

ANDRZEJ LENARCİK

0

0

imię i nazwisko

grupa

numer zestawu

Zadanie 5*

Przeliczenie współrzędnych:

$$\begin{cases} x = 2 + 3x' + 2y' \\ y = -2x' + 3y' \end{cases}$$

możemy wstawić do równania kozywej.

stosujemy wzór na kwadrat trzech składników

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

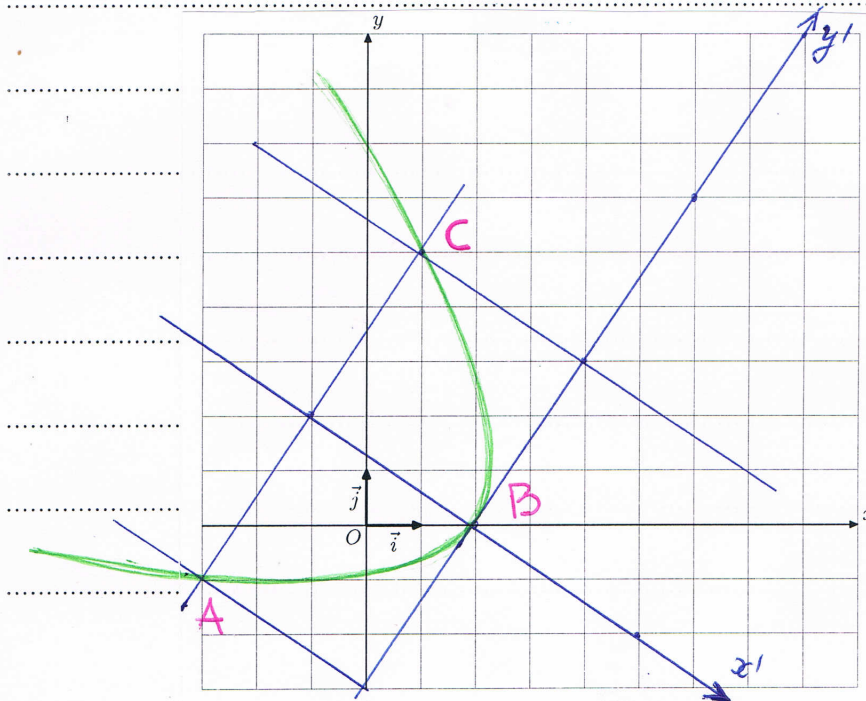
$$(a) \quad 4x^2 + 12xy + 9y^2 + 23x - 50y - 62 = 0$$

$$4(2+3x'+2y')^2 + 12(2+3x'+2y')(-2x'+3y') + 9(-2x'+3y')^2 + 23(2+3x'+2y') - 50(-2x'+3y') - 62 = 0$$

$$\begin{array}{l} 4(4 + 9x'^2 + 4y'^2 + 12x' + 8y' + 12x'y') \\ 12(-4x' + 6y' - 6x'^2 + 9x'y' - 4x'y' + 6y'^2) \\ 9(4x'^2 - 12x'y' + 9y'^2) \\ 23(2 + 3x' + 2y') \\ 50(-2x' + 3y') \\ -62 \end{array} \quad \begin{array}{l} 36x'^2 + 16y'^2 + 48x'y' + 48x' + 32y' + 16 \\ -72x'^2 + 72y'^2 + 60x'y' - 48x' + 72y' \\ 36x'^2 + 81y'^2 - 108x'y' \\ 69x' + 46y' + 46 \\ 100x' - 150y' \\ -62 \end{array}$$

$$0x'^2 + 169y'^2 + 0x'y' + 169x' + 0y' + 0 = 0$$

Otrzymałismy równanie $169y'^2 + 169x' = 0$, czyli $y'^2 + x' = 0$. $x' = -y'^2$



Zadanie 5a /cd/ Sprawdzenie w punktach całkowito- 2
liczbowych leżących na krzywej (odczytanych z rysunku)

punkt	x	y	równanie krzywej w (x, y)	
			$4x^2 + 12xy + 9y^2 + 23x - 50y - 62$	
A	-3	-1	$4 \cdot (-3)^2 + 12 \cdot (-3) \cdot (-1) + 9 \cdot (-1)^2 + 23 \cdot (-3) - 50 \cdot (-1) - 62 = 0$	OK
B	2	0	$4 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 \cdot 0 + 9 \cdot 0^2 + 23 \cdot 2 - 50 \cdot 0 - 62 = 0$	OK
C	1	5	$4 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 \cdot 5 + 9 \cdot 5^2 + 23 \cdot 1 - 50 \cdot 5 - 62 = 0$	OK

