Spis treści

1 Przestrzenie metryczne

1.1 Pojęcie przestrzeni metrycznej

Definicja 1. *Przestrzenią metryczną nazywamy układ* $\{\mathbb{D}; d\}$*, w którym* $\mathbb{D}$ *jest niepustym zbiorem elementów* X, Y, Z*, zwanych* ***punktami****, natomiast* $d : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathscr{R}$ *(*$\mathscr{R}$ *– zbiór (ciało) liczb rzeczywistych) jest odwzorowaniem, zwanym* ***metryką****, spełniających warunki:*

1. $d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \geqslant 0, d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{X} = \mathrm{Y}$,
2. $d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = d(\mathrm{Y}, \mathrm{X})$,
3. $d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \leqslant d(\mathrm{X}, \mathrm{Z}) + d(\mathrm{Z}, \mathrm{Y})$,

dla dowolnych X, Y, Z $\in \mathbb{D}$*. Liczbę* $d(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ *nazywamy odległością punktu* X *od* Y*). Jeżeli* $\mathbb{B} \subset \mathbb{D}$ $d' = d|_{\mathbb{B}\times\mathbb{B}}$*, to* $\{\mathbb{B}, d'\}$ *nazywamy* ***podzbiorem metrycznym*** *(podprzestrzenią metryczną) przestrzeni* $\mathbb{D}$*.*

! Mówimy krótko: **przestrzeń** (metryczna) $\mathbb{D}$ - chociaż na danym zbiorze może być określonych wiele różnych metryk. Metryki d i d' są **równoważne** (z definicji), jeśli

$$\exists \alpha, \beta \in \mathscr{R} \quad \alpha d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \leqslant d'(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \leqslant \beta d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \quad \forall \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathbb{D}.$$

Przykład 1. *Niech* $\mathscr{R}^n = \{\mathrm{X} \stackrel{\mathrm{df}}{=} (x_1, ..., x_n); x_i \in \mathscr{R}$ *dla* $i = 1, ..., n\}$ *i* $\mathbb{D} = \mathscr{R}^n$ *(zbiór ciągów n-elementowych). Niech*

$$d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \left[\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$d'(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|,$$

$$d''(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \max_{i=1,\dots,n} |y_i - x_i|.$$

Odwzorowania d*,* d' *i* d'' *są metrykami na* $\mathscr{R}^n$ *(i to równoważnymi). Zwykle* $\mathscr{R}^n \equiv \{\mathscr{R}^n, d\}$ *nazywamy arytmetyczną przestrzenią metryczną (z metryką euklidesową).*

Przykład 2. *Niech* Ω *dowolny zbiór elementów* ξ, η, ζ,... *i niech* $f : \Omega \to \mathscr{R}$ *dowolne odwzorowanie ograniczone (tzn.* $\sup_{\eta \in \mathscr{R}} |f(\eta)| < \infty$*). Zbiór*

$$F(\Omega, \mathscr{R}) = \{f : \Omega \to \mathscr{R}; \sup_{\Omega} |f(\eta)| < \infty\}$$

wraz z odwzorowaniem

$$d(f, g) = \sup_{\Omega} |f(\eta) - g(\eta)|$$

jest przestrzenią metryczną (tzw. <u>*funkcyjną*</u>*) - tzn.* $\{\mathbb{D}, d\}$ *przy* $\mathbb{D} = F(\Omega, \mathscr{R})$ *(punktami przestrzeni* $\mathbb{D}$ *są tu funkcje ze zbioru* F*).*

Przykład 3. *Niech* $\{\mathbb{D}_1, d_1\}, ..., \{\mathbb{D}_n, d_n\}$ *- przestrzenie metryczne. Wtedy* $\{\mathbb{D}, d\}$*, przy*

$$\mathbb{D} \overset{\text{df}}{=} \mathbb{D}_1 \times ... \times \mathbb{D}_n \ni \mathrm{X} \times \mathrm{Y} = (\mathrm{X}_1, ..., \mathrm{X}_n) \times (\mathrm{Y}_1, ..., \mathrm{Y}_n) \to d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \sum_{i=1}^{n} d_i(\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i)$$

jest przestrzenią metryczną.

1.2 Podstawowe, wybrane pojęcia topologiczne

Niech $\mathbb{D}$ przestrzeń metryczna z ustaloną metryką d.

