## ZADANIA 03/11/2022

## Zadanie 1

- (a) uzasadnij, że  $(4\cos^2 9^{\circ} 3)(4\cos^2 27^{\circ} 3) = \operatorname{tg} 9^{\circ}$ ,
- (b) wyznacz dodatnią liczbę całkowitą n, dla której:

$$(1 + \operatorname{tg} 1^{\circ})(1 + \operatorname{tg} 2^{\circ}) \dots (1 + \operatorname{tg} 45^{\circ}) = 2^{n}$$

## (20/10/2022) Zadanie 1

(c) Niech  $w_1, w_2, \ldots, w_n$  – liczby zespolone. Linię L nazwiemy średnią dla punktów  $w_1, w_2, \ldots, w_n$  jeśli można na niej znaleźć takie punkty  $z_1, z_2, \ldots, z_n$ , że  $\sum_{k=1}^{n} (z_k - w_k) = 0$ . Dla liczb zespolonych  $w_1 = 32 + 170i$ ,  $w_2 = -7 + 64i$ ,  $w_3 = -9 + 200i$ ,  $w_4 = 1 + 27i$ ,  $w_5 = -14 + 43i$  istnieje tylko jedna linia średnia przecinająca oś y w 3. Wyznacz współczynnik kierunkowy tej linii.

(20/10/2022) Zadanie 2 Jaki jest współczynnik przy  $x^2$  w wyrażeniu  $(1+x)(1+2x)(1+4x)\dots(1+2^nx)$ ?

(20/10/2022) Zadanie 3 Oblicz  $\frac{1}{1\times 2\times 3} + \frac{1}{2\times 3\times 4} + \ldots + \frac{1}{100\times 101\times 102}$ .

(6/10/2022) Zadanie 3 W trójkącie ABC: AB = AC, punkt D leży na odcinku AB punkt E leży na przedłużeniu odcinka AC (bliżej punktu C), BD = CE, odcinki BC i DE przecinają się w punkcie G. Udowodnij, że BD = GE.

(6/10/2022) Zadanie 4 Udowodnij, że jeśli liczba n jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych różnych od zera, to liczba 5n również jest sumą kwadratów dwóch liczb całkowitych różnych od zera.

(6/10/2022) Zadanie 6 Wyznacz ilość podzbiorów czterolelementowych  $\{a,b,c,d\}$  zbioru  $\{1,2,\ldots,20\}$ , których suma elementów a+b+c+d jest podzielna przez 3.

(6/10/2022) Zadanie 8 Niech  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Wyznaczyć liczbę funkcji  $f : S \mapsto S$  spełniających zależność  $f^{50}(x) = x$  dla wszystkich  $x \in S$ , przy czym  $f^{50}$  oznacza piećdziesięciokrotne złożenie funkcji f ze sobą.