# Spis treści

**1 Przestrzenie metryczne** **2**
1.1 Pojęcie przestrzeni metrycznej . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 2
1.2 Podstawowe, wybrane pojęcia topologiczne . . . . . . . . . . . . . 4
1.3 Przestrzenie metryczne ośrodkowe i zupełne . . . . . . . . . . . . 7

**2 Przestrzenie liniowe** **7**
2.1 Konwencja sumacyjna . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
2.2 Pojęcie przestrzeni liniowej . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9
2.3 Przestrzenie skończenie wymiarowe. Baza algebraiczna . . . . . . 12
2.4 Przestrzenie unormowane . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 14
2.5 Przestrzenie unitarne . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16

# 1 Przestrzenie metryczne

## 1.1 Pojęcie przestrzeni metrycznej

**Definicja 1.** *Przestrzenią metryczną nazywamy układ* $\{\mathbb{D}; d\}$*, w którym* $\mathbb{D}$ *jest niepustym zbiorem elementów* $\mathrm{X}$, $\mathrm{Y}$, $\mathrm{Z}$*, zwanych* ***punktami****, natomiast* $d : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathscr{R}$ *(*$\mathscr{R}$ *– zbiór (ciało) liczb rzeczywistych) jest odwzorowaniem, zwanym* ***metryką****, spełniających warunki:*

1. $d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \geqslant 0, d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{X} = \mathrm{Y}$,
2. $d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = d(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$,
3. $d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \leqslant d(\mathrm{X}, \mathrm{Z}) + d(\mathrm{Z}, \mathrm{Y})$,

*dla dowolnych* $\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \mathrm{Z} \in \mathbb{D}$*. Liczbę* $d(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *nazywamy odległością punktu* $\mathrm{X}$ *od* $\mathrm{Y}$*). Jeżeli* $\mathbb{B} \subset \mathbb{D}$ $d' = d|_{\mathbb{B}\times\mathbb{B}}$*, to* $\{\mathbb{B}, d'\}$ *nazywamy* ***podzbiorem metrycznym*** *(podprzestrzenią metryczną) przestrzeni* $\mathbb{D}$*.*

! Mówimy krótko: **przestrzeń** (metryczna) $\mathbb{D}$ - chociaż na danym zbiorze może być określonych wiele różnych metryk. Metryki $d$ i $d'$ są **równoważne** (z definicji), jeśli

$$\exists \alpha, \beta \in \mathscr{R} \quad \alpha d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \leqslant d'(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \leqslant \beta d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \quad \forall \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathbb{D}.$$

**Przykład 1.** *Niech* $\mathscr{R}^n = \{\mathrm{X} \stackrel{\mathrm{df}}{=} (x_1, ..., x_n); x_i \in \mathscr{R}$ *dla* $i = 1, ..., n\}$ *i* $\mathbb{D} = \mathscr{R}^n$ *(zbiór ciągów n-elementowych). Niech*

$$d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \left[\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$d'(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|,$$

$$d''(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \max_{i=1,\dots,n} |y_i - x_i|.$$

*Odwzorowania* $d$, $d'$ *i* $d''$ *są metrykami na* $\mathscr{R}^n$ *(i to równoważnymi). Zwykle* $\mathscr{R}^n \equiv \{\mathscr{R}^n, d\}$ *nazywamy arytmetyczną przestrzenią metryczną (z metryką euklidesową).*

**Przykład 2.** *Niech* $\Omega$ *dowolny zbiór elementów* $\xi$, $\eta$, $\zeta$,... *i niech* $f : \Omega \to \mathscr{R}$ *dowolne odwzorowanie ograniczone (tzn.* $\sup\limits_{\eta \in \mathscr{R}} |f(\eta)| < \infty$*). Zbiór*

$$F(\Omega, \mathscr{R}) = \{f : \Omega \to \mathscr{R}; \sup_{\Omega} |f(\eta)| < \infty\}$$

*wraz z odwzorowaniem*

$$d(f, g) = \sup_{\Omega} |f(\eta) - g(\eta)|$$

*jest przestrzenią metryczną (tzw.* <u>*funkcyjną*</u>*) - tzn.* $\{\mathbb{D}, d\}$ *przy* $\mathbb{D} = F(\Omega, \mathscr{R})$ *(punktami przestrzeni* $\mathbb{D}$ *są tu funkcje ze zbioru* $F$*).*

**Przykład 3.** *Niech* $\{\mathbb{D}_1, d_1\}, ..., \{\mathbb{D}_n, d_n\}$ *- przestrzenie metryczne. Wtedy* $\{\mathbb{D}, d\}$*, przy*

$$\mathbb{D} \stackrel{\text{df}}{=} \mathbb{D}_1 \times ... \times \mathbb{D}_n \ni \mathrm{X} \times \mathrm{Y} = (\mathrm{X}_1, ..., \mathrm{X}_n) \times (\mathrm{Y}_1, ..., \mathrm{Y}_n) \to d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \sum_{i=1}^{n} d_i(\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i)$$

*jest przestrzenią metryczną.*

## 1.2 Podstawowe, wybrane pojęcia topologiczne

Niech $\mathbb{D}$ przestrzeń metryczna z ustaloną metryką $d$.

**Definicja 2.** *Odległość między zbiorami* $\mathbb{A}, \mathbb{B} \subset \mathbb{D}$*:*

$$d(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \inf d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}),\ \mathrm{X} \in \mathbb{A},\ \mathrm{Y} \in \mathbb{B}$$

.

**Definicja 3.** *Zbiór* $\mathbb{Z}$ *(*$\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$*) jest ograniczony jeśli:*

$$\sup d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) < \infty \quad \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathbb{Z}$$

.

**Definicja 4.** *Średnicą zbioru ograniczonego nazywamy:*

$$\rho(\mathrm{Z}) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{Z}} d(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$$

.

