Odpowiedzi do **operator 2 × 2** (info.19)

ANDRZEJ LENARCIK .... ∅ .... ∅ ....

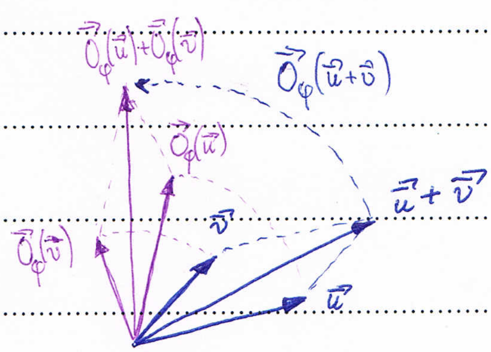
imię i nazwisko   grupa   numer zestawu

DEF Operatorem (liniowym) na płaszczyźnie nazywamy funkcję wektorową $\vec{f}$ (która przekształca wektor na wektor) o własnościach

(I) $\vec{f}(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{f}(\vec{u}) + \vec{f}(\vec{v})$ /addytywność/

(II) $\vec{f}(\lambda\vec{u}) = \lambda\vec{f}(\vec{u})$ /jednorodność/

Pierwsza własność oznacza, że dodanie wektorów i następnie przekształcenie ich sumy daje ten sam efekt, co dodanie przekształconych wektorów. Druga własność oznacza, że pomnożenie wektora przez liczbę i następnie jego przekształcenie daje ten sam efekt, co pomnożenie wektora przekształconego. Przykładem operatora liniowego jest obrót $\vec{O}_\varphi(\vec{u})$ = obrót wektora $\vec{u}$ o kąt φ



dodać i obrócić

= obrócić i dodać

przykładowy obrót o sześćdziesiąt stopni $\varphi = 60°$

Zadanie 1 Chcemy pokazać, że $\vec{f}(\vec{0})=\vec{0}$.
Korzystamy z addytywności. Piszemy

$$\cancel{\vec{f}(\vec{0})} = \vec{f}(\vec{0}+\vec{0}) = \cancel{\vec{f}(\vec{0})}+\vec{f}(\vec{0})$$

Redukując obustronnie otrzymujemy $\vec{0}=\vec{f}(\vec{0})$

Zadanie 2 Znamy $\vec{f}(\vec{i})$, $\vec{f}(\vec{j})$, a chcemy określić $\vec{f}(\vec{v})$, gdzie $\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}$. Korzystamy z własności (I) i (II):

$$\vec{f}(\vec{v})=\vec{f}(x\vec{i}+y\vec{j}) \overset{(I)}{=} \vec{f}(x\vec{i})+\vec{f}(y\vec{j}) \overset{(II)}{=} x\vec{f}(\vec{i})+y\vec{f}(\vec{j}).$$

WNIOSEK Z poprzedniego zadania wiemy, że w ustalonej bazie $\vec{i},\vec{j}$ wartości operatora $\vec{f}$ na wektorach bazy, czyli $\vec{f}(\vec{i})$ oraz $\vec{f}(\vec{j})$, jednoznacznie definiują operator.
Zapisując te wektory we współrzędnych bazy

$$\vec{f}(\vec{i}) = a\vec{i}+c\vec{j}$$

$$\vec{f}(\vec{j}) = b\vec{i}+d\vec{j}$$

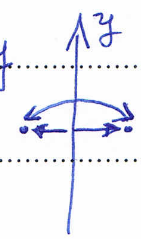
otrzymamy cztery liczby a, b, c, d jednoznacznie kodujące operator.

DEF Przyjmujemy konwencję, że w ustalonej bazie $\vec{i},\vec{j}$ współrzędne wektora $\vec{f}(\vec{i})$ tworzą pierwszą kolumnę macierzy oraz współrzędne wektora $\vec{f}(\vec{j})$ tworzą drugą kolumnę macierzy. Otrzymaną macierz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ nazywamy macierzą operatora $\vec{f}$ w bazie $\vec{i},\vec{j}$.

UWAGA Powyższa konwencja jest zgodna z zapisem macierzowym: $\vec{f}(\vec{i}) = a\vec{i} + c\vec{j} = (\vec{i}, \vec{j})\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$ oraz $\vec{f}(\vec{j}) = b\vec{i} + d\vec{j} = (\vec{i}, \vec{j})\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$; bazę $(\vec{i}, \vec{j})$ traktujemy jako wiersz.

