

## ZADANIA 20/10/2022

### Zadanie 1

- (a) rozwiąż równanie  $z^6 - 1 = 0$  w liczbach zespolonych,  
(b) rozwiąż równanie  $z^4 + 7 + 24i = 0$  w liczbach zespolonych,  
(c) Niech  $w_1, w_2, \dots, w_n$  – liczby zespolone. Linie  $L$  nazwiemy średnią dla punktów  $w_1, w_2, \dots, w_n$  jeśli można na niej znaleźć takie punkty  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , że  $\sum_{k=1}^n (z_k - w_k) = 0$ . Dla liczb zespolonych  $w_1 = 32 + 170i$ ,  $w_2 = -7 + 64i$ ,  $w_3 = -9 + 200i$ ,  $w_4 = 1 + 27i$ ,  $w_5 = -14 + 43i$  istnieje tylko jedna linia przecinająca oś  $y$  w 3. Wyznacz współczynnik kierunkowy tej linii.

**Zadanie 2** Jaki jest współczynnik przy  $x^2$  w wyrażeniu  $(1+x)(1+2x)(1+4x)\dots(1+2^n x)$ ?

**Zadanie 3** Oblicz  $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{100 \times 101 \times 102}$ .

**(6/10/2022) Zadanie 3** W trójkącie  $ABC$ :  $AB = AC$ , punkt  $D$  leży na odcinku  $AB$  punkt  $E$  leży na przedłużeniu odcinka  $AC$  (bliżej punktu  $C$ ),  $BD = CE$ , odcinki  $BC$  i  $DE$  przecinają się w punkcie  $G$ . Udowodnij, że  $BD = GE$ .

**(6/10/2022) Zadanie 4** Udowodnij, że jeśli liczba  $n$  jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych różnych od zera, to liczba  $5n$  również jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych różnych od zera.

**(6/10/2022) Zadanie 5** Zapisz wyrażenie  $x^4 + y^4 + (x+y)^4$  jako iloczyn czynników nierozkładalnych.

**(6/10/2022) Zadanie 6** Wyznacz ilość podzbiorów czteroelementowych  $\{a, b, c, d\}$  zbioru  $\{1, 2, \dots, 20\}$ , których suma elementów  $a + b + c + d$  jest podzielna przez 3.

**(6/10/2022) Zadanie 8** Niech  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Wyznaczyć liczbę funkcji  $f : S \mapsto S$  spełniających zależność  $f^{50}(x) = x$  dla wszystkich  $x \in S$ , przy czym  $f^{50}$  oznacza pięćdziesięciokrotne złożenie funkcji  $f$  ze sobą.