Definicja 2. *Odległość między zbiorami* $\mathbb{A}, \mathbb{B} \subset \mathbb{D}$*:*

$$d(\mathbb{A}, \mathbb{B}) = \inf d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}),\ \mathrm{X} \in \mathbb{A},\ \mathrm{Y} \in \mathbb{B}$$

.

Definicja 3. *Zbiór* $\mathbb{Z}$ *(*$\mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$*) jest ograniczony jeśli:*

$$\sup d(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) < \infty \quad \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathbb{Z}$$

.

Definicja 4. *Średnicą zbioru ograniczonego nazywamy:*

$$\rho(\mathrm{Z}) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup_{\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{Z}} d(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$$

.

Definicja 5. *Ciąg* $\{\mathrm{X}_n\}$ *punktów z* $\mathbb{D}$ *jest zbieżny do* X *(ma granicę* $\mathrm{X} \in \mathbb{D}$*):*

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{X}_n = \mathrm{X} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(\mathrm{X}_n, \mathrm{X}) = 0.$$

Definicja 6. *Domknięcie zbioru* Z $(\mathrm{Z} \subset \mathbf{D})$*:*

$$\bar{\mathrm{Z}} \stackrel{\mathrm{ozn}}{=} \mathrm{clos}(\mathrm{Z}) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{\mathrm{X}' \in \mathbf{Z};\ \mathrm{X}' = \lim_{n\to\infty} \mathrm{X}_n,\ \mathrm{X}_n \in \mathbf{D}\ \mathit{dla}\ n = 1, 2, \ldots\}.$$

!

$$\mathrm{Z} \subset \bar{\mathrm{Z}}$$

Definicja 7. *Zbiór* $\mathbf{A}$ *gęsty w zbiorze* $\mathbb{B}(\mathbf{A} \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{D})$*, jeśli* $\mathbf{B} \subset \bar{\mathbf{A}}$.

Definicja 8. *Zbiór* Z *jest domknięty jeśli* $\mathrm{Z} = \bar{\mathrm{Z}}$.

Definicja 9. *Kula (otwarta) o środku* C' *i promieniu* r*:*

$$\mathbf{K}(\mathrm{C}', r) = \{\mathrm{X} \in \mathbf{D}; d(\mathrm{X}, \mathrm{C}') < r\}$$

Definicja 10. *Kula domknięta o środku* C' *i promieniu* r *– domknięcie kuli:*

$$\mathbf{K}(C', r) = \{\mathrm{X} \in \mathbf{D}; d(\mathrm{X}, C') \leqslant r\}$$

Definicja 11. *Sfera o środku* C' *i promieniu* r*:*

$$\mathbf{S}(C', r) = \{\mathrm{X} \in \mathbf{D};\ d(\mathrm{X}, C') = r\}$$

Definicja 12. *Punkt* X *zbioru* Z *jest wewnętrzny jeśli*

$$\exists r > 0\ \mathbf{K}(\mathrm{X}, r) \subset \mathrm{Z}.$$

Definicja 13. *Wnętrze zbioru* Z*:* $\mathrm{int}(\mathrm{Z})$ *= zbiór punktów wewnętrznych zbioru* Z.

Definicja 14. *Brzeg zbioru* Z*:*

$$\partial \mathrm{Z} = \mathrm{clos}(\mathrm{Z}) - \mathrm{int}(\mathrm{Z}).$$

Definicja 15. *Punkt brzegowy zbioru* Z *– punkt należący do brzegu* $\partial \mathrm{Z}$.

Definicja 16. *Zbiór* Z *otwarty jeśli* $\mathrm{Z} = \mathrm{int}(\mathrm{Z})$

! Kula (otwarta) jest zbiorem otwartym, kula domknięta i sfera są zbiorami domkniętymi. Sfera jest brzegiem kuli otwartej i domkniętej.

! **Iloczyn dowolnie wielu** zbiorów domkniętych oraz **suma skończenie wielu** zbiorów domkniętych są zbiorami domkniętymi.

! Suma dowolnie wielu zbiorów otwartych oraz iloczyn skończenie wielu zbiorów otwartych są zbiorami otwartymi.

