

ZADANIA 22/12/2022

Zadanie 1

- (a) czy istnieją funkcje $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, że $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^3$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$?
(b) czy istnieją funkcje $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, że $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^4$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$?

Zadanie 2 Dany jest wypukły czworokąt $ABCD$. Wyznacz miejsce geometryczne punktów M wewnątrz tego czworokąta, dla których pole trójkąta MAB jest dwa razy większe od pola trójkąta MCD .

(15/12/2022) Zadanie 1

- (c) wyznacz ostatnie dwie cyfry liczby $14^{14^{14}}$,
(d) wyznacz resztę z dzielenia $(257^{33} + 46)^{26}$ przy dzieleniu przez 50.

(15/12/2022) Zadanie 2 W trójkącie ABC punkty D i E leżą odpowiednio na BC i AC , odcinki AD i BE przecinają się w punkcie F . Wiedząc, że $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$, $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{4}$ wyznacz $\frac{AF}{FD} \cdot \frac{BF}{FE}$.

(15/12/2022) Zadanie 3 Karty z talii 52 zostały umieszczone w tablicy 4×13 . Udowodnij, że można z każdej kolumny wybrać jedną kartę w ten sposób, że wśród wybranych 13 kart znajdzie się każdy rodzaj karty, tzn. jedna 2, jedna 3 itd.

(15/12/2022) Zadanie 4 Rozważmy zbiór liczb 5-cyfrowych o różnych cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Czy da się rozbić ten zbiór na dwa rozłączne zbiory A i B , aby suma kwadratów elementów w jednym zbiorze była równa sumie kwadratów elementów w drugim zbiorze?

(15/12/2022) Zadanie 5 Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3 \\ y - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

(01/12/2022) Zadanie 1 Stosując tożsamość $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$:

- (c) uzasadnij, że jeśli $x = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ oraz $y = a_1^3 + b_1^3 + c_1^3 - 3a_1b_1c_1$ dla pewnych a, b, c, a_1, b_1, c_1 , to także $x \cdot y = a_2^3 + b_2^3 + c_2^3 - 3a_2b_2c_2$ dla pewnych a_2, b_2, c_2 .