ZADANIA 16/02/2023

Zadanie 1 W trójkącie ABC punkty A', B' i C' leżą odpowiednio na bokach BC, CA i AB. Proste AA', BB', CC' przecinają się w punkcie O. Wyznacz $\frac{AO}{OA'} \cdot \frac{BO}{OB'} \cdot \frac{CO}{OC'}$, jeśli wiadomo, że $\frac{AO}{OA'} + \frac{BO}{OB'} + \frac{CO}{OC'} = 92$.

Zadanie 2 Niech $P_2(x) = x^2 - 2$. Wyznacz wszystkie ciągi wielomianów $\{P_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, że $P_k(x)$ jest stopnia k, współczynnik przy x^k w wielomianie $P_k(x)$ wynosi jeden oraz $P_i(P_j(x)) = P_J(P_i(x))$ dla dowolnych $i, j = 1, 2, \ldots$.

Zadanie 3 Niech $\frac{3}{4} < a < 1$. Rozwiąż równanie: $x^3(x+1) = (x+a)(2x+a)$.

Zadanie 4 Udowodnij, że istnieje nieograniczony, rosnący ciąg $\{a_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$ dodatnich liczb całkowitych, taki, że istnieje dodatnia liczba całkowita M o własności: dla każdej liczby całkowitej $n \geqslant M$ wszystkie dzielniki pierwsze $n! + 1$ są większe od $n + a_n$, przy założeniu, że $n + 1$ nie jest liczbą pierwszą.

(02/02/2023) Zadanie 1
nierówność Cauchy'ego–Schwarza: Dla liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ zachodzi nierówność:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2$$

nierówność Jensena: dla dowolnej funkcji wypukłej $y = f(x)$ w przedziale I oraz $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, nieujemnych liczb rzeczywistych $t_1, t_2, \ldots, t_n$, takich, że $t_1 + t_2 + \ldots + t_n = 1$ zachodzi nierówność:

$$t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \ldots + t_nf(x_n) \geqslant f(t_1x_1 + t_2x_2 + \ldots + t_nx_n)$$

Wykorzystując powyższe nierówności (obie lub jedną z nich) udowodnij, że zachodzą nierówności:
(a) $a, b, c, d > 0$, wtedy:

$$\frac{1}{a+b+c} + \frac{1}{a+b+d} + \frac{1}{a+c+d} + \frac{1}{b+c+d} \geqslant \frac{16}{3(a+b+c+d)}$$

(b) $a, b, c > 0$, wtedy:

$$\frac{a}{\sqrt{a+b}} + \frac{b}{\sqrt{b+c}} + \frac{c}{\sqrt{c+a}} < \sqrt{2(a+b+c)}$$

(c) $a, b, c > 0$, wtedy:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$$

(d) $a_1, a_2, \ldots a_n > 0$, wtedy:

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}$$

(e) $a, b, c > 0$, wtedy:

$$\sqrt{ab^2(b+c)} + \sqrt{bc^2(c+a)} + \sqrt{ca^2(a+b)} \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{(a+b+c)^4 - (a^2+b^2+c^2)^2}$$

(26/01/2023) Zadanie 1 Wykazać, że dla każdej liczby pierwszej $p > 3$ istnieją liczby całkowite x, y, k spełniające warunki $0 < 2k < p$ oraz

$$kp + 3 = x^2 + y^2.$$

(05/01/2023) Zadanie 1 Uzasadnij, że kwadratu nie sie podzielić na pięć kwadratów.

(05/01/2023) Zadanie 2
Udowodnij następujące twierdzenie (**Lemat Halla**): Niech na pewnym przyjęciu znajduje się n chłopców i n dziewcząt, każdy chłopiec zna pewną grupę dziewcząt. Udowodnić, że jeśli wśród dowolnego zbioru k–elementowego chłopców $(k = 1, 2, \ldots, n)$ ilość dziewcząt znanych przez tych chłopców jest nie mniejsza od k, to da się tak dobrać chłopców i dziewczęta w pary aby w każdej parze były osoby, które się znają.