**Definicja 5.** *Ciąg* $\{\mathrm{X}_n\}$ *punktów z* $\mathbb{D}$ *jest zbieżny do* $\mathrm{X}$ *(ma granicę* $\mathrm{X} \in \mathbb{D}$*):*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{X}_n = \mathrm{X} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(\mathrm{X}_n, \mathrm{X}) = 0.$$

**Definicja 6.** *Domknięcie zbioru* $\mathrm{Z}$ $(\mathrm{Z} \subset \mathbf{D})$*:*

$$\bar{\mathrm{Z}} \overset{\mathrm{ozn}}{=} \mathrm{clos}(\mathrm{Z}) \overset{\mathrm{df}}{=} \{\mathrm{X}' \in \mathbf{Z};\ \mathrm{X}' = \lim_{n\to\infty} \mathrm{X}_n,\ \mathrm{X}_n \in \mathbf{D}\ \mathit{dla}\ n = 1, 2, \ldots\}.$$

**!**

$$\mathrm{Z} \subset \bar{\mathrm{Z}}$$

**Definicja 7.** *Zbiór* $\mathbf{A}$ *gęsty w zbiorze* $\mathbb{B}(\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{D})$*, jeśli* $\mathbf{B} \subset \bar{\mathbf{A}}$.

**Definicja 8.** *Zbiór* $\mathrm{Z}$ *jest domknięty jeśli* $\mathrm{Z} = \bar{\mathrm{Z}}$.

**Definicja 9.** *Kula (otwarta) o środku* $\mathrm{C}'$ *i promieniu* $r$*:*

$$\mathbf{K}(\mathrm{C}', r) = \{\mathrm{X} \in \mathbf{D}; d(\mathrm{X}, \mathrm{C}') < r\}$$

**Definicja 10.** *Kula domknięta o środku* $C'$ *i promieniu* $r$ *– domknięcie kuli:*

$$\mathbf{K}(C', r) = \{\mathrm{X} \in \mathbf{D}; d(\mathrm{X}, C') \leqslant r\}$$

**Definicja 11.** *Sfera o środku* $C'$ *i promieniu* $r$*:*

$$\mathbf{S}(C', r) = \{\mathrm{X} \in \mathbf{D};\ d(\mathrm{X}, C') = r\}$$

**Definicja 12.** *Punkt* $\mathrm{X}$ *zbioru* $\mathrm{Z}$ *jest wewnętrzny jeśli*

$$\exists r > 0\ \mathbf{K}(\mathrm{X}, r) \subset \mathrm{Z}.$$

**Definicja 13.** *Wnętrze zbioru* $\mathrm{Z}$*:* $\mathrm{int}(\mathrm{Z})$ *= zbiór punktów wewnętrznych zbioru* $\mathrm{Z}$*.*

**Definicja 14.** *Brzeg zbioru* $\mathrm{Z}$*:*

$$\partial \mathrm{Z} = \mathrm{clos}(\mathrm{Z}) - \mathrm{int}(\mathrm{Z}).$$

**Definicja 15.** *Punkt brzegowy zbioru* $\mathrm{Z}$ *– punkt należący do brzegu* $\partial \mathrm{Z}$*.*

**Definicja 16.** *Zbiór* $\mathrm{Z}$ *otwarty jeśli* $\mathrm{Z} = \mathrm{int}(\mathrm{Z})$

! Kula (otwarta) jest zbiorem otwartym, kula domknięta i sfera są zbiorami domkniętymi. Sfera jest brzegiem kuli otwartej i domkniętej.

! **Iloczyn dowolnie wielu** zbiorów domkniętych oraz **suma skończenie wielu** zbiorów domkniętych są zbiorami domkniętymi.

! Suma dowolnie wielu zbiorów otwartych oraz iloczyn skończenie wielu zbiorów otwartych są zbiorami otwartymi.

**Definicja 17.** *Dopełnienie zbioru* Z*:*

$$Z' = \mathbf{D} - Z.$$

! Dopełnieni zbioru domkniętego jest zbiorem otwartym, a otwartego - domkniętym.

! $\mathbf{D}' = \varnothing$(zbiór pusty), $\varnothing' = \mathbf{D}$.

**Definicja 18.** *Zbiór* Z *jest otoczeniem punktu* X *jeśli* $X \in \operatorname{int} Z$.

**Definicja 19.** *Jeśli* Z *otoczenie* X*, to* $Z - \{X\}$ *sąsiedztwo* X.

**Definicja 20.** *Punkt* X *zbioru* Z *jest izolowany wtw,* $\exists r > 0\ \mathbf{K}(X, r) \cap Z = \{X\}$.

**Definicja 21.** *Zbiór złożony jedynie z punktów izolowanych - zbiór dyskretny.*

**Definicja 22.** *Zbiór* Z *skończony (policzalny) - wszystkie elementy można policzyć: Zbiór* Z *n-elementowy (skończony), jeżeli jest postaci:*

$$Z = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}.$$

**Definicja 23.** *Zbiór* Z *przeliczalny - wszystkie elementy można ponumerować, tj. ustawić w ciąg:*

$$Z = \{X_1, \ldots, X_i, \ldots\}.$$

**Definicja 24.** *Zbiór* Z *spójny, jeżeli*

$$Z = \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \Rightarrow \bar{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B} \neq \varnothing \vee \mathbf{A} \cap \bar{\mathbf{B}} \neq \varnothing.$$

**Definicja 25.** *Zbiór otwarty i spójny - obszar.*

**Definicja 26.** *Domknięcie obszaru - obszar domknięty.*

**Definicja 27.** *Obszar domknięty ograniczony - bryła.*

**Definicja 28.** *Zbiór* Z *zwarty = każdy ciąg punktów zbioru zbioru* Z *zawiera podciąg zbieżny do pewnego punktu zbioru* Z*:*

$$\{X_1, \ldots, X_n, \ldots\} \subset Z \ \ i \ \ \rho(\{X_1, \ldots, X_n, \ldots\}) < \infty$$

$$\Rightarrow \exists \{n_k\} \subset \mathscr{N}(\textit{zbiór liczby naturalnych})\ i\ \exists X \in Z\ \ lim_{k\to\infty} X_{n_k} = X$$