Zadanie 3 Wyznaczamy macierze operatorów.

Obserwujemy, jak są przekształcane wektory bazy



(a) symetria względem osi pionowej $\vec{S}_{OY}$;

wektor $\vec{j}$ nie zmienia się $\vec{S}_{OY}(\vec{j}) = \vec{j}$

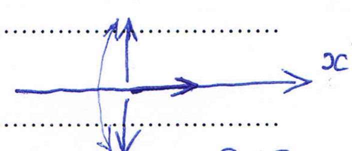
wektor $\vec{i}$ zmienia znak $\vec{S}_{OY}(\vec{i}) = -\vec{i}$

Macierz możemy zbudować tak, jak w UWADZE:

$\vec{S}_{OY}(\vec{i}) = -\vec{i} = (-1)\vec{i} + 0\vec{j} = (\vec{i}, \vec{j})\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ pierwsza kol.

$\vec{S}_{OY}(\vec{j}) = \vec{j} = 0\vec{i} + 1\vec{j} = (\vec{i}, \vec{j})\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ druga kolumna

Macierz ma postać $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



(b) symetria względem osi poziomej $\vec{S}_{OX}$

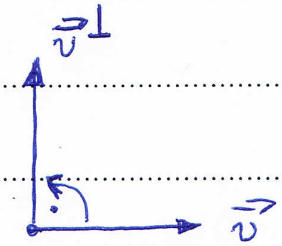
wektor $\vec{i}$ nie zmienia się $\vec{S}_{OX}(\vec{i}) = \vec{i} = 1\vec{i} + 0\vec{j} = (\vec{i}, \vec{j})\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

wektor $\vec{j}$ zmienia znak $\vec{S}_{OX}(\vec{j}) = -\vec{j} = 0\vec{i} + (-1)\vec{j} = (\vec{i}, \vec{j})\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

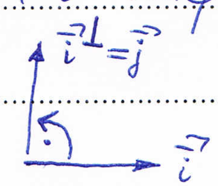
Macierz ma postać $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

Zadanie 3 (cd.)

(c) Obrotowi poświęcimy więcej uwagi. Przypomnijmy definicję funkcji trygonometrycznych za pomocą obrotu. Potrzebujemy najpierw obrotu o 90° / przeciwnie do ruchu wskazówek zegara /, który też jest operatorem. Dla danego wektora $\vec{v}$ piszemy $\vec{v}^{\perp}$ = wektor obrócony o 90° przeciwnie do ruchu wskazówek zegara



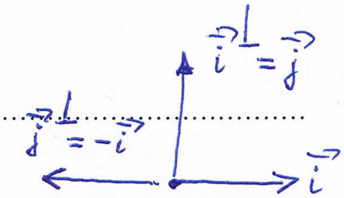
Jeżeli $\vec{v}$ jest niezerowy, to $\vec{v}, \vec{v}^{\perp}$ tworzą bazę.
Przypomnijmy, że cosinusem i sinusem kąta φ nazywamy z definicji współrzędne wektora $\vec{O}_{\varphi}(\vec{v})$ = wektor $\vec{v}$ obrócony o kąt φ w bazie $\vec{v}, \vec{v}^{\perp}$.
Czyli $\vec{O}_{\varphi}(\vec{v}) = \vec{v}\cos\varphi + \vec{v}^{\perp}\sin\varphi$. Wstawiając $\vec{i}$ w miejsce $\vec{v}$ otrzymamy $\vec{O}_{\varphi}(\vec{i}) = \vec{i}\cos\varphi + \vec{i}^{\perp}\sin\varphi$.
Tu potrzebujemy założenia, że $\vec{i}^{\perp} = \vec{j}$



Wtedy $\vec{O}_{\varphi}(\vec{i}) = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi =$

$= (\vec{i}, \vec{j})\begin{bmatrix}\cos\varphi \\ \sin\varphi\end{bmatrix}$ i otrzymaliśmy pierwszą kolumnę macierzy obrotu.

Zadanie 3 (cd 2)



Teraz obróćmy drugi wektor bazy:

$\vec{O}_\varphi(\vec{j}) = \vec{j}\cos\varphi + \vec{j}^{\perp}\sin\varphi$. Zauważamy, że $\vec{j}^{\perp} = -\vec{i}$.

