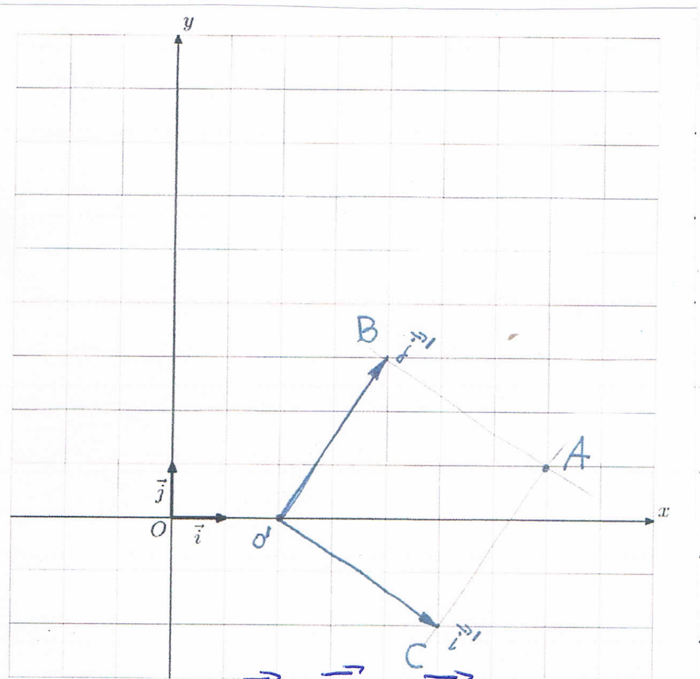
Zmiana układu współrzędnych (info.20)

1

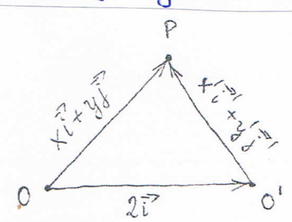
ANDRZEJ LENARCIK .... 0 .... 0 ....

imię i nazwisko — grupa — numer zestawu

Zadanie 1.



Stosujemy trójkąt obserwacyjny $\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P}$, czyli



$$x\vec{i} + y\vec{j} = 2\vec{i} + x'\vec{i}' + y'\vec{j}'.$$

Z rysunku odczytujemy dodatkowo $\vec{i}' = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{j}' = 2\vec{i} + 3\vec{j}$, więc

$$x\vec{i} + y\vec{j} = 2\vec{i} + x'(3\vec{i} - 2\vec{j}) + y'(2\vec{i} + 3\vec{j})$$

$$\underline{x\vec{i}} + \underline{\underline{y\vec{j}}} = \underline{2\vec{i}} + \underline{3x'\vec{i}} - \underline{\underline{2x'\vec{j}}} + \underline{2y'\vec{i}} + \underline{\underline{3y'\vec{j}}}$$

$$x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{i}(2 + 3x' + 2y') + \vec{j}(-2x' + 3y').$$

Z jednoznaczności współrzędnych otrzymujemy
$$\begin{cases} x = 2 + 3x' + 2y' \\ y = -2x' + 3y'. \end{cases}$$

Poprawność można sprawdzić w kilku punktach. Np. początek układu primowanego ($x' = 0$, $y' = 0$) przelicza się na $x = 2$, $y = 0$, co jest zgodne z rysunkiem. Wybieramy jeszcze kilka dodatkowych punktów

punkt	x'	y'	$x = 2 + 3x' + 2y'$	$y = -2x' + 3y'$		
A	1	1	$2+3\cdot1+2\cdot1 = 7$	$-2\cdot1+3\cdot1 = 1$	OK	bo A(7,1)
B	0	1	$2+3\cdot0+2\cdot1 = 4$	$-2\cdot0+3\cdot1 = 3$	OK	bo B(4,3)
C	1	0	$2+3\cdot1+2\cdot0 = 5$	$-2\cdot1+3\cdot0 = -2$	OK	bo C(5,-2)

