ZADANIA 15/12/2022

Zadanie 1
(a) uzasadnij, że $7 | \left(2222^{5555} + 5555^{2222}\right)$,
(b) $n = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 19 \cdot \ldots \cdot 2023$, wyznacz ostatnie trzy cyfry liczby n,
(c) wyznacz ostatnie dwie cyfry liczby $14^{14^{14}}$,
(d) wyznacz resztę z dzielenia $(257^{33} + 46)^{26}$ przy dzieleniu przez 50.

Zadanie 2 W trójkącie ABC punkty D i E leżą odpowiednio na BC i AC, odcinki AD i BE przecinają się w punkcie F. Wiedząc, że $\frac{BD}{DC} = \frac{2}{3}$, $\frac{AE}{EC} = \frac{3}{4}$ wyznacz $\frac{AF}{FD} \cdot \frac{BF}{FE}$.

Zadanie 3 Karty z talii 52 zostały umieszczone w tablicy 4×13. Udowodnij, że można z każdej kolumny wybrać jedną kartę w ten sposób, że wśród wybranych 13 kart znajdzie się każdy rodzaj karty, tzn. jedna 2, jedna 3 itd.

Zadanie 4 Rozważmy zbiór liczb 5–cyfrowych o różnych cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Czy da się rozbić ten zbiór na dwa rozłączne zbiory A i B, aby suma kwadratów elementów w jednym zbiorze była równa sumie kwadratów elementów w drugim zbiorze?

Zadanie 5 Rozwiąż układ równań:
$$\begin{cases} x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3 \\ y - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$

Zadanie 6 Dany jest trójkąt ostrokątny ABC, punkty O i H oznaczają odpowiednio środek okręgu opisanego na trójkącie ABC, punkt przecięcia wysokości tego trójkąta. Niech A_1, B_1, C_1 – środki odpowiednio boków BC, CA i AB. proste HA_1, HB_1, HC_1 przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach A_0, B_0 i C_0. Udowodnij, że punkty O, H i H_0 są współliniowe (punkt przecięcia wysokości w trójkącie $A_0B_0C_0$).

(01/12/2022) Zadanie 1 Stosując tożsamość $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$:
(c) uzasadnij, że jeśli $x = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ oraz $y = a_1^3 + b_1^3 + c_1^3 - 3a_1b_1c_1$ dla pewnych a, b, c, a_1, b_1, c_1, to także $x \cdot y = a_2^3 + b_2^3 + c_2^3 - 3a_2b_2c_2$ dla pewnych a_2, b_2, c_2

(24/11/2022) Zadanie 2 Rozwiąż równanie $\sqrt{5 - x} = 5 - x^2$.