Stąd $\vec{O}_\varphi(\vec{j}) = \vec{i}(-\sin\varphi) + \vec{j}\cos\varphi = (\vec{i}, \vec{j})\begin{bmatrix}-\sin\varphi \\ \cos\varphi\end{bmatrix}$.

Otrzymaliśmy drugą kolumnę macierzy obrotu.

Zatem wynikowa macierz ma postać $\begin{bmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{bmatrix}$

Zadanie 4

Liczby x', y' definiujemy jako współrzędne wektora $\vec{f}(\vec{v})$ w bazie $\vec{i}, \vec{j}$, gdzie $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Możemy napisać $\vec{f}(\vec{v}) = x'\vec{i} + y'\vec{j}$. (*)

Z drugiej strony $\vec{f}(\vec{v}) = \vec{f}(x\vec{i} + y\vec{j}) \overset{I,II}{=}$ (Zad2)

$x\vec{f}(\vec{i}) + y\vec{f}(\vec{j}) = x(a\vec{i} + c\vec{j}) + y(b\vec{i} + d\vec{j}) =$

$= ax\vec{i} + cx\vec{j} + by\vec{i} + dy\vec{j} =$

$\vec{i}(ax + by) + \vec{j}(cx + dy)$ (**)

Z jednoznaczności współrzędnych w bazie (patrzymy na (*) i (**)) mamy $x' = ax + by$, $y' = cx + dy$.

Macierzowo:

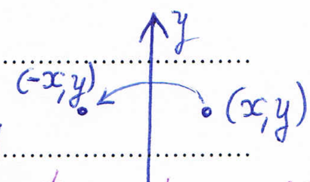
$$\begin{bmatrix}x' \\ y'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}ax + by \\ cx + dy\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & b \\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x \\ y\end{bmatrix},$$

co chcieliśmy pokazać.

Zadanie 5 Mamy już wyznaczone macierze operatorów z zadania 3 i możemy skorzystać z zadania 4

(a) symetria $\overrightarrow{S_{OY}}$

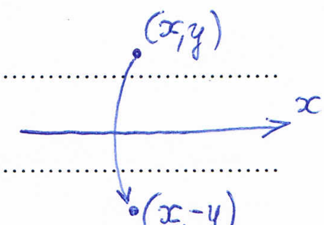
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x+0y \\ 0x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$



ten wynik można było wymyślić bez rachunku macierzowego

(b) symetria $\overrightarrow{S_{OX}}$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+0y \\ 0x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$



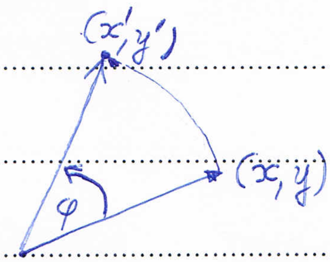
to też można wymyślić bez rachunku macierzowego

(c) obrót $\overrightarrow{O_\varphi}$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{bmatrix}$$

Otrzymaliśmy

$$\begin{cases} x' = x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y' = x\sin\varphi + y\cos\varphi \end{cases}$$