**!** Jeśli Z zwarty, to domknięty i ograniczony.

**Definicja 29.** *Zbiór* Z *wypukły, jeżeli* $\forall$ X, Y $\in$ Z *odcinek* $\bar{\mathrm{X}}\mathrm{Y} \subset$ Z.

**Definicja 30.** *Odcinek o końcach* X *i* X *w przestrzeni* **D***:*

$$\overline{\mathrm{X}\,\mathrm{Y}} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{\mathrm{Z} \in \mathbf{D}; d(\mathrm{X},\ \mathrm{Y}) + d(\mathrm{Z},\ \mathrm{Y}) = d(\mathrm{X},\ \mathrm{Y})\}.$$

## 1.3 Przestrzenie metryczne ośrodkowe i zupełne

**Definicja 31.** *Niech* $\{\mathbf{D}, d\}$*, przestrzeń metryczna. Przestrzeń* $\mathbf{D}$ *jest ośrodkowa, jeżeli istnieje zbiór* $\mathbf{B}$ *(skończony lub przeliczalny) gęsty w* $\mathbf{D}$ *(tzn.* $\mathbf{B} = \mathbf{D}$*).*

! Dowolny podzbiór $\mathrm{Z}$ przestrzeni ośrodkowej $\{\mathbf{D}, d\}$ jest przestrzenią ośrodkową $\{\mathrm{Z}, d'\}, d' = d_{\mathrm{Z} \times \mathrm{Z}}$.

! Produkt kartezjański przestrzeni metrycznych $\mathbf{D}_1 \times \cdots \times \mathbf{D}_n$ jest przestrzenią ośrodkową jeśli wszystkie $\mathbf{D}_i$ są ośrodkowe (por. Przykład 3. z p. 1.1).

**Definicja 32.** *Przestrzeń metryczna* $\mathbf{D}$ *(z metryką* $d$*) jest zupełna, jeżeli każdy ciąg* $\{\mathrm{X}_n\}$ *elementów z* $\mathbf{D}$ *spełniający* ***warunek Cauchy****'ego:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathscr{N} \ \forall m \geqslant n \geqslant N \ \ d(\mathrm{X}_m, \mathrm{X}_n) < \varepsilon$$

*jest zbieżny do pewnego punktu* $\mathrm{X} \in \mathbf{D}$ *(tzn.* $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$, $lim_{n->\infty} \mathrm{X}_n = \mathrm{X}$*).*

! Każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy.

! Zbiór $\mathscr{R}$ jako przestrzeń metryczna jest zupełny.

! Podzbiór $\mathrm{Z}$ przestrzeni zupełniej $\mathbf{D}$ jest zupełny (przestrzenią zupełną jako podprzestrzeń) wtedy, gdy $\mathrm{Z}$ jest domknięty.

! Produkt kartezjański przestrzeni metrycznych $\mathbf{D}_1 \times \cdots \times \mathbf{D}_n$ jest przestrzenią zupełną wtedy, gdy wszystkie $\mathbf{D}_i$ są zupełne (por Przykład 3 z p. 1.1).

# 2 Przestrzenie liniowe

## 2.1 Konwencja sumacyjna

W sumach postaci:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \cdots \alpha_n \beta_n,$$

$$B_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_j = \alpha_{i1} \beta_1 + \alpha_{i2} \beta_2 + \cdots + \alpha_{in} \beta_n,$$

$$C = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} = \alpha_{11} + \cdots + \alpha_{nn}$$

pomijamy symbol $\sum$, jeżeli wskaźniki podlegające sumowaniu, zwane **martwymi**, powtarzają się.

Zatem piszemy:

$$A = \alpha_i \alpha_b,$$

$$B_i = \alpha_{ij}\beta_j,$$

$$C = \alpha_{ii}.$$

Oznaczenie wskaźnika martwego nie jest istotne:

$$A = \alpha_i\beta_i = \alpha_k\beta_k = \alpha_1\beta_1 + \cdots \alpha_n\beta_n.$$

Wskaźniki nie podlegające sumowaniu zwane wolnymi, muszą być jednakowe po obu stronach równości. Np.:

$$B_{\mathbf{i}} = \alpha_{\mathbf{i}j}\beta_j.$$

Wskaźniki umieszczamy także na **górnym poziome** (i bywa, że po lewej stronie **litery rdzeniowej**). Na przykład:

$$A = \alpha_i^i,$$

$$B^j = a^{ij}b_i,$$

$${}^{k}{}_{r}C = {}^{r}{}_{k}\alpha_i\beta_i.$$

Nie należy wskaźników na górnym poziomie rozumieć jako wykładników potęg. Wielkości potęgowane umieszczamy w nawiasach:

$$(\alpha^i)^2,$$

$$(\alpha^i)^j\beta_j,$$

$$(\alpha_{ij})^k\gamma_k.$$

Jeżeli wyróżniamy 'i-ty' składnik sumy

$$\alpha_i\beta_i = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_n\beta_n,$$

to wskaźnik tego składnika podkreślamy, czyli:

$$\alpha_i\beta_i = \alpha_1\beta_1 + \cdots + \alpha_{\underline{i}}\beta_{\underline{i}} + \cdots + \alpha_n\beta_n,$$

Wielkościami numerowanymi za pomocą wskaźników mogą być wielkości **liczbowe** i **wektorowe** (a także inne obiekty i struktury matematyczne).