Definicja 17. *Dopełnienie zbioru* Z*:*

$$\mathrm{Z}' = \mathbf{D} - \mathrm{Z}.$$

! Dopełnieni zbioru domkniętego jest zbiorem otwartym, a otwartego - domkniętym.

! $\mathbf{D}' = \varnothing$(zbiór pusty), $\varnothing' = \mathbf{D}$.

Definicja 18. *Zbiór* Z *jest otoczeniem punktu* X *jeśli* $\mathrm{X} \in \operatorname{int} \mathrm{Z}$.

Definicja 19. *Jeśli* Z *otoczenie* X*, to* $\mathrm{Z} - \{\mathrm{X}\}$ *sąsiedztwo* X.

Definicja 20. *Punkt* X *zbioru* Z *jest izolowany wtw,* $\exists r > 0\ \mathbf{K}(\mathrm{X}, r) \cap \mathrm{Z} = \{\mathrm{X}\}$.

Definicja 21. *Zbiór złożony jedynie z punktów izolowanych - zbiór dyskretny.*

Definicja 22. *Zbiór* Z *skończony (policzalny) - wszystkie elementy można policzyć: Zbiór* Z *n-elementowy (skończony), jeżeli jest postaci:*

$$\mathrm{Z} = \{\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \ldots, \mathrm{X}_n\}.$$

Definicja 23. *Zbiór* Z *przeliczalny - wszystkie elementy można ponumerować, tj. ustawić w ciąg:*

$$\mathrm{Z} = \{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_i, \ldots\}.$$

Definicja 24. *Zbiór* Z *spójny, jeżeli*

$$\mathrm{Z} = \mathbf{A} \cup \mathbf{B} \Rightarrow \bar{\mathbf{A}} \cap \mathbf{B} \neq \varnothing \vee \mathbf{A} \cap \bar{\mathbf{B}} \neq \varnothing.$$

Definicja 25. *Zbiór otwarty i spójny - obszar.*

Definicja 26. *Domknięcie obszaru - obszar domknięty.*

Definicja 27. *Obszar domknięty ograniczony - bryła.*

Definicja 28. *Zbiór* Z *zwarty = każdy ciąg punktów zbioru zbioru* Z *zawiera podciąg zbieżny do pewnego punktu zbioru* Z*:*

$$\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \ldots\} \subset \mathrm{Z}\ \ i\ \ \rho(\{\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n, \ldots\}) < \infty$$

$$\Rightarrow \exists \{n_k\} \subset \mathcal{N}(\textit{zbiór liczby naturalnych})\ i\, \exists \mathrm{X} \in \mathrm{Z}\ \ lim_{k \to \infty} \mathrm{X}_{n_k} = \mathrm{X}$$

! Jeśli Z zwarty, to domknięty i ograniczony.

Definicja 29. *Zbiór* Z *wypukły, jeżeli* $\forall\, \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathrm{Z}$ *odcinek* $\overline{\mathrm{X}\mathrm{Y}} \subset \mathrm{Z}$.

Definicja 30. *Odcinek o końcach* X *i* X *w przestrzeni* **D***:*

$$\overline{\mathrm{X}\,\mathrm{Y}} \overset{\mathrm{df}}{=} \{\, \mathrm{Z} \in \mathbf{D}; d(\mathrm{X},\, \mathrm{Y}) + d(\mathrm{Z},\, \mathrm{Y}) = d(\mathrm{X},\, \mathrm{Y})\}.$$

1.3 Przestrzenie metryczne ośrodkowe i zupełne

Definicja 31. *Niech* $\{\mathbf{D}, d\}$*, przestrzeń metryczna. Przestrzeń* $\mathbf{D}$ *jest ośrodkowa, jeżeli istnieje zbiór* $\mathbf{B}$ *(skończony lub przeliczalny) gęsty w* $\mathbf{D}$ *(tzn.* $\mathbf{B} = \mathbf{D}$*).*

! Dowolny podzbiór Z przestrzeni ośrodkowej $\{\mathbf{D}, d\}$ jest przestrzenią ośrodkową $\{\mathrm{Z}, d'\}, d' = d_{\mathrm{Z} \times \mathrm{Z}}$.

! Produkt kartezjański przestrzeni metrycznych $\mathbf{D}_1 \times \cdots \times \mathbf{D}_n$ jest przestrzenią ośrodkową jeśli wszystkie $\mathbf{D}_i$ są ośrodkowe (por. Przykład 3. z p. 1.1).

