PRACA DOMOWA II

imię i nazwisko ....

Zadanie 1 Wyznaczyć przedziały monotoniczności podanych funkcji oraz ich ekstrema lokalne:
(a) $y = 3x^4 + x^3 - 2x^2 - x + 2$, **(b)** $y = (2x+3)^6(3x+2)^8$, **(c)** $y = \frac{x^2-3x+4}{x-3}$, **(d)** $y = e^{-x^2}(2x+1)$.

odpowiedzi:
(a) $y \nearrow$ dla $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{1}{4}\right)$, $x \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$, $y \searrow$ dla $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, maksimum lokalne dla $x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, minima lokalne dla $x = -\frac{1}{4}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
(b) $y \nearrow$ dla $x \in (-3/2, -8/7), x \in (-2/3, +\infty)$, $y \searrow$ dla $x \in (-\infty, -3/2), x \in (-7/8, -2/3)$, maksimum lokalne dla $x = -7/8$, minima lokalne dla $x = -3/2$, $x = -2/3$,
(c) $y \nearrow$ dla $x \in (-\infty, 1), x \in (5, \infty)$, $y \searrow$ dla $x \in (1, 3)$, $x \in (3, 5)$, maksimum lokalne dla $x = 1$, minimum lokalne dla $x = 5$,
(d) $y \nearrow$ dla $x \in (-\infty, -1), x \in (1/2, \infty)$, $y \searrow$ dla $x \in (-1, 1/2)$, maksimum lokalne dla $x = 1/2$, minimum lokalne dla $x = -1$.

Poniżej: f – funkcja ciągła dla $a \leqslant x \leqslant b$, m, M – odpowiednio najmniejsza i największa wartość funkcji f dla $a \leqslant x \leqslant b$, c – pewna liczba zawarta pomiędzy a i b.

$$(1)\colon m \cdot (b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M \cdot (b-a),\ (2)\colon \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Zadanie 2

(a)

1) W oparciu o regułę de l'Hospitala oblicz granicę $\lim\limits_{x \to -1} \frac{2x^3+5x^2+4x+1}{3x^3+8x^2+7x+2}$,

2) Oszacuj całkę oznaczoną $\int\limits_0^2 (4-x^2)dx$ w oparciu o własności (1) i (2) dzieląc przedział całkowania na dwa przedziały równej długości.

(b)

1) W oparciu o regułę de l'Hospitala oblicz granicę $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(3x)}{e^{4x}-1}$,

2) Oszacuj całkę oznaczoną $\int\limits_1^2 (4x-x^2)dx$ w oparciu o własności (1) i (2) dzieląc przedział całkowania na dwa przedziały równej długości.

(c)

1) W oparciu o regułę de l'Hospitala oblicz granicę $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x \sin x}{1-\cos(5x)}$,

2) Oszacuj całkę oznaczoną $\int\limits_{-\frac{1}{2}}^1 (x^2+2)dx$ w oparciu o własności (1) i (2) dzieląc przedział całkowania na dwa przedziały równej długości.

(d)

1) W oparciu o regułę de l'Hospitala oblicz granicę $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x}$,

2) Oszacuj całkę oznaczoną $\int\limits_1^5 (x^2-4x+5)dx$ w oparciu o własności (1) i (2) dzieląc przedział całkowania na dwa przedziały równej długości.

odpowiedzi:

(a) 1) 1, 2) $3 \leqslant \int\limits_0^2 (4-x^2)dx \leqslant 7$, **(b)** 1) $\frac{3}{4}$, 2) $\frac{27}{8} \leqslant \int\limits_1^2 (4x-x^2)dx \leqslant \frac{31}{8}$, **(c)** 1) $\frac{2}{25}$, 2) $\frac{195}{64} \leqslant \int\limits_{-\frac{1}{2}}^1 (x^2+2)dx \leqslant \frac{63}{16}$, **(d)** 1) $-\frac{1}{2}$, 2) $6 \leqslant \int\limits_1^3 (4-x^2)dx \leqslant 24$.

Zadanie 3 Oblicz całki nieoznaczone:

(a) 1) $\int \left(\frac{5}{\cos^2 x} - 3x^2 + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) dx$, 2) $\int \frac{(2x-3)dx}{(x^2-3x+5)^2}$, 3) $\int x \ln x dx$,

(b) 1) $\int \left(\frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - 4 \sin x \right) dx$, 2) $\int \frac{dx}{x(1-2\ln x)^3}$, 3) $\int x \cos(3x) dx$,

(c) 1) $\int \left(\frac{5}{\sqrt[4]{x^3}} - \frac{4}{x^2+1} + e^x \right) dx$, 2) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+3\sin x}}$, 3) $\int x \operatorname{arctg} x dx$,

(d) 1) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - 5\cos x + \frac{3}{\sqrt[3]{x^4}} \right) dx$, 2) $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx}{x^3}$, 3) $\int \sin(3x)\sin(5x) dx$.

odpowiedzi:

(a) 1) $5 \operatorname{tg} x - x^3 + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$, 2) $-\frac{1}{x^2-3x+5} + C$, 3) $\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$,

(b) 1) $2\ln x - \frac{3}{x} + 4\cos x + C$, 2) $\frac{1}{4(1-2\ln x)^2} + C$, 3) $\frac{1}{3}x\sin(3x) + \frac{1}{9}\cos(3x) + C$,

(c) 1) $20\sqrt[4]{x} - 4\operatorname{arctg} x + e^x + C$, 2) $\frac{2}{3}\sqrt{3\sin(x)+1} + C$, 3) $\frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}, x + C$,

(d) 1) $2\arcsin x - 5\sin x - \frac{15}{\sqrt[3]{x}} + C$, 2) $\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + C$, 3) $\frac{5}{16}\sin(3x)\sin(5x) + \frac{3}{16}\cos(3x)\cos(5x) + C$.