## 2.2 Pojęcie przestrzeni liniowej

**Definicja 33.** ***Przestrzenią liniową ( wektorową )*** *nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathscr{R}$ nazywamy niepusty zbiór $\vec{\mathbf{V}}$ elementów, zwanych* ***wektorami*** *(oznaczanych przez $\vec{x}$, $\vec{y}$, ...), wraz z dwoma działaniami:*

1. ***sumą wektorów***
$$\vec{\mathbf{V}} \times \vec{\mathbf{V}} \to \vec{\mathbf{V}};\ \vec{z} = \vec{x} + \vec{y},$$
2. ***iloczynem wektora przez liczbę***
$$\mathscr{R} \times \vec{\mathbf{V}} \to \vec{\mathbf{V}};\ \vec{z} = \alpha\vec{x},$$

*spełniającymi warunki:*

1. *łączności dodawania*
$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}),$$
2. *przemienności dodawania*
$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x},$$
3. *rozdzielności dodawania względem mnożenia*
$$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y},$$
$$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x},$$
4. *łączności iloczynu*
$$\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$$
5. *istnienia wektora zerowego*
$$\vec{0} + \vec{x} = \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$$
6. *istnienia wektora przeciwnego $-\vec{x}$ do wektora $\vec{x}$*
$$\vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{x} - \vec{x} = \vec{0}$$
7. *niezmienności wektora mnożonego przez 1*
$$1\vec{x} = \vec{x}$$

*dla dowolnych wektorów $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ oraz liczb $\alpha$, $\beta$.*

**Przykład 4.** *<u>Przestrzeń arytmetyczna</u>*
*Zbiór*

$$\mathscr{R}^n = \{\vec{x} \overset{\text{df}}{=} (x_1, \cdots, x_n) \overset{\text{ozn}}{=} (x_i); x_i \in \mathscr{R}\, dla\, i = 1, \cdots, n\},$$

*czyli*

$$\mathscr{R}^n = \underbrace{\mathscr{R} \times \cdots \times \mathscr{R}}_{n\ razy},$$

*z działaniami*

$$\vec{x} + \vec{y} \overset{\text{df}}{=} (x_i + y_i) = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n),$$

$$\alpha\vec{x} \overset{\text{df}}{=} (\alpha x_i) = (\alpha x_1, \cdots, \alpha x_n),$$

*dla dowolnych* $\vec{x} = (x_i)$, $\vec{y} = (y_i) \in \mathscr{R}^n$ *i* $\alpha \in \mathscr{R}$, *jest przestrzenią wektorową. Wektorem zerowym jest ciąg* $n$ *zer:*

$$\vec{0} = (0, \cdots, 0)$$

*a wektorem przeciwnym do wektora - ciągu* $\vec{x} = (x_i)$ *jest ciąg liczb przeciwnych*

$$-\vec{x} = (-x_i) = (-x_1, \cdots, -x_n.$$

*Dla* $n = 1$ *wnioskujemy, że* $\mathscr{R}$ *jest także przestrzenią wektorową przy*

$$\mathscr{R}^1 \overset{\text{ozn}}{=} \mathscr{R}, \quad (x_1) \overset{\text{ozn}}{=} z.$$

**Przykład 5.** *Przestrzeń funkcyjna*

*Niech* $\Omega$ *dowolny zbiór, a* $\vec{\mathbf{V}}$ *dowolna przestrzeń wektorowa. Zbiór funkcji (odwzorowań)*

$$F(\Omega, \vec{\mathbf{V}}) = \{\vec{x} = \vec{f}(\xi), \xi \in \Omega\}$$

*wraz z działaniami:*

$$(\vec{f} + \vec{g})(\xi) \overset{\text{df}}{=} \vec{f}(\xi) + \vec{f}(\xi), \xi \in \Omega,$$

$$(\alpha\vec{f})(\xi) \overset{\text{df}}{=} \alpha\vec{f}(\xi), \xi \in \Omega$$

*dla dowolnych* $\vec{x} = \vec{f}(\xi)$, $\vec{g} = \vec{g}(\xi)$ $(\xi \in \Omega)$ *i* $\alpha \in \mathscr{R}$ *tworzy przestrzeń wektorową.*

**Przykład 6.** *Przestrzeń ciągów*

*Niech* $\{\vec{\mathbf{V}}_i, i \in I\}$ *(I - skończony lub przeliczalny zbiór numerów/wskaźników) będzie rodziną przestrzeni liniowych. Zbiór*

$$\vec{\mathbf{V}} = \{\vec{x} = (\vec{x}_i; \vec{x}_i \in \vec{\mathbf{V}}_i dla i \in I\}$$

*z działaniami:*

$$\vec{x} + \vec{y} = (\vec{x}_i + \vec{y}_i),$$

$$\alpha\vec{x} = (\alpha\vec{x}_i,$$

*dla dowolnych* $\vec{x} = (\vec{x}_i)$, $\vec{y} = (\vec{y}_i) \in \vec{\mathbf{V}}$ *oraz* $\alpha \in \mathscr{R}$, *jest przestrzenią wektorową.*

*Na przykład, gdy* $I = \mathscr{N}$, *to* $\vec{x} = (\vec{x}_i) = (\vec{x}_1, \cdots, \vec{x}_n, \cdots)$ *- ciąg wektorów a gdy ponadto* $\vec{\mathbf{V}}_i = \mathscr{R}$ *dla wszystkich* $iinI = \mathscr{N}$, *to* $\vec{x} = (x_i) = (x_1, \cdots, x_n, \cdots)$ *– ciąg liczbowy.*

**Definicja 34.** *Zbiór* $\vec{\mathbf{U}}$ *zawarty w przestrzeni wektorowej (liniowej)* $\vec{\mathbf{V}}$ *nazywamy podprzestrzenią (liniową) przestrzeni* $\vec{\mathbf{V}}$, *jeżeli* $\vec{\mathbf{U}}$ *z działaniami określonymi w* $\vec{\mathbf{V}}$ *i ograniczonymi do* $\vec{\mathbf{U}}$ *stanowi przestrzeń wektorową.*

**Twierdzenie 1.** *(Kryterium podprzestrzeni). Jeśli dla każdych $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{\mathbf{U}} \subset \vec{\mathbf{V}}$ i $\alpha \in \mathscr{R}$ jest:*

$$\vec{x} + \vec{y} \in \vec{\mathbf{U}},$$

$$\alpha\vec{x} \in \vec{\mathbf{U}},$$

*to $\vec{\mathbf{U}}$ jest podprzestrzenią (liniową) przestrzeni $\vec{\mathbf{V}}$.*

**Definicja 35.** *Niech $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m\} \subset \vec{\mathbf{V}}$ dowolny skończony podzbiór wektorów przestrzeni $\vec{\mathbf{V}}$ i niech $(\vec{v}_i) \overset{\text{ozn}}{=} (\vec{v}_i, \cdots, \vec{v}_m)$. Wektor*

$$\vec{x} = \xi_i \vec{v}_i,$$

*dla $(\xi_i) = (\xi_i, \cdots, \xi_m) \in \mathscr{R}^m$ nosi nazwę kombinacji liniowej ciągu $(\vec{v}_i)$.*

**Przykład 7.** *Niech*

$$\vec{\mathbf{u}} \overset{\text{ozn}}{=} \text{lin}(\vec{v}_i) \overset{\text{df}}{=} \{\vec{x} = \xi_i \vec{v}_i ; (\xi_i) \in \mathscr{R}^m\}$$

*gdzie $\vec{v}_i$ dowolny ustalony podzbiór (ciąg, układ) m wektorów przestrzeni wektorowej $\vec{\mathbf{V}}$. Zbiór $\vec{\mathbf{U}}$ (wszystkich kombinacji liniowych wektorów $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m)$) jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\vec{\mathbf{V}}$ (na mocy kryterium) – tzw. przestrzenią generowaną przez układ wektorów $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m)$.*

**Definicja 36.** *Niech $\vec{\mathbf{U}}'$ i $\vec{\mathbf{U}}''$ podprzestrzenie liniowe $\vec{\mathbf{V}}$. Zbiór*

$$\vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{U}}' + \vec{\mathbf{U}}'' = \{\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''; \vec{u}' \in \vec{\mathbf{U}}'; \vec{u}'' \in \vec{\mathbf{U}}''\},$$

*nosi nazwę sumy podprzestrzeni $\vec{\mathbf{U}}'$ i $\vec{\mathbf{U}}''$. Jest to podprzestrzeń $\vec{\mathbf{V}}$. Jeśli ponadto $\vec{\mathbf{U}}' \cap \vec{\mathbf{U}}'' = \{\vec{0}\}$ to $\vec{\mathbf{U}} \overset{\text{ozn}}{=} \vec{\mathbf{U}}' \oplus \vec{\mathbf{U}}$" jest tzw. sumą prostą $\vec{\mathbf{U}}'$ i $\vec{\mathbf{U}}''$.*

## 2.3 Przestrzenie skończenie wymiarowe. Baza algebraiczna

**Definicja 37.** *Podzbiór* $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n \overset{\text{ozn}}{=} (\vec{e}_i) = (\vec{e}_i, \cdots, \vec{e}_n)$ *przestrzeni wektorowej* $\vec{\mathbf{V}}$ *nazywa się liniowo niezależnym, jeżeli prawdziwa jest implikacja:*

$$\alpha_i \vec{e}_i = \vec{0} \rightarrow \alpha_i = 0 \ \ \forall i = 1, \cdots, n.$$

**Definicja 38.** *Zbiór* $\vec{\mathbf{B}} = (\vec{e}_i)$ *wektorów z przestrzeni* $\vec{\mathbf{V}}$ *nazywamy bazą (algebraiczną), jeżeli:*

1. $\vec{\mathbf{B}}$ *jest liniowo niezależnym*
2. $\text{lin}\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{V}}$ *(*$\vec{\mathbf{B}}$ *generuje* $\vec{\mathbf{V}}$*).*

**Definicja 39.** *Jeżeli w przestrzeni* $\vec{\mathbf{V}}$ *istnieje baza n-elementowa* $\vec{\mathbf{B}}$*, to* $\vec{\mathbf{V}}$ *nazywamy n-wymiarową (skończenie wymiarową o wymiarze n) i piszemy*

$$\dim \vec{\mathbf{V}} = n$$

! Jeżeli istnieje w $\vec{\mathbf{V}}$ baza n-elementowa, to istnieje nieskończenie wiele baz i każda jest n-elementowa.

! Jeżeli $\vec{\mathbf{B}}$ jest n-elementową bazą przestrzeni $\vec{\mathbf{V}}$, to

$$\forall \vec{x} \in \vec{\mathbf{V}} \exists (x^i) \in \mathscr{R}^n \ \ \vec{x} = x^i \vec{e}_i,$$

gdzie $(x^i)$ są tzw. współczynnikami rozkładu lub współrzędnymi wektorze $\vec{x}$ w bazie $\vec{\mathbf{B}}$. Przy tym rozkład ten jest jednoznaczny, bowiem

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i = y^i \vec{e}_i \rightarrow (x^i - y^i)\vec{e}_i = \vec{0} \rightarrow x^i - y^i = 0 \ \ \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$

**Przykład 8.** *Bazą przestrzeni arytmetycznej* $\mathscr{R}^n$ *– tzw. bazą standardową - jest układ ciągów*

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0),$$
$$\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0),$$
$$\vdots$$
$$\vec{e}_n = (0, 0, 0, \cdots, 1)$$

*czyli*

$$\vec{e}_i = (\delta_{ij}) dla i = 1, \cdots, n,$$

*gdzie*

$$\delta_{ij} \overset{\text{df}}{=} CASES$$

*jest tzw. symbolem Kroneckera.*

! Przestrzeń funkcyjna $F(\Omega, \vec{\mathbf{V}})$ - nieskończenie wymiarowa.