Definicja 32. *Przestrzeń metryczna* $\mathbf{D}$ *(z metryką* d*) jest zupełna, jeżeli każdy ciąg* $\{\mathrm{X}_n\}$ *elementów z* $\mathbf{D}$ *spełniający* ***warunek Cauchy****'ego:*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathscr{N} \ \forall m \geqslant n \geqslant N \ \ d(\mathrm{X}_m, \mathrm{X}_n) < \varepsilon$$

jest zbieżny do pewnego punktu $\mathrm{X} \in \mathbf{D}$ *(tzn.* $\mathrm{X}_n \to \mathrm{X}$*,* $lim_{n->\infty} \mathrm{X}_n = \mathrm{X}$*).*

! Każdy ciąg zbieżny spełnia warunek Cauchy.

! Zbiór $\mathscr{R}$ jako przestrzeń metryczna jest zupełny.

! Podzbiór Z przestrzeni zupełniej $\mathbf{D}$ jest zupełny (przestrzenią zupełną jako podprzestrzeń) wtedy, gdy Z jest domknięty.

! Produkt kartezjański przestrzeni metrycznych $\mathbf{D}_1 \times \cdots \times \mathbf{D}_n$ jest przestrzenią zupełną wtedy, gdy wszystkie $\mathbf{D}_i$ są zupełne (por Przykład 3 z p. 1.1).

2 Przestrzenie liniowe

2.1 Konwencja sumacyjna

W sumach postaci:

$$A = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2 + \cdots \alpha_n \beta_n,$$

$$B_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_j = \alpha_{i1} \beta_1 + \alpha_{i2} \beta_2 + \cdots + \alpha_{in} \beta_n,$$

$$C = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} = \alpha_{11} + \cdots + \alpha_{nn}$$

pomijamy symbol $\sum$, jeżeli wskaźniki podlegające sumowaniu, zwane **martwymi**, powtarzają się.

Zatem piszemy:

$$A = \alpha_i \alpha_b,$$

$$B_i = \alpha_{ij} \beta_j,$$

$$C = \alpha_{ii}.$$

Oznaczenie wskaźnika martwego nie jest istotne:

$$A = \alpha_i \beta_i = \alpha_k \beta_k = \alpha_1 \beta_1 + \cdots \alpha_n \beta_n.$$

Wskaźniki nie podlegające sumowaniu zwane wolnymi, muszą być jednakowe po obu stronach równości. Np.:

$$B_{\mathbf{i}} = \alpha_{\mathbf{i}j} \beta_j.$$

Wskaźniki umieszczamy także na **górnym poziome** (i bywa, że po lewej stronie **litery rdzeniowej**). Na przykład:

$$A = \alpha_i^i,$$

$$B^j = a^{ij} b_i,$$

$${}^k{}_r C = {}^r{}_k \alpha_i \beta_i.$$

Nie należy wskaźników na górnym poziomie rozumieć jako wykładników potęg. Wielkości potęgowane umieszczamy w nawiasach:

$$(\alpha^i)^2,$$

$$(\alpha^i)^j \beta_j,$$

$$(\alpha_{ij})^k \gamma_k.$$

Jeżeli wyróżniamy 'i-ty' składnik sumy

$$\alpha_i \beta_i = \alpha_1 \beta_1 + \cdots + \alpha_n \beta_n,$$

to wskaźnik tego składnika podkreślamy, czyli:

$$\alpha_i \beta_i = \alpha_1 \beta_1 + \cdots + \alpha_{\underline{i}} \beta_{\underline{i}} + \cdots + \alpha_n \beta_n,$$

Wielkościami numerowanymi za pomocą wskaźników mogą być wielkości **liczbowe** i **wektorowe** (a także inne obiekty i struktury matematyczne).