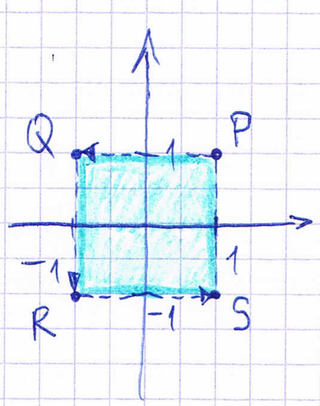


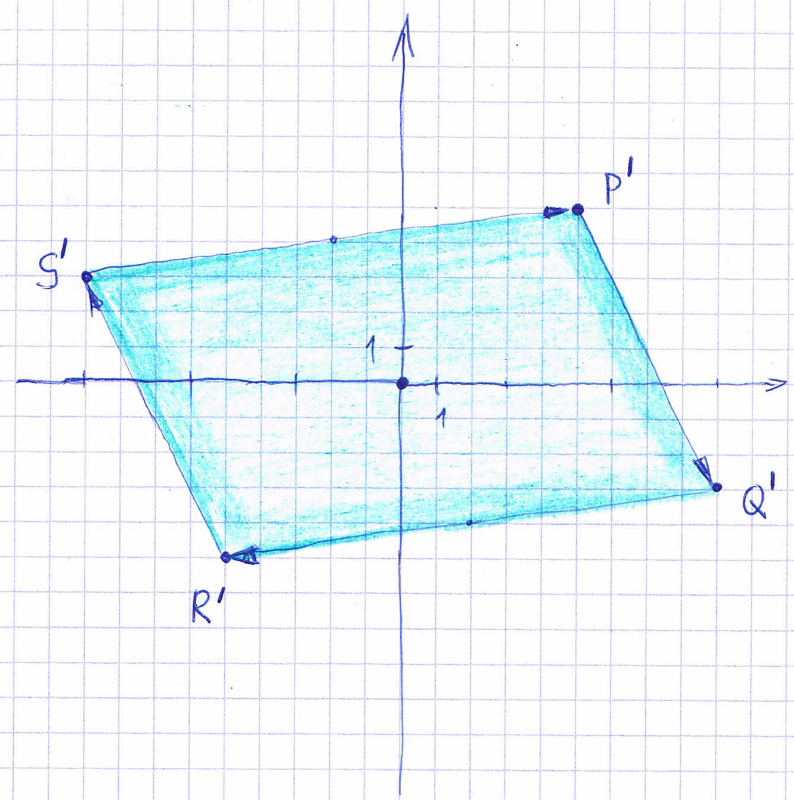
ten wynik trudno wymyślić bez dodatkowych narzędzi matematycznych

Zadanie 6 Wyznaczamy współrzędne kwadratu $P(1,1)$, $Q(-1,1)$, $R(-1,-1)$, $S(1,-1)$ przekształconego przez operator o macierzy $\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. Punkt (x,y) przechodzi na punkt (x',y') zgodnie z wzorem:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x+7y \\ 4x+y \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x' = -2x+7y \\ y' = 4x+y \end{cases}$$

punkt	x	y	punkt	x' $-2x+7y$	y' $4x+y$
P	1	1	P'	5	5
Q	-1	1	Q'	9	-3
R	-1	-1	R'	-5	-5
S	1	-1	S'	-9	3





DEF Niezerowy wektor $\vec{v}$ nazywamy wektorem własnym operatora $\vec{f}$, jeżeli istnieje liczba λ (zwana wartością własną operatora takie, że $\vec{f}(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.

DEF Liczbę λ nazywamy wartością własną operatora $\vec{f}$, jeżeli istnieje niezerowy wektor $\vec{v}$ (nazywany wektorem własnym operatora) taki, że $\vec{f}(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$.

Zadanie 7 Szukamy wektorów i wartości własnych operatora o macierzy $\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. W zapisie macierzowym warunek $\vec{f}(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

gdzie x, y, λ są niewiadomymi oraz wiadomo, że wektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ jest niezerowy. Związek macierzowy przekształcamy do układu równań:

$$\begin{cases} -2x + 7y = \lambda x \\ 4x + y = \lambda y \end{cases} \qquad \begin{cases} (-2-\lambda)x + 7y = 0 \\ 4x + (1-\lambda)y = 0 \end{cases} \quad (*)$$

Para $x=0, y=0$ spełnia układ (*). Zatem, gdyby wyznacznik tego układu był niezerowy, to z twierdzenia Cramera $x=0, y=0$ byłoby jedynym rozwiązaniem i nie byłoby szans na wyznaczenie niezerowego wektora własnego.

Zadanie 7 (cd) Zatem szansa wyznaczenia niezerowego wektora własnego pozostaje, gdy wyznacznik układu (*) jest zerem, czyli gdy $\begin{vmatrix} -2-\lambda & 7 \\ 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$, co daje

$(-2-\lambda)(1-\lambda)-28=0$; $-2+2\lambda-\lambda+\lambda^2-28=0$;

$\lambda^2+\lambda-30=0$; $\Delta = 1^2-4\cdot1\cdot(-30)=121$; $\sqrt{\Delta}=11$

$\lambda_1 = \frac{-1-11}{2} = -6$; $\lambda_2 = \frac{-1+11}{2} = 5$.

Liczby $\lambda_1=-6$ i $\lambda_2=5$ są kandydatami na wartości własne (musimy jeszcze wyznaczyć wektory).