Zadanie 2 (a) $11x - 3y = 61$

I. Wstawiamy przeliczenie współrzędnych do równania

$$11(2+3x'+2y') - 3(-2x'+3y') = 61$$

$$22 + \underline{33x'} + \underline{22y'} + \underline{6x'} - \underline{9y'} = 61$$

$$39x' + 13y' = 39 \quad /:13$$

$$3x' + y' = 3.$$

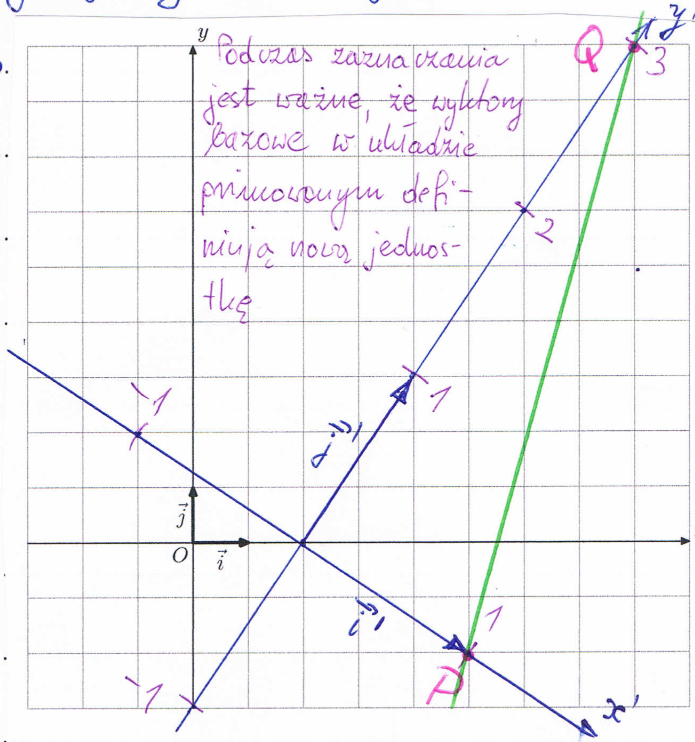
II. Oś $O'X'$ ma równanie $y'=0$. Z układu $\begin{cases} y'=0 \\ 3x'+y'=3 \end{cases}$

otrzymujemy $P: \begin{cases} y'=0 \\ x'=1 \end{cases}$

III. Oś $O'Y'$ ma równanie $x'=0$. Z układu $\begin{cases} x'=0 \\ 3x'+y'=3 \end{cases}$

otrzymujemy $Q: \begin{cases} x'=0 \\ y'=3 \end{cases}$

IV.