2.2 Pojęcie przestrzeni liniowej

Definicja 33. ***Przestrzenią liniową (wektorową)*** *nad ciałem liczb rzeczywistych $\mathscr{R}$ nazywamy niepusty zbiór $\vec{\mathbf{V}}$ elementów, zwanych* ***wektorami*** *(oznaczanych przez $\vec{x}$, $\vec{y}$, ...), wraz z dwoma działaniami:*

1. ***sumą wektorów***
$$\vec{\mathbf{V}} \times \vec{\mathbf{V}} \to \vec{\mathbf{V}};\ \vec{z} = \vec{x} + \vec{y},$$
2. ***iloczynem wektora przez liczbę***
$$\mathscr{R} \times \vec{\mathbf{V}} \to \vec{\mathbf{V}};\ \vec{z} = \alpha\vec{x},$$

spełniającymi warunki:

1. *łączności dodawania*
$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}),$$
2. *przemienności dodawania*
$$\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x},$$
3. *rozdzielności dodawania względem mnożenia*
$$\alpha(\vec{x} + \vec{y}) = \alpha\vec{x} + \alpha\vec{y},$$
$$(\alpha + \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{x},$$
4. *łączności iloczynu*
$$\alpha(\beta\vec{x}) = (\alpha\beta)\vec{x}$$
5. *istnienia wektora zerowego*
$$\vec{0} + \vec{x} = \vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$$
6. *istnienia wektora przeciwnego $-\vec{x}$ do wektora $\vec{x}$*
$$\vec{x} + (-\vec{x}) = (-\vec{x}) + \vec{x} = \vec{x} - \vec{x} = \vec{0}$$
7. *niezmienności wektora mnożonego przez 1*
$$1\vec{x} = \vec{x}$$

dla dowolnych wektorów $\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$ oraz liczb α, β.

Przykład 4. *Przestrzeń arytmetyczna*
Zbiór

$$\mathscr{R}^n = \{\vec{x} \stackrel{\mathrm{df}}{=} (x_1, \cdots, x_n) \stackrel{\mathrm{ozn}}{=} (x_i); x_i \in \mathscr{R}\, dla\, i = 1, \cdots, n\},$$

czyli

$$\mathscr{R}^n = \underbrace{\mathscr{R} \times \cdots \times \mathscr{R}}_{n\ razy},$$

z działaniami

$$\vec{x}+\vec{y}\overset{\text{df}}{=}(x_i+y_i)=(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n),$$

$$\alpha\vec{x}\overset{\text{df}}{=}(\alpha x_i)=(\alpha x_1,\cdots,\alpha x_n),$$

dla dowolnych $\vec{x}=(x_i)$, $\vec{y}=(y_i)\in\mathscr{R}^n$ *i* $\alpha\in\mathscr{R}$, *jest przestrzenią wektorową. Wektorem zerowym jest ciąg* n *zer:*

$$\vec{0}=(0,\cdots,0)$$

a wektorem przeciwnym do wektora - ciągu $\vec{x}=(x_i)$ *jest ciąg liczb przeciwnych*

$$-\vec{x}=(-x_i)=(-x_1,\cdots,-x_n.$$

Dla $n=1$ *wnioskujemy, że* $\mathscr{R}$ *jest także przestrzenią wektorową przy*

$$\mathscr{R}^1\overset{\text{ozn}}{=}\mathscr{R},\ \ (x_1)\overset{\text{ozn}}{=}z.$$

Przykład 5. *Przestrzeń funkcyjna*

Niech Ω *dowolny zbiór, a* $\vec{\mathbf{V}}$ *dowolna przestrzeń wektorowa. Zbiór funkcji (odwzorowań)*

$$F(\Omega,\vec{\mathbf{V}})=\{\vec{x}=\vec{f}(\xi),\xi\in\Omega\}$$

wraz z działaniami:

$$(\vec{f}+\vec{g})(\xi)\overset{\text{df}}{=}\vec{f}(\xi)+\vec{f}(\xi),\xi\in\Omega,$$

$$(\alpha\vec{f})(\xi)\overset{\text{df}}{=}\alpha\vec{f}(\xi),\xi\in\Omega$$

dla dowolnych $\vec{x}=\vec{f}(\xi)$, $\vec{g}=\vec{g}(\xi)$ *(*$\xi\in\Omega$*) i* $\alpha\in\mathscr{R}$ *tworzy przestrzeń wektorową.*

Przykład 6. *Przestrzeń ciągów*

Niech $\{\vec{\mathbf{V}}_i,i\in I\}$ *(I - skończony lub przeliczalny zbiór numerów/wskaźników) będzie rodziną przestrzeