ZADANIA 06/10/2022

Zadanie 1 Wykorzystując nierówność pomiędzy średnią arytmetyczną a średnią geometryczną (dla $a, b > 0$ mamy $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$) uzasadnij, że:
(a) dla $a, b > 0$ zachodzi nierówność $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}$,
(b) dla $a, b > 0$ zachodzi nierówność $2(a^2 + b^2) \geqslant (a+b)^2$,
(c) dla $a, b > 0$, $a + b = 1$ zachodzi nierówność $\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}$,
(d) dla $a, b, c > 0$ zachodzi nierówność $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$.

Zadanie 2 Wiedząc, że $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = 0$ oraz $\frac{1}{x} - \frac{6}{y} - \frac{5}{z}$ wyznacz wartość wyrażenia $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$.

Zadanie 3 W trójkącie ABC: $AB = AC$, punkt D leży na odcinku AB punkt E leży na przedłużeniu odcinka AC (bliżej punktu C), $BD = CE$, odcinki BC i DE przecinają się w punkcie G. Udowodnij, że $BD = GE$.

Zadanie 4 Udowodnij, że jeśli liczba n jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych różnych od zera, to liczba $5n$ również jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych różnych od zera.

Zadanie 5 Zapisz wyrażenie $x^4 + y^4 + (x+y)^4$ jako iloczyn czynników nierozkładalnych.

Zadanie 6 Wyznacz ilość podzbiorów czterolelementowych $\{a, b, c, d\}$ zbioru $\{1, 2, \ldots, 20\}$, których suma elementów $a + b + c + d$ jest podzielna przez 3.

Zadanie 7 Rozwiąż równanie $2(x^2 + 2) = \sqrt{x^3 + 1}$.

Zadanie 8 Niech $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wyznaczyć liczbę funkcji $f : S \mapsto S$ spełniających zależność $f^{50}(x) = x$ dla wszystkich $x \in S$, przy czym f^{50} oznacza pięćdziesięciokrotne złożenie funkcji f ze sobą.