Egzamin z Matematyki 1/Matematyka 3 (WISGiE/OZE/IŚ, termin pierwszy)

05/02/2021

Zadanie 1 (0 - 10 pkt.)

OZE: Oblicz pochodne: $\left(\frac{5}{x^3} - \frac{4}{\sqrt[4]{x^7}}\right)'$, $\left(\frac{\sin x}{\ln x}\right)'$, $\left(\operatorname{tg}(3x) \cdot e^{x^3}\right)'$.

IŚ: Oblicz pochodną z''_{xy} jeśli $z = y\sin(xy)$.

Zadanie 2 (0 - 10 pkt.)

OZE: Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji: $y = 6x^4 + 8x^3 - 3x^2 - 6x$.

IŚ: Wyznacz ekstrema lokalne funkcji $z = -2x^2 + xy - y^3 + x$.

Zadanie 3 (0 - 10 pkt.)

OZE: (a) Zapisz liczbę $z = \frac{2-5i}{5+2i} + i^{28}$ w postaci $a + bi$, gdzie a, b – liczby rzeczywiste.
(b) Rozwiąż równanie $z^2 - 6z + 13 = 0$ w dziedzinie zespolonej.

IŚ: Oblicz $\iint\limits_D (2x + y)dxdy$, gdzie D – trójąt ABC, gdzie $A(0,0)$, $(1,1)$, $C(1,3)$.

Zadanie 4 (0 - 10 pkt.)

OZE: Oblicz całkę: $\int \frac{7x-1}{x^2-x-6} dx$.

IŚ: Oblicz $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2}$ przechodząc do współrzędnych biegunowych, gdzie D: $x^2+y^2 \geqslant 1$, $x^2+y^2 \leqslant 9$, $y \geqslant x$, $y \geqslant -x$.

Zadanie 5 (0 - 10 pkt.)

OZE: Wyznacz pole obszaru ograniczonego liniami $y = x^2 - 2x$, $y = x - 2$. Wykonaj rysunek!

IŚ: Rozwiąż równanie różniczkowe $\frac{y'}{x^3} - 4y^2 = 0$, uwzględniając warunek początkowy $y(1) = 2$.

Zadanie 6 (0 - 10 pkt.)

OZE: Rozwiąż układ równań metodą Gaussa eliminacji:

$$\begin{cases} x + 2x - z = -1 \\ 2x + 3y - z = 0 \\ -3x + 2y + z = -1 \end{cases}$$

IŚ: Rozwiąż równanie różniczkowe $y'' - 6y' + 9y = 4e^{3x}$.

Zadanie 7 (0 - 20 pkt.)

OZE: W oparciu o definicję oblicz pochodną podanej funkcji $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ w punkcie $x_0 = 1$. Zapisz równanie stycznej do wykresu funkcji w punkcie $(x_0, f(x_0))$, naszkicuj poglądowy wykres funkcji oraz stycznej.

IŚ: Wyznacz odległość punktu $P(1, -1, 4)$ od płaszczyzny $2x - 2y - z + 1 = 0$ (wyznaczając minimum pewnej funkcji dwóch zmiennych).

Zadanie 8 (0 - 20 pkt.)

OZE: W oparciu o rachunek całkowy wyznacz położenie środka ciężkości obszaru ograniczonego liniami $y = x^2$, $y = 2x$, jeśli wiadomo, że pole obszaru wynosi $S = \frac{4}{3}$.

IŚ: W oparciu o całki podwójne wyznacz położenie środka ciężkości obszaru D: $x^2 + y^2 \leqslant 1$, $y \geqslant 0$, $x \leqslant 0$.