ZADANIA 12/01/2023

Zadanie 1 Niech a, b – dodatnie, względnie pierwsze liczby całkowite. Udowodnij, że równanie $ax + by = ab - a - b$ nie ma rozwiązań wśród nieujemnych liczb całkowitych.

Zadanie 2 Niech d i d' będą dwiema nierównoległymi prostymi na płaszczyźnie oraz niech $k > 0$. Wyznacz miejsce geometryczne punktów, dla których suma odległości od d i d' wynosi k.

Zadanie 3 Ciąg $\{a_n\}$ jest określony rekurencyjnie $a_0 = a$ (a – pewna liczba całkowita nieujemna), $a_n = a_{n-1} + 18^{n!}$, $n > 0$. Udowodnij, że $\{a_n\}$ zawiera nieskończenie wiele wyrazów podzielnych przez 2023.

(05/01/2023) Zadanie 1 Uzasadnij, że kwadratu nie sie podzielić na pięć kwadratów.

(05/01/2023) Zadanie 2
Udowodnij następujące twierdzenie (**Lemat Halla**): Niech na pewnym przyjęciu znajduje się n chłopców i n dziewcząt, każdy chłopiec zna pewną grupę dziewcząt. Udowodnić, że jeśli wśród dowolnego zbioru k–elementowego chłopców ($k = 1, 2, \ldots, n$) ilość dziewcząt znanych przez tych chłopców jest nie mniejsza od k, to da się tak dobrać chłopców i dziewczęta w pary aby w każdej parze były osoby, które się znają.

(22/12/2022) Zadanie 1
(a) czy istnieją funkcje $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, że $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^3$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$?
(b) czy istnieją funkcje $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, że $f(g(x)) = x^2$, $g(f(x)) = x^4$ dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$?

(15/12/2022) Zadanie 3 Karty z talii 52 zostały umieszczone w tablicy 4×13. Udowodnij, że można z każdej kolumny wybrać jedną kartę w ten sposób, że wśród wybranych 13 kart znajdzie się każdy rodzaj karty, tzn. jedna 2, jedna 3 itd.

(15/12/2022) Zadanie 5 Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x + \frac{3x-y}{x^2+y^2} = 3 \\ y - \frac{x+3y}{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$$