Wstawiamy kolejno te liczby do układu (*)

$\boxed{\lambda_1=-6}$ $\begin{cases} (-2+6)x+7y=0 \\ 4x+(1+7)y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x+7y=0 \\ 4x+7y=0 \end{cases}$

Upewniamy się, że $W=\begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}=0$. Jest to układ Kroneckera-Capelli'ego typu $rzA = rzU = 1$, czyli zbiór rozwiązań jest jednowymiarowy. Przyjmując $x=t$ otrzymujemy $7y=-4t$, $y=-\frac{4}{7}t$. Zatem rozwiązaniem jest prosta $\begin{cases} x=t \\ y=-\frac{4}{7}t \end{cases}$. Dla $t=7$ otrzymujemy rozwiązanie o całkowitych współrzędnych $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix}$. Sprawdzamy warunek definiujący

$$\vec{f}(\vec{v}_1) = \begin{bmatrix} -2 & 7 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42 \\ 24 \end{bmatrix} = -6\begin{bmatrix} 7 \\ -4 \end{bmatrix} = -6\vec{v}_1 \quad \text{OK}$$

Zadanie 7 (cd2)

$\boxed{\lambda_2 = 5}$ $\begin{cases}(-2-5)x+7y=0\\ 4x+(1-5)y=0\end{cases}$ $\begin{cases}-7x+7y=0\\ 4x-4y=0\end{cases}$

Upewniamy się, że $W = \begin{vmatrix}-7 & 7\\ 4 & -4\end{vmatrix} = 0$. Mamy $rA = rU = 1$.

Zbiór rozwiązań jest jednowymiarowy (prosta).

Przyjmując $x = t$ obliczamy $7y = 7t$; $y = t$.

Rozwiązaniem jest prosta $\begin{cases}x = t\\ y = t\end{cases}$

Najprościej przyjąć $t = 1$. Otrzymaliśmy $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$.

Sprawdzamy warunek definiujący

$$\vec{f}(\vec{v}_2) = \begin{bmatrix}-2 & 7\\ 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\5\end{bmatrix} = 5\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = 5\vec{v}_2 \quad \text{OK}$$

Zadanie 8

Zwrot „wtedy i tylko wtedy" zobowiązuje nas do przeprowadzenia dowodu w obie strony.

($\Rightarrow$) Załóżmy, że λ jest wartością własną. Chcemy pokazać, że $\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{vmatrix} = 0$. Skoro λ jest wartością własną, to istnieje niezerowy wektor $\vec{v} = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ taki, że $\vec{f}(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$, czyli $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$, co jest równoważne $\begin{cases}(a-\lambda)x + by = 0\\ cx + (d-\lambda)y = 0.\end{cases}$

Punkt $(0,0)$ spełnia ten układ, ale mamy też rozwiązanie niezerowe (x,y) pochodzące od $\vec{v}$. Nie może zatem być $W \neq 0$. Zatem jest $W = 0$.

Zadanie 8 (cd)

($\Leftarrow$) Zakładamy, że λ spełnia $\overset{\text{równanie charakterystyczne operatora}}{\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = 0}$. Mamy pokazać, że λ jest wartością własną, czyli mamy udowodnić, że istnieje niezerowy wektor własny $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Współrzędne tego wektora spełniają układ $\begin{cases} (a-\lambda)x + by = 0 \\ cx + (d-\lambda)y = 0 \end{cases}$.

Wystarczy pokazać, że ten układ ma niezerowe rozwiązanie.

Zerowanie się wyznacznika oznacza, że $rzA < 2$, czyli $rzA = 1$ lub $rzA = 0$. Ponadto mamy

$$rzA = rz\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = rz\begin{bmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ c & d-\lambda & 0 \end{bmatrix} = rzU.$$

Zatem z twierdzenia K-C wynika, że układ ma rozwiązania i wymiar przestrzeni rozwiązań wynosi $2 - rzA$ (czyli jest równy 1 lub 2). Ponieważ zbiór rozwiązań jest prostą lub płaszczyzną, więc zawiera rozwiązanie $(x,y) \neq (0,0)$. Kładziemy $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Zadanie 9

Mamy $\vec{f}(v_1) = \lambda\vec{v}_1$ i $\vec{f}(\vec{v}_2) = \lambda\vec{v}_2$.

