

## ZADANIA 10/11/2022

### Zadanie 1

W trójkącie  $ABC$ , Punkt  $E$  leży na środkowej  $AD$  jest taki, że  $BE = AC$ , odcinek  $BE$  przecina  $AC$  w punkcie  $F$ . Udowodnij, że  $AF = EF$ .

### Zadanie 2

Niech  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  – pierwiastki wielomianu  $P_n(x) = x^n - 1$  różne od  $x = 1$ . Udowodnij, że dla  $n \geq 2$ :

$$\frac{1}{1-x_1} + \frac{1}{1-x_2} + \dots + \frac{1}{1-x_{n-1}} = \frac{n-1}{2}$$

### Zadanie 3

Na ile sposobów można ustawić 6 dziewcząt i 15 chłopców tańczących w kole w ten sposób, żeby było conajmniej dwóch chłopców pomiędzy kolejnymi dziewczętami.

### (03/11/2022) Zadanie 1

- (a) uzasadnij, że  $(4 \cos^2 9^\circ - 3)(4 \cos^2 27^\circ - 3) = \operatorname{tg} 9^\circ$ ,  
(b) wyznacz dodatnią liczbę całkowitą  $n$ , dla której:

$$(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 2^\circ) \dots (1 + \operatorname{tg} 45^\circ) = 2^n$$

### (20/10/2022) Zadanie 1

(c) Niech  $w_1, w_2, \dots, w_n$  – liczby zespolone. Linie  $L$  nazwiemy średnią dla punktów  $w_1, w_2, \dots, w_n$  jeśli można na niej znaleźć takie punkty  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , że  $\sum_{k=1}^n (z_k - w_k) = 0$ . Dla liczb zespolonych  $w_1 = 32 + 170i$ ,  $w_2 = -7 + 64i$ ,  $w_3 = -9 + 200i$ ,  $w_4 = 1 + 27i$ ,  $w_5 = -14 + 43i$  istnieje tylko jedna linia średnia przecinająca oś  $y$  w 3. Wyznacz współczynnik kierunkowy tej linii.

(20/10/2022) Zadanie 3 Oblicz  $\frac{1}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1}{2 \times 3 \times 4} + \dots + \frac{1}{100 \times 101 \times 102}$ .

(6/10/2022) Zadanie 6 Wyznacz ilość podzbiorów czteroelementowych  $\{a, b, c, d\}$  zbioru  $\{1, 2, \dots, 20\}$ , których suma elementów  $a + b + c + d$  jest podzielna przez 3.

(6/10/2022) Zadanie 8 Niech  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Wyznaczyć liczbę funkcji  $f : S \mapsto S$  spełniających zależność  $f^{50}(x) = x$  dla wszystkich  $x \in S$ , przy czym  $f^{50}$  oznacza pięćdziesięciokrotne złożenie funkcji  $f$  ze sobą.