Drugi sposób przekształcenia równania

Można udowodnić, że jeżeli w wyrażeniu $ax^2 + bxy + cy^2$ jest $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, to wyrażenie to można zapisać jako kwadrat. Patrząc na równanie

$4x^2 + 12xy + 9y^2 + 23x - 50y - 62 = 0$, widzimy część drugiego stopnia $4x^2 + 12xy + 9y^2$, dla której $\Delta = 12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 0$. Zauważamy, że $4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x + 3y)^2$, czyli krzywa ma równanie $(2x + 3y)^2 + 23x - 50y - 62 = 0$. Korzystając z przekształceń

$$\begin{cases} x = 2 + 3x' + 2y' \\ y = -2x' + 3y' \end{cases}$$

otrzymujemy $2x + 3y = 2(2 + 3x' + 2y') + 3(-2x' + 3y') = 4 + 6x' + 4y' - 6x' + 9y' = 4 + 13y'$.

Zatem krzywa w układzie primowanym ma równanie:

$$(4 + 13y')^2 + 23(2 + 3x' + 2y') - 50(-2x' + 3y') - 62 = 0$$

$$16 + 4y' + 169(y')^2 + 46 + 69x' + 46y' + 100x' - 150y' - 62 = 0$$

$$169(y')^2 + 0y' + 169x' + 0 = 0, \text{ czyli tak, jak wcześniej } (y')^2 + x' = 0.$$

Obliczenia są nieco prostsze.

Zadanie 5(b)

3

$$25x^2 + 36xy + 40y^2 - 100x - 72y - 576 = 0 \quad (*)$$

$$\begin{array}{l} 25(4 + 9x'^2 + 4y'^2 + 12x' + 8y' + 12x'y') \\ 36(-4x' + 6y' - 6x'^2 + 5x'y' + 6y'^2) \\ 40(4x'^2 - 12x'y' + 9y'^2) \\ -100(2 + 3x' + 2y') \\ -72(-2x' + 3y') \\ -576 \end{array} \quad \begin{array}{l} 225x'^2 + 100y'^2 + 300x'y' + 300x' + 200y' + 100 \\ -246x'^2 + 216y'^2 + 180x'y' - 144x' + 216y' \\ 160x'^2 + 360y'^2 - 480x'y' \\ -300x' - 200y' \quad -200 \\ +144x' - 216y' \\ -576 \end{array}$$