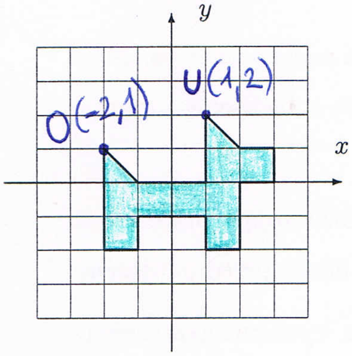
Piszemy $\vec{f}(\vec{v}_1) = \lambda_1\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ oraz

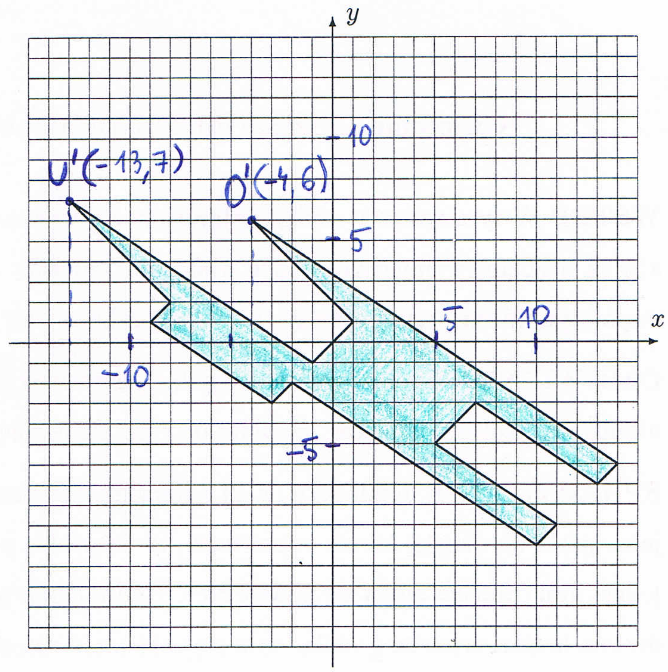
$\vec{f}(\vec{v}_2) = 0\vec{v}_1 + \lambda_2\vec{v}_2 = (\vec{v}_1, \vec{v}_2)\begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$

Czyli macierz $\vec{f}$ w bazie $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ ma postać

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$ (jest to tzw. macierz diagonalna)

Zadanie 10 Operator o macierzy A przekształca pieska uwidocznionego w lewym układzie na pieska widocznego w prawym układzie. Wyznaczyć macierz A oraz jej wartości własne i wektory własne. Sprawdzić algebraicznie i graficznie.





Zaczniemy od wyznaczenia macierzy. Szukamy macierzy $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ traktując jej wyrazy, jako niewiadome.

Czubek ucha $U(1,2)$ przechodzi na $U'(-13,7)$. Stąd

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 \\ 7 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} a + 2b = -13 \\ c + 2d = 7 \end{cases}$$

Czubek ogona $O(-2,1)$ przechodzi na $O'(-4,6)$. Stąd

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} -2a + b = -4 \\ -2c + d = 6 \end{cases}$$

Tu bierzemy pierwsze równania

$$\begin{cases} a+2b=-13 \\ -2a+b=-4 \end{cases} \qquad W = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$W_a = \begin{vmatrix} -13 & 2 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad a = \frac{-5}{5} = -1$$

$$W_b = \begin{vmatrix} 1 & -13 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -30 \qquad b = \frac{-30}{5} = -6$$

Tu bierzemy drugie równania

$$\begin{cases} c+2d=7 \\ -2c+d=6 \end{cases} \qquad W = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$W_c = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -5 \qquad c = \frac{-5}{5} = -1$$

$$W_d = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 20 \qquad c = \frac{20}{5} = 4$$

Zadanie 10 (cd)

Otrzymaliśmy macierz $A = \begin{bmatrix} -1 & -6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

Sprawdźmy jej poprawność w dwóch dodatkowych punktach. Pięta $P(-2,-2)$ przechodzi na $P'(14,-6)$.

Macierzowo: $\begin{bmatrix} -1 & -6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ -6 \end{bmatrix}$ zgadza się.

Nos $N(3,1)$ przechodzi na $N'(-9,1)$. Macierzowo:

$\begin{bmatrix} -1 & -6 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix}$ zgadza się.

równanie charakterystyczne operatora

Teraz wyznaczmy wartości własne: $\begin{vmatrix} -1-\lambda & -6 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(-1-\lambda)(4-\lambda) - 6 = 0$; $-4 + \lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 6 = 0$;

$\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$; $\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-10) = 49$, $\sqrt{\Delta} = 7$;

$\lambda_1 = \frac{3-7}{2} = \frac{-4}{2} = -2$; $\lambda_2 = \frac{3+7}{2} = 5$.

$\boxed{\lambda_1 = -2}$ Szukamy wektora własnego $\vec{v_1}$ rozwiązując układ K-C $\begin{cases} (a-\lambda)x + by = 0 \\ cx + (d-\lambda)y = 0 \end{cases}$, który ma postać

$\begin{cases} (-1+2)x - 6y = 0 \\ -x + (4+2)y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x - 6y = 0 \\ -x + 6y = 0 \end{cases}$ $W = \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 6-6=0$

Upewniamy się, że wyznacznik się zeruje

Mamy $rzA_1 = rz\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = 1$ $rzU_1 = \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 \\ -1 & 6 & 0 \end{bmatrix} = 1$.

Ponieważ $rzA_1 = rzU_1 = 1$, więc rozwiązania istnieją i wymiar zbioru rozwiązań wynosi $2-1 = 1$ /prosta/

Zadanie 10 (cd 2)

Przyjmujemy $x=t$ i obliczamy $6y=t$; $y=\frac{1}{6}t$

$\begin{cases} x=t \\ y=\frac{1}{6}t \end{cases}$. Dla $t=6$ otrzymujemy wektor $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}$

o współrzędnych całkowitych. Sprawdzamy (algebraiczny) warunek definiujący:

$$\vec{f}(\vec{v}_1)=\begin{bmatrix}-1 & -6\\-1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-12\\-2\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}=-2\vec{v}_1 \quad \text{OK.}$$

$\boxed{\lambda_2=5}$ Szukamy wektora własnego $\vec{v}_2$:

$\begin{cases} (-1-5)x-6y=0 \\ -x+(4-5)y=0 \end{cases}$ $\begin{cases} -6x-6y=0 \\ -x-y=0 \end{cases}$ $W=\begin{vmatrix}-6 & -6\\-1 & -1\end{vmatrix}=6-6=0$

Upewniamy się, że wyznacznik jest zerem.

$rzA_2=rz\begin{bmatrix}-6 & -6\\-1 & -1\end{bmatrix}=1$ $rzU_2=rz\begin{bmatrix}-6 & -6 & 0\\-1 & -1 & 0\end{bmatrix}=1$; $rzA_2=rzU_2=1$.

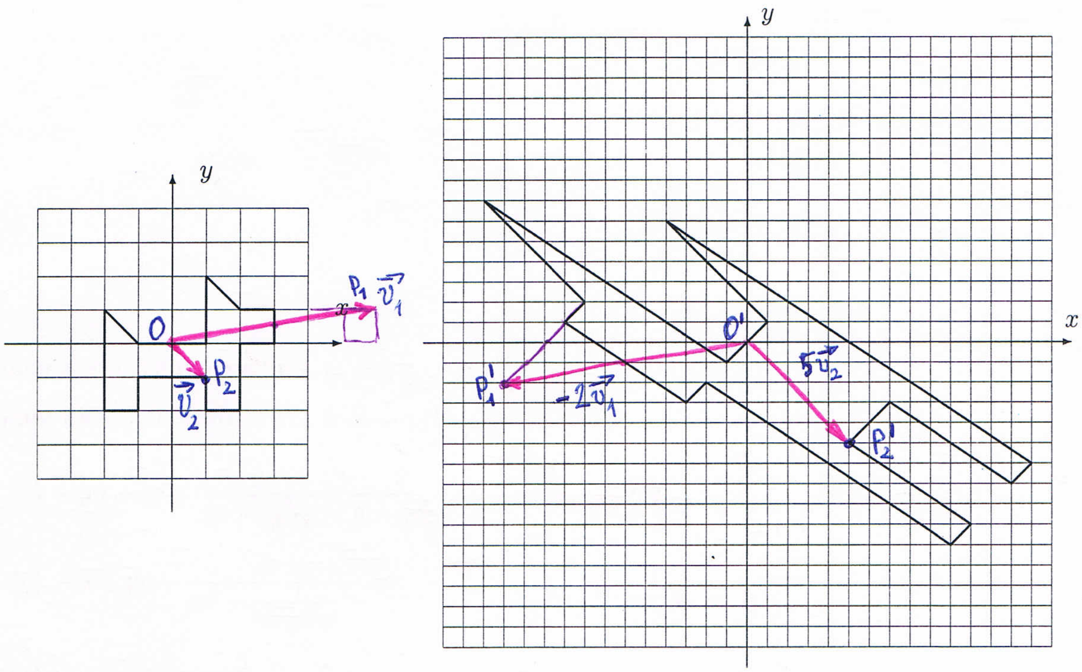
Przyjmujemy $x=t$ i obliczamy $y=-t$ $\begin{cases} x=t \\ y=-t \end{cases}$

