sqrt{bc^2(c+a)} + \sqrt{ca^2(a+b)} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)^4 - (a^2+b^2+c^2)^2}$$

Zadanie 2 Rozwiąż równanie w liczbach rzeczywistych:

$$10^x + 11^x + 12^x = 13^x + 14^x.$$

Zadanie 3 *Spiralne podobieństwo* względem punktu O (nazywanego *środkiem spiralnego podobieństwa*) to przekształcenie, które jest złożeniem obrotu i jednokładności (dla obu przekształceń środkiem jest punkt O).
Niech A, B, C, D będą czterema różnymi punktami na płaszczyźnie, takimi, że AC i BD nie są równoległe. Niech linie zawierające AC i BD przecinają się w punkcie X oraz niech okręgi opisane na trójkątach ABX oraz CDX przecinają się w drugim punkcie O. Udowodnić, że O jest środkiem jedynego spiralnego podobieństwa przeprowadzającym A na C oraz B na D.

Zadanie 4 Niech $ABCDE$ wypukły pięciokąt taki, że:

$$\angle BAC = \angle CAD = \angle DAE \;\text{ oraz }\; \angle CBA = \angle DCA = \angle EDA$$

Przekątne BD i CE przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że prosta AP połowi odcinek CD.

(26/01/2023) Zadanie 1 Wykazać, że dla każdej liczby pierwszej $p > 3$ istnieją liczby całkowite x, y, k spełniające warunki $0 < 2k < p$ oraz

$$kp + 3 = x^2 + y^2.$$

(19/01/2023) Zadanie 1 Tablica $n \times n$ jest wypełniona przez 0 i 1 w ten sposób, że losowo wybierając n komórek tej tabeli (z różnych wierszy i kolumn) conajmniej jedna będzie zawierała 1. Udowodnij, że można wybrać i wierszy i j kolumn $(i + j \geqslant n + 1)$ w taki sposób, że na ich przecięciu występują same 1.

(05/01/2023) Zadanie 1 Uzasadnij, że kwadratu nie sie podzielić na pięć kwadratów.

(05/01/2023) Zadanie 2
Udowodnij następujące twierdzenie (**Lemat Halla**): Niech na pewnym przyjęciu znajduje się n chłopców i n dziewcząt, każdy chłopiec zna pewną grupę dziewcząt. Udowodnić, że jeśli wśród dowolnego zbioru k–elementowego chłopców $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ilość dziewcząt znanych przez tych chłopców jest nie mniejsza od k, to da się tak dobrać chłopców i dziewczęta w pary aby w każdej parze były osoby, które się znają.