V. Odczytujemy z rysunku:

$P: \begin{cases} x=5 \\ y=-2 \end{cases}$

$Q: \begin{cases} x=8 \\ y=9 \end{cases}$

VI. Wstawiamy do wyjściowego równania $11x - 3y = 16$:

$P: 11\cdot 5 - 3\cdot(-2) = 61$ OK $\quad Q: 11\cdot 8 - 3\cdot 9 = 61$ OK

Zadanie 2 (b) $4x-7y+18=0$

I Wstawiamy przeliczenie współrzędnych do równania

$4(2+3x'+2y')-7(-2x'+3y')+18=0$

$8+12x'+8y'+14x'-21y'+18=0$

$26x'-13y'+26=0 \quad /:13$

$2x'-y'+2=0$

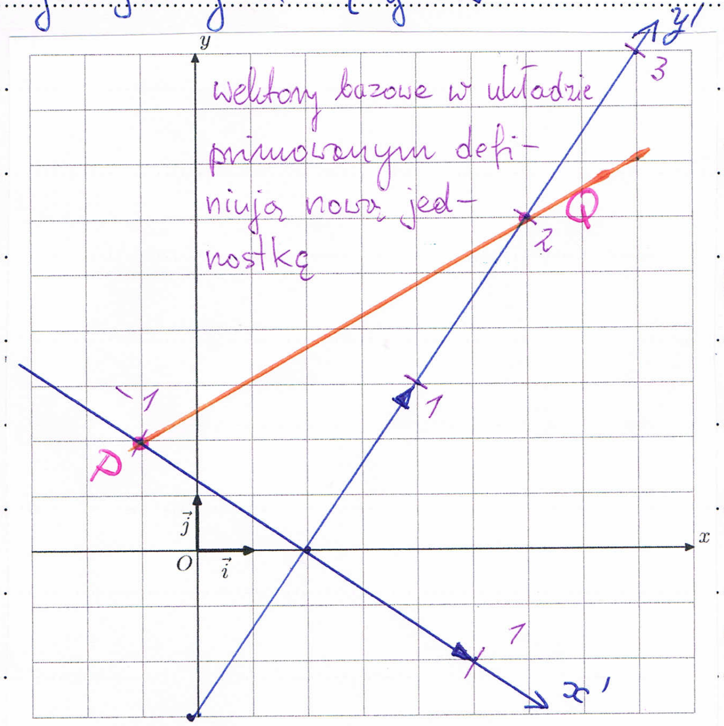
II Oś $O'X'$ ma równanie $y'=0$. Z układu $\begin{cases} y'=0 \\ 2x'-y'+2=0 \end{cases}$

otrzymujemy $P: \begin{cases} y'=0 \\ x'=-1 \end{cases}$

III Oś $O'Y'$ ma równanie $x'=0$. Z układu $\begin{cases} x'=0 \\ 2x'-y'+2=0 \end{cases}$

otrzymujemy $Q: \begin{cases} x'=0 \\ y'=2 \end{cases}$

IV



V Odczytujemy

$P: \begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$

$Q: \begin{cases} x=6 \\ y=6 \end{cases}$

VI Wstawiamy do równania

$4x-7y+18=0$

$P: 4(-1)-7\cdot 2+18=$
$=0$ dobrze

$Q: 4\cdot 6-7\cdot 6+18=0$ dobrze

Zadanie 3

Odwrotne przeliczenie współrzędnych możemy uzyskać metodą wyznacznikową:

$$\begin{cases} 3x'+2y' = x-2 \\ -2x'+3y' = y \end{cases} \qquad W=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=13, \quad W_{x'}=\begin{vmatrix} x-2 & 2 \\ y & 3 \end{vmatrix} = 3(x-2)-2y = 3x-2y-6$$

$$W_{y'}=\begin{vmatrix} 3 & x-2 \\ -2 & y \end{vmatrix} = 3y+2(x-2)=2x+3y-4$$

Zatem

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{13}(3x-2y-6) \\ y' = \frac{1}{13}(2x+3y-4) \end{cases}$$

Sprawdzenie robimy w tych samych punktach, co poprzednio.

punkt	x	y	$x' = \frac{1}{13}(3x-2y-6)$	$y' = \frac{1}{13}(2x+3y-4)$	
A	7	1	$\frac{1}{13}(21-2-6)=1$	$\frac{1}{13}(14+3-4)=1$	OK
B	4	3	$\frac{1}{13}(12-6-6)=0$	$\frac{1}{13}(8+9-4)=1$	OK
C	5	-2	$\frac{1}{13}(15+4-6)=1$	$\frac{1}{13}(10-6-4)=0$	OK

Zadanie 4

(a) Otrzymaliśmy $3x'+y'=3$. Wstawiamy:

$$\frac{3}{13}(3x-2y-6)+\frac{1}{13}(2x+3y-4)=3 \quad / \cdot 13$$

$$3(3x-2y-6)+(2x+3y-4)=39$$

$$9x-6y-18+2x+3y-4=39$$

$$11x-3y=61$$ dobrze

(b) Otrzymaliśmy $2x'-y'+2=0$. Wstawiamy:

$$\frac{2}{13}(3x-2y-6)-\frac{1}{13}(2x+3y-4)+2=0 \quad / \cdot 13$$

$$2(3x-2y-6)-(2x+3y-4)+26=0$$

$$6x-4y-12-2x-3y+4+26=0$$

$$4x-7y+18=0$$ dobrze