Dla $t=1$ mamy $\vec{v}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$. Sprawdzamy warunek definiujący

$$\vec{f}(\vec{v}_2)=\begin{bmatrix}-1 & -6\\-1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\-5\end{bmatrix}=5\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=5\vec{v}_2 \quad \underline{\text{OK}}$$

Sprawdzenie graficzne na następnej kartce z „pieskiem"

Zadanie 10 Operator o macierzy A przekształca pieska uwidocznionego w lewym układzie na pieska widocznego w prawym układzie. Wyznaczyć macierz A oraz jej wartości własne i wektory własne. Sprawdzić algebraicznie i graficznie.



Rysujemy wektor $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}$ w lewym układzie współrzędnych.
Wektor ten łączy początek układu z punktem P_1, na który patrzy pies (odległość między okiem i nosem trzeba jeszcze trzykrotnie odłożyć).
To samo robimy na prawym rysunku. Pies patrzy na punkt P_1'.
Wektor łączący początek układu z punktem P_1', to dokładnie $-2\vec{v}_1$, czyli spełniony jest warunek $\vec{f}(\vec{v}_1) = -2\vec{v}_1$. Wektor $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ łączy początek układu z pachwiną P_2 przedniej nogi. Zaznaczamy obraz P_2' pachwiny na prawym rysunku. Wektor łączący początek prawego układu z P_2', to dokładnie $5\vec{v}_2$, czyli spełniony jest warunek $\vec{f}(\vec{v}_2) = 5\vec{v}_2$.

UWAGA i ZADANIE Mamy $\vec{f}(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ i kładziemy $\vec{u} = \alpha\vec{v}$.
Obliczamy $\vec{f}(\vec{u}) = \vec{f}(\alpha\vec{v}) = \alpha\vec{f}(\vec{v}) = \alpha\cdot\lambda\vec{v} = \lambda(\alpha\vec{v}) = \lambda\vec{u}$ OK

Zadanie 11

Wyznaczamy wartości własne dla obrotu w zależności od kąta φ. Wychodzimy od równania charakterystycznego operatora $\begin{vmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{vmatrix} = 0$

$(\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi = 0$; $\cos^2\varphi - 2\lambda\cos\varphi + \lambda^2 + \sin^2\varphi = 0$;

$\lambda^2 - 2\lambda\cos\varphi + 1 = 0$; $\Delta = (-2\cos\varphi)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = 4\cos^2\varphi - 4 =$

$= 4(\cos^2\varphi - 1) = -4(1-\cos^2\varphi) = -4\sin^2\varphi$

Widzimy, że $\Delta \leqslant 0$, czyli dla większości kątów obrót nie ma wartości (i wektorów) własnych. Wyjątkiem jest przypadek $\Delta = 0$, który jest równoważny $\sin\varphi = 0$, czyli $\varphi = k\pi$ (k całkowite). Macierz obrotu ma wtedy postać $\begin{bmatrix} \cos k\pi & -\sin k\pi \\ \sin k\pi & \cos k\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{bmatrix}$

k parzyste Równanie charakterystyczne $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ /bo $\cos k\pi = 1$/

$(\lambda-1)^2 = 0$; jedyną /podwójną/ wartością własną jest 1.

Równanie na wektory własne ma postać $\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$, co oznacza, że każdy niezerowy wektor jest własny ($\lambda = 1$, każdy jest nieruchomy) operator identyczności = obrót o $0°$, $360°$, $720°$, ...

k nieparzyste Równanie charakterystyczne $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ /bo $\cos k\pi = -1$/

$(\lambda+1)^2 = 0$; jedyną /podwójną/ wartością własną jest -1.

Jak poprzednio, każdy niezerowy wektor jest własny ($\lambda = -1$, zmiana zwrotu) symetria środkowa = obrót o $180°$, $540°$, ...