

## ZADANIA 24/11/2022

**Zadanie 1** Dany jest czworokąt  $ABCD$  taki, że boki  $AB$  i  $CD$  nie są równoległe. Wyznacz miejsce geometryczne punktów  $M$  leżących wewnątrz tego czworokąta, że pole trójkątów  $ABM$  i  $CDM$  są jednakowe.

**Zadanie 2** Rozwiąż równanie  $\sqrt{5-x} = 5-x^2$ .

**(24/11/2022) Zadanie 1** Stosując indukcję matematyczną:

(d) Uzasadnij, że dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  liczba  $7^{7^n} + 1$  jest iloczynem co najmniej  $2n + 3$  liczb pierwszych (niekoniecznie różnych).

**(24/11/2022) Zadanie 4** Ciąg rosnący  $1, 3, 4, 9, 10, 12, 13, \dots$  zawiera potęgi 3-ki oraz liczby, które dadzą się zapisać jako sumy różnych potęg 3-ki. Wyznacz setny wyraz tego ciągu.

**(10/11/2022) Zadanie 2**

Niech  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  – pierwiastki wielomianu  $P_n(x) = x^n - 1$  różne od  $x = 1$ . Udowodnij, że dla  $n \geq 2$ :

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \dots + \frac{1}{1-x_{n-1}} = \frac{n-1}{2}$$

**(10/11/2022) Zadanie 3**

Na ile sposobów można ustawić 6 dziewcząt i 15 chłopców tańczących w kole w ten sposób, żeby było co najmniej dwóch chłopców pomiędzy kolejnymi dziewczętami.

**(20/10/2022) Zadanie 1**

(c) Niech  $w_1, w_2, \dots, w_n$  – liczby zespolone. Linie  $L$  nazwiemy średnią dla punktów  $w_1, w_2, \dots, w_n$  jeśli można na niej znaleźć takie punkty  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , że  $\sum_{k=1}^n (z_k - w_k) = 0$ . Dla liczb zespolonych  $w_1 = 32 + 170i$ ,  $w_2 = -7 + 64i$ ,  $w_3 = -9 + 200i$ ,  $w_4 = 1 + 27i$ ,  $w_5 = -14 + 43i$  istnieje tylko jedna linia średnia przecinająca oś  $y$  w 3. Wyznacz współczynnik kierunkowy tej linii.

**(6/10/2022) Zadanie 8** Niech  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Wyznaczyć liczbę funkcji  $f : S \mapsto S$  spełniających zależność  $f^{50}(x) = x$  dla wszystkich  $x \in S$ , przy czym  $f^{50}$  oznacza pięćdziesięciokrotne złożenie funkcji  $f$  ze sobą.