! Jeżeli $(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m) \subset \vec{\mathbf{V}}$ liniowo niezależny, to $\mathrm{lin}(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_k) \oplus \mathrm{lin}(\vec{e}_{k+1}, \cdots, \vec{e}_m) = \mathrm{lin}(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m)$ oraz $\dim \mathrm{lin}(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m) = m$.

! Niech $(\vec{e}_i$ i $(\vec{e'}_i) \overset{\text{ozn}}{=} (\vec{e}_{i'})(i, i' = 1, \cdots, n)$ dwie bazy przestrzeni n-wymiarowej $\vec{\mathbf{V}}$. Zatem

$$\vec{e}_{i'} \; A^i_{i'} \vec{e}_i, \;\; \vec{e}_i \; A^{i'}_i \vec{e}_{i'},$$

a w konsekwencji

$$\vec{e}_{i'} = A^i_{i'} \vec{e}_i = A^i_{i'} A^{j'}_i \vec{e}_{j'},$$

skąd

$$A^i_{i'} A^{j'}_i = \delta^{i'}_{j'} = CASES,$$

czyli

$$[A^i_{i'}][A^{j'}_i] = [\delta^{j'}_{i'}],$$

lub

$$\mathbb{A}\mathbb{A}' = \mathbb{I} \;\; (\mathbb{A}' = \mathbb{A}^{-1}),$$

w notacji macierzowej, przy

$$\mathbb{A} = [A^i_{i'}], \;\; \mathbb{A}' = [A^{i'}_i],$$

tzw macierzach transformacji baz (z $\vec{e}_i$ do $\vec{e}_{i'}$ i na odwrót).

Jeżeli $\det \mathbb{A} > 0$, to bazy $(\vec{e}_i)$ i $(\vec{e}_{i'})$ są zgodnie zorientowane.
Niech

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i = x^{i'} \vec{e}_{i'}.$$

Wobec

$$x^{i'} \vec{e}_{i'} = x^{i'} A^i_{i'} \vec{e}_i = x^i \vec{e}_i = x^i A^{i'}_i \vec{e}_{i'},$$

mamy

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i, \;\; x^i = A^i_{i'} x^{i'},$$

czyli w notacji macierzowej

$$[x^{i'}] = [A^{i'}_i][x^i], \;\; [x^i] = [x^i_{i'}][x^{i'}]$$

! Niech $\vec{\mathbf{B}} = (\vec{e}_i)$ ustalona baza przestrzeni $\vec{\mathbf{V}}$. Odwzorowanie

$$\vec{\mathbf{i}}_{\vec{\mathbf{B}}} : \vec{\mathbf{V}} \to \mathscr{R}^n; \; \vec{\mathbf{i}}_{\vec{\mathbf{B}}}(\vec{x}) = (x^i), \; \vec{x} = x^i \vec{e}_i,$$

ustala tzw. izomorfizm $\vec{\mathbf{V}}$ i $\mathscr{R}^n$ w danej bazie $\vec{\mathbf{B}}$.

## 2.4 Przestrzenie unormowane

**Definicja 40.** *Przestrzenią (liniową, wektorową) unormowaną nazywamy parę (układ) $\{\vec{\mathbf{V}}, |\cdot|\}$, gdzie $\vec{\mathbf{V}}$ jest przestrzenią wektorową, a $|\cdot|$ – odwzorowaniem, zwanym normą, o następujących własnościach:*

$$|\cdot| : \vec{\mathbf{V}} \to < p, \infty) \subset \mathscr{R},$$

1. $|\vec{x}| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$,
2. $|\alpha\vec{x}| = |\alpha|\,|\vec{x}| \ \ \forall\alpha \in \mathscr{R}, \forall\vec{x} \in \vec{\mathbf{V}}$,
3. $|\vec{x} + \vec{y}| \leqslant |\vec{x}| + |\vec{y}| \ \ \forall\vec{x}, \vec{y} \in \vec{\mathbf{V}}$.

*Liczba $|\vec{x}|$ – norma lub długość wektora $\vec{x}$.*

! Wektor jednostkowy (inaczej wersor) – wektor o długości jednostkowej ($\vec{i}$ - wersor $\Leftrightarrow$ $|\vec{i}| = 1$).

**Przykład 9.** *Przestrzeń wektorowa arytmetyczna $\mathscr{R}^n$ jest unormowana – z normą:*

$$|\vec{x}| \stackrel{\text{df}}{=\!=} \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \vec{x} = (x_i).$$

**Przykład 10.** *Niech $\vec{\mathbf{V}}$ przestrzeń unormowana z normą $|\cdot|$. Zbiór*

$$L^\infty(\Omega, \vec{\mathbf{V}}) = \{\vec{f} \in F(\Omega, \vec{\mathbf{V}}); \sup_{\xi\in\Omega} |\vec{f}(\xi)| < \infty\},$$

*jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $F(\Omega, \vec{\mathbf{V}})$, co wynika z kryterium podprzestrzeni, a więc jest przestrzenią wektorową - tzw. przestrzenią funkcji ograniczonych. Ponadto przestrzeń ta jest unormowana, gdyż*

$$||\vec{f}||_\infty \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{\xi\in\Omega} |\vec{f}(\xi)|,$$

*spełnia warunki definicyjne normy.*

! Jeżeli $\vec{\mathbf{V}}$ jest skończenie wymiarowa, to każde dwie normy na $\vec{\mathbf{V}}$ są równoważne, tzn.

$$\exists\alpha, \beta > 0 \ \ \alpha|\vec{x}|_1 \leqslant |\vec{x}|_2 \leqslant |\vec{x}|_1 \ \ \forall\vec{x} \in \vec{\mathbf{V}}.$$

! Jeżeli $\vec{\mathbf{U}}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni unormowanej $\vec{\mathbf{V}}$ z normą $|\cdot|$, to $\vec{\mathbf{U}}$ jest również unormowana – z normą $|\cdot|$ obciętą do $\vec{\mathbf{U}}$.

**Twierdzenie 2.** *Przestrzeń wektorowa unormowana $\{\vec{\mathbf{V}}, |\cdot|\}$ jest "automatycznie" metryczna – z metryką generowaną przez normę:*

$$d(\vec{x}, \vec{y}) \stackrel{\text{df}}{=} |\vec{y} - \vec{x}|, \quad \forall\vec{x}, \vec{y} \in \vec{\mathbf{V}},$$

*(jeśli wektory przestrzeni $\vec{\mathbf{V}}$ potraktować także jako punkty przestrzeni $D = \vec{\mathbf{V}}$).*

**Definicja 41.** *Jeżeli przestrzeń unormowana $\vec{\mathbf{V}}$ jest jako przestrzeń metryczna (z metryką generowaną przez normę) zupełna, to nazywa się przestrzenią Banacha.*

**!** Każda skończenie wymiarowa i unormowana przestrzeń wektorowa jest przestrzenią Banacha (w tym $\mathscr{R}^n$).

**!** Każda skończenie wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni unormowanej jest domknięta.

**!** Żadna nieskończenie wymiarowa przestrzeń Banacha $\vec{\mathbf{V}}$ nie daje się przedstawić w postaci sumy $\vec{\mathbf{V}}_1 \cup \vec{\mathbf{V}}_2 \cup \cdots$ skończenie wymiarowych podprzestrzeni $\vec{\mathbf{V}}$.

**Przykład 11.** *Niech $K$ podzbiór zwarty przestrzeni $\mathscr{R}^n$ i niech $C(K, \mathscr{R}^m)$ przestrzeń funkcji ciągłych (jako podprzestrzeń przestrzeni $F(K; \mathscr{R}^m)$). Przestrzeń ta jest przestrzenią Banacha z normą:*

$$||f|| = \sup_{x \in K} |f(x)|,$$

*gdzie $|f(x)|$ – dowolna norma w $\mathscr{R}^n$.*

**Przykład 12.** *Niech $U$ oznacza podzbiór otwarty i mierzalny (w sensie Lebesgue'a) w $\mathscr{R}^n$ i niech $L(U; \mathscr{R})$ oznacza zbiór wszystkich funkcji całkowalnych (w sensie Lebesgue'a) na $U$ o wartościach w $\mathscr{R}$. $L(U, \mathscr{R})$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni funkcyjnej $F(U, \mathscr{R})$, a ponadto przestrzenią Banacha z normą*

$$|f| = \int_U |f(x)| dV,$$

*gdzie $dV$ – miara w $U \subset \mathscr{R}^n$, $dV = dx_1 \cdot ... \cdot dx_n$ przy $x = (x_1, ..., x_n)$.*

**Definicja 42.** *Niech $(\vec{\mathbf{V}}_n) = \{\vec{\mathbf{V}}_n \subset \vec{\mathbf{V}}; n \in \mathscr{N}\}$ ciąg podprzestrzeni liniowych przestrzeni unormowanej (Banacha) $\subset V$. Mówimy, że ciąg $(\vec{\mathbf{V}}_n)$ aproksymuje przestrzeń $\vec{\mathbf{V}}$, jeżeli*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \forall \vec{x} \in \vec{\mathbf{V}} \, \exists N \in \mathscr{N} \, \exists \vec{x}_N \in \vec{\mathbf{V}}_N \, |\vec{x} - \vec{x}_N| < \varepsilon$$

*oraz, że ciąg $(\vec{\mathbf{V}}_n)$ aproksymuje przestrzeń $\vec{\mathbf{V}}$ jednostajnie, jeżeli*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathscr{N} \, \forall \vec{x} \in \vec{\mathbf{V}} \, \exists \vec{x}_N \in \vec{\mathbf{V}}_N \, |\vec{x} - \vec{x}_N| < \varepsilon$$

.

## 2.5 Przestrzenie unitarne

**Definicja 43.** *Przestrzenią (liniową) unitarną (przestrzenią z iloczynem skalarnym) nazywamy parę* $\{\vec{\mathbf{V}}; <\cdot,\cdot>\}$*, gdzie* $\vec{\mathbf{V}}$ *jest przestrzenią wektorową (liniową), a* $<\cdot,\cdot>$ *odwzorowaniem*

$$<\cdot,\cdot>: \vec{\mathbf{V}} \times \vec{\mathbf{V}} \to \mathscr{R} \ (<\vec{x},\vec{y}> \overset{\text{ozn}}{=} \vec{x}\cdot\vec{y}),$$

*zwanym iloczynem skalarnym (produktem skalarnym), spełniającym warunki:*

1. $\vec{x}\cdot\vec{x} \geqslant 0,\ \vec{x}\cdot\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0},$
2. $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{x},$
3. $(\alpha\vec{x}' + \beta\vec{x}'')\cdot\vec{y} = \alpha\vec{x}'\cdot\vec{y} + \beta\vec{x}''\cdot\vec{y}.$

! Przestrzeń unitarna $\{\vec{\mathbf{V}}, <\cdot,\cdot>\}$ jest unormowana (automatycznie) – z normą:

$$|\vec{x}| \overset{\text{df}}{=} \sqrt{\vec{x}\vec{x}},\ \vec{x} \in \vec{\mathbf{V}},$$

(tzw, normą generowaną przez iloczyn skalarny a w konsekwencji przestrzenią metryczną – z metryką generowaną przez normę:

$$d(\vec{x},\vec{y}) = |\vec{y}-\vec{x}| = \sqrt{(\vec{y}-\vec{x})\cdot()\vec{y}-\vec{x}},\ \vec{x},\vec{y} \in \vec{\mathbf{V}},$$

(jeśli wektory $\vec{x}$, $\vec{y}$ potraktować jako punkty).

**Definicja 44.** *Wektory* $\vec{x}$ *i* $\vec{y}$ *nazywamy prostopadłymi (lub ortogonalnymi –* $\vec{x} \perp \vec{y}$*), gdy* $\vec{x}\cdot\vec{y} = 0$*. Natomiast prostopadłe są zbiory* $\vec{\mathbf{U}}'$ *i* $\vec{\mathbf{U}}''$ *przestrzeni* $\vec{\mathbf{V}}$ *(*$\vec{\mathbf{U}}' \perp \vec{\mathbf{U}}''$*), jeśli*

$$\forall\vec{x} \in \vec{\mathbf{U}}'\ \forall\vec{y} \in \vec{\mathbf{U}}''\ \vec{y} \perp \vec{x}.$$

! Prawdziwa jest nierówność Cauchy'ego

$$|\vec{x}\cdot\vec{y} \leqslant |\vec{x}||\vec{y}|.$$

**Przykład 13.** *w przestrzeni* $\mathscr{R}^n$

$$\vec{x}\cdot\vec{y} = x_i y_i,\ \ \vec{x} = (x_i),\ \vec{y} = (y_i),$$

*określa iloczyn skalarny, zwany standardowym, który generuje w* $\mathscr{R}^n$ *tzw, standardowe (lub euklidesowe) normę i metrykę:*

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_i x_i},$$

$$d(\vec{x},\vec{y}) = \sqrt{(y_i - x_i)(y_i - x_i)}.$$

**Przykład 14.** *Niech* $U$ *oznacza podzbiór otwarty i mierzalny (w sensie Lebesque'a) w* $\mathscr{R}^n$ *i niech*

$$L^2_\rho(U,\mathscr{R}) = \{f \in F(U,\mathscr{R});\ \int\limits_U \rho(x) f^2(x) dV < \infty\},$$

*oznacza zbiór funkcji całkowalnych z kwadratem z wagą $\rho$ na $U$ (w sensie Lebesgue'a), gdzie $\rho : U \to \mathscr{R}$ jet funkcją mierzalną nieujemną, nazwaną wagą. Zbiór ten jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $F(U, \mathscr{R})$, a więc jest przestrzenią wektorową, a przy tym unitarną z iloczynem skalarnym:*

$$< f, g >_\rho = \int_U \rho(x) f(x) g(x) dV,$$

$$dV = dx_1 \cdot ... \cdot dx_n \ \ przy \ \ x = (x1, ..., x_n).$$

*Iloczyn skalarny generuje tzw. normę średniokwadratowa (i odpowiednią metrykę średniokwadratową) – z wagą $\rho$ lub "bez wagi":*

$$||g||_\rho = (< f, f >_\rho)^{1/2} = \left( \int_U \rho(x) f^2(x) dV \right)^{1/2}$$

$$||g|| = (< f, f >)^{1/2} = \left( \int_U f^2(x) dV \right)^{1/2}$$

**Przykład 15.** *Niech $\{\vec{\mathbf{V}}_i; < \cdot, \cdot >_i\}$, $i \in \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ – skończony lub przeliczalny zbiór wskaźników) będzie rodziną przestrzeni unitarnych. Niech $\rho = (\rho_i)$ – ciąg liczbowy ($\rho_i \in \mathscr{R}, i \in \mathbf{I}$). Zbiór*

$$l^2_\rho = \left\{ \vec{x} = (\vec{x}_i) \in \vec{\mathbf{V}};\ \vec{x}_i \in \vec{\mathbf{V}}_i \ \forall i \in \mathbf{i},\ \sum_{i \in \ \mathbf{I}} \rho_i < \vec{x}_i, \vec{x}_i >_i < \infty \right\}$$

*jest podprzestrzenią liniową przestrzeni wektorowej*

$$\vec{\mathbf{V}} = \{\vec{x} = (\vec{x}_i);\ \vec{x}_i \in \vec{\mathbf{V}}_i,\ iin\mathbf{I}\},$$

*a więc jest przestrzenią wektorową – przy tym unitarną z iloczynem skalarnym:*

$$< \vec{x}, \vec{y} >_\rho = \sum_{i \in \mathbf{i}} \rho_i < \vec{x}_i, \vec{y}_i >_i$$

*i normą generowaną przez ten iloczyn:*

$$|\vec{x}|_\rho = \left( \sum_{i \in \mathbf{i}} \rho_i < \vec{x}_i, \vec{x}_i >_i \right)^{1/2}.$$

*W szczególności, gdy ciąg wagowy jest jednostkowy, tzn. $\vec{\rho} = (1, 1, ...)$, mamy przestrzeń z oznaczeniami:*

$$l^2(\vec{\mathbf{V}}),\ < \cdot, \cdot > \ i \, | \cdot |.$$

*Jeżeli $\vec{\mathbf{V}} = \mathscr{R}$ dla wszystkich $i \in \mathbf{i}$, to mamy tzw. przestrzeń ciągów liczbowych (skończonych lub przeliczalnych) sumowalnych z kwadratem – z wagą $\rho$: (t.j. ciągiem wagowym $\rho = (\rho_i)$) lub "bez wagi" (tj. ciągiem wagowym jednostkowym):*

$$l^2_\rho \overset{\text{df}}{=} \left\{ \vec{x} = (x_i); x_i \in \mathscr{R}\ \forall i \in \mathbf{I},\ \sum_{i \in \mathbf{I}} \rho_i x_i^2 < \infty \right\},$$

$$< \vec{x}, \vec{y} >_\rho = \sum_{i \in \mathbf{I}} \rho_i x_i y_i,\ |\vec{x}|_\rho = \sum_{i \in \mathbf{I}} \rho_i x_i^2,$$

*(z oznaczeniami $l^2$, $< \cdot, \cdot >$ i $|\cdot|$ przy "braku wagi"). W przypadku, gdy $\mathbf{I} = \{1, 2, 3, .., n\}$ przestrzeń $l^2$ pokrywa się z $\mathscr{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym i normą.*