$$169x'^2 + 676y'^2 + 0x'y' + 0x' + 0y' - 676 = 0$$

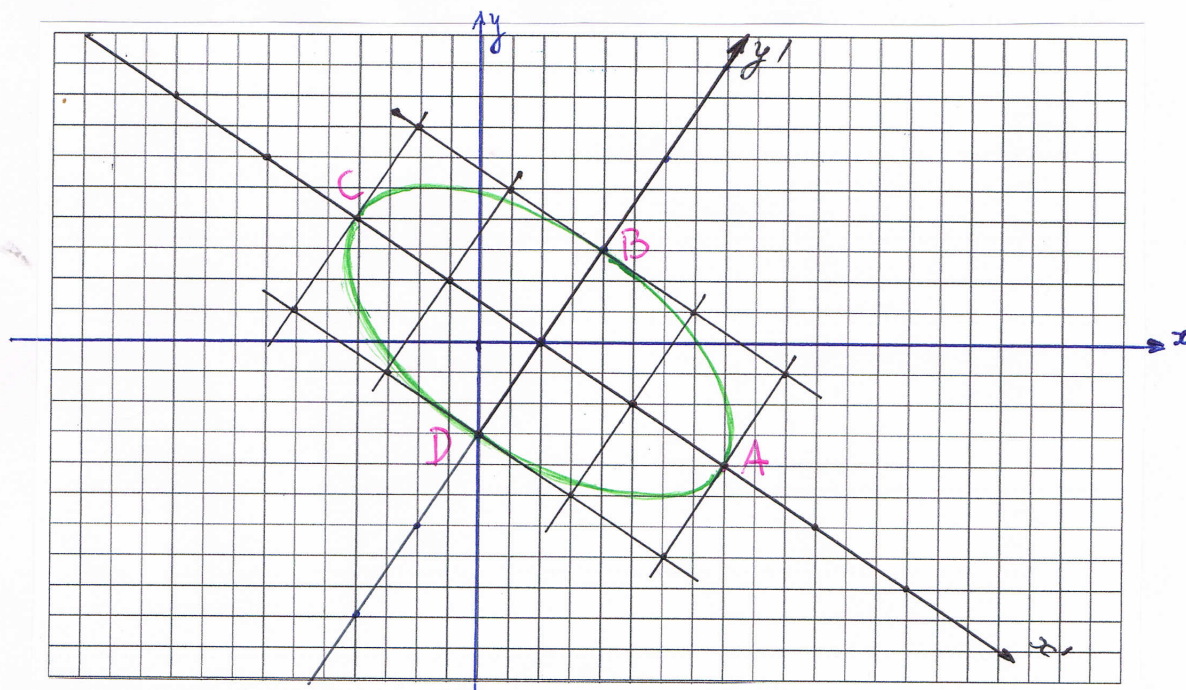
Otrzymujemy $13^2 x'^2 + 26^2 y'^2 = 26^2 \quad / : 13^2$

$$x'^2 + 4y'^2 = 4 \quad / : 4$$

$$\frac{x'^2}{4} + y'^2 = 1$$

$$\frac{x'^2}{2^2} + \frac{y'^2}{1^2} = 1$$

W układzie $O'X'Y'$ elipsa ma półosie $a=2, b=1$.



Zadanie 5b /cd/ Punkty całkowitoliczbowe leżące na krzywej odczytane z rysunku 4

punkt	x	y	równanie krzywej w (x,y)	
			$25x^2 + 36xy + 40y^2 - 100x - 72y - 576 = 0$	
A	8	-4	$25 \cdot 8^2 + 36 \cdot 8 \cdot (-4) + 40 \cdot (-4)^2 - 100 \cdot 8 - 72 \cdot (-4) - 576 = 0$	OK
B	4	3	$25 \cdot 4^2 + 36 \cdot 4 \cdot 3 + 40 \cdot 3^2 - 100 \cdot 4 - 72 \cdot 3 - 576 = 0$	OK
C	-4	4	$25 \cdot (-4)^2 + 36 \cdot (-4) \cdot 4 + 40 \cdot 4^2 - 100 \cdot (-4) - 72 \cdot 4 - 576 = 0$	OK
D	0	-3	$25 \cdot 0^2 + 36 \cdot 0 \cdot (-3) + 40 \cdot (-3)^2 - 100 \cdot 0 - 72 \cdot (-3) - 576 = 0$	OK

Zadanie 5c

$$-12xy - 5y^2 + 24y - 468 = 0$$

$$\begin{aligned} & -12(-4x' + 6y' - 6x'^2 + 5x'y' + 6y'^2) \\ & -5(4x'^2 - 12x'y' + 9y'^2) \\ & + 24(-2x' + 3y') \\ & - 468 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 72x'^2 - 72y'^2 - 60x'y' + 48x' - 72y' \\ & - 20x'^2 + 45y'^2 + 60x'y' - 48x' + 72y' \\ & - 468 \end{aligned}$$

$$52x'^2 - 117y'^2 + 0x'y' + 0x' + 0y' - 468 = 0$$

$$4 \cdot 13x'^2 - 9 \cdot 13y'^2 = 4 \cdot 9 \cdot 13 \quad / : 13$$

$$4x'^2 - 9y'^2 = 49 \quad / : 36$$

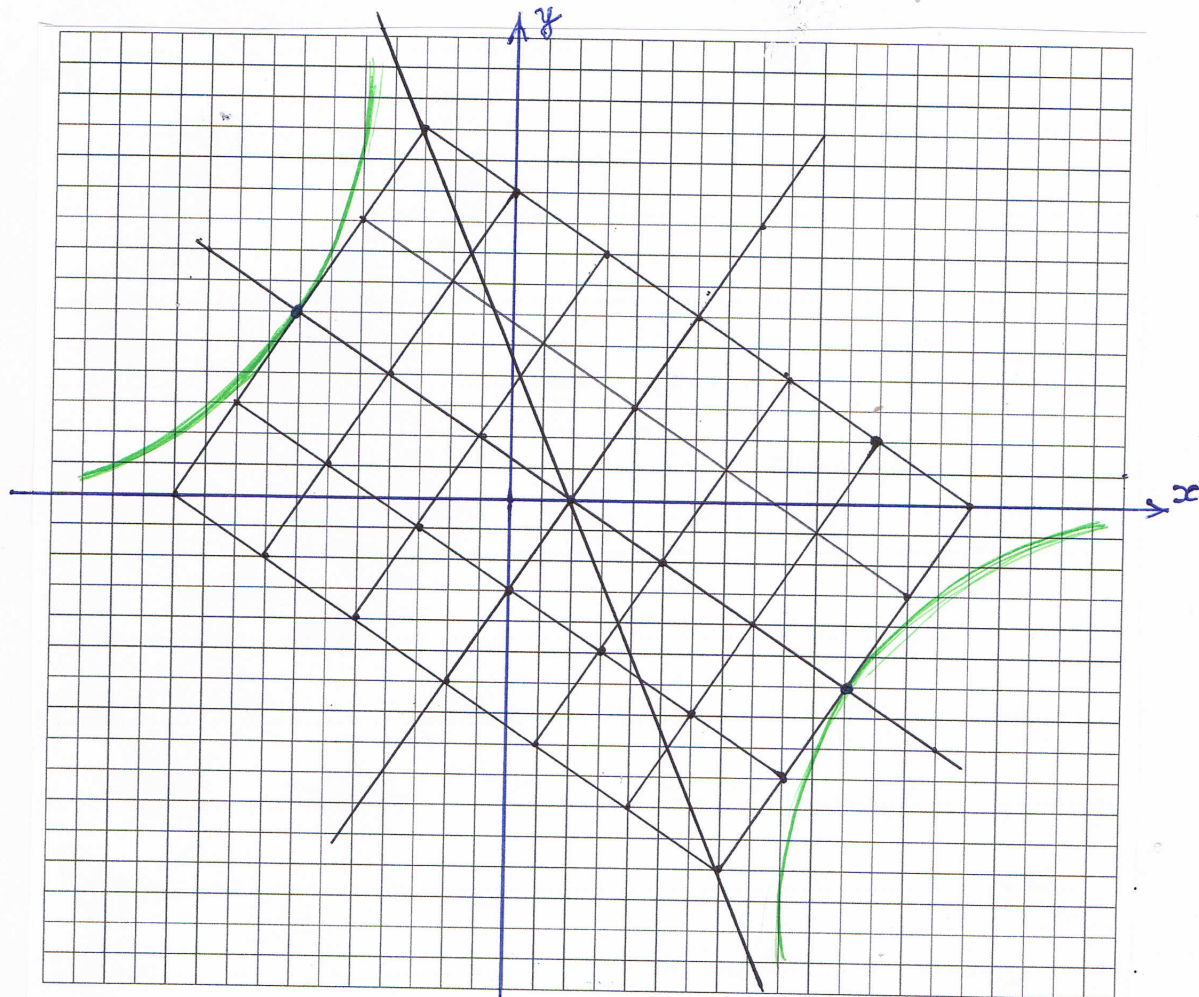
$$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{4} = 1$$

$$\frac{x'^2}{3^2} - \frac{y'^2}{2^2} = 1$$

Otrzymujemy półnie hiperboli $a = 3, b = 2$

Zadanie 5c /cd/

5



Punkty całkowitoliczbowe leżące na krzywej odczytane z rysunku

punkt	x	y	równanie krzywej w (x, y) $-12xy - 5y^2 + 24y - 468 = 0$	
A	11	-6	$-12 \cdot 11 \cdot (-6) - 5(-6)^2 + 24(-6) - 468 = 0$	OK
B	-7	6	$-12(-7) \cdot 6 - 5 \cdot 6^2 + 24 \cdot 6 - 468 = 0$	OK