ZADANIA 05/01/2023

Zadanie 1 Udowodnij, że kwadrat da się podzielić na n kwadratów dla $n \geqslant 6$. Uzasadnij, że dla $n = 5$ jest to niemożliwe.

Zadanie 2
Udowodnij następujące twierdzenie (**Lemat Halla**): Niech na pewnym przyjęciu znajduje się n chłopców i n dziewcząt, każdy chłopiec zna pewną grupę dziewcząt. Udowodnić, że jeśli wśród dowolnego zbioru k–elementowego chłopców ($k = 1, 2, \ldots, n$) ilość dziewcząt znanych przez tych chłopców jest nie mniejsza od k, to da się tak dobrać chłopców i dziewczęta w pary aby w każdej parze były osoby, które się znają.

(22/12/2022) Zadanie 1
(a) czy istnieją funkcje $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, że $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^3$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$?
(b) czy istnieją funkcje $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, że $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^4$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$?

(15/12/2022) Zadanie 1
(c) wyznacz ostatnie dwie cyfry liczby $14^{14^{14}}$,
(d) wyznacz resztę z dzielenia $(257^{33} + 46)^{26}$ przy dzieleniu przez 50.

(15/12/2022) Zadanie 2 W trójkącie ABC punkty D i E leżą odpowiednio na BC i AC, odcinki AD i BE przecinają się w punkcie F. Wiedząc, że $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$, $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{4}$ wyznacz $\frac{AF}{FD} \cdot \frac{BF}{FE}$.

(15/12/2022) Zadanie 3 Karty z talii 52 zostały umieszczone w tablicy 4×13. Udowodnij, że można z każdej kolumny wybrać jedną kartę w ten sposób, że wśród wybranych 13 kart znajdzie się każdy rodzaj karty, tzn. jedna 2, jedna 3 itd.

(15/12/2022) Zadanie 5 Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3 \\ y - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

(01/12/2022) Zadanie 1 Stosując tożsamość $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$:
(c) uzasadnij, że jeśli $x = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ oraz $y = a_1^3 + b_1^3 + c_1^3 - 3a_1b_1c_1$ dla pewnych a, b, c, a_1, b_1, c_1, to także $x \cdot y = a_2^3 + b_2^3 + c_2^3 - 3a_2b_2c_2$ dla pewnych a_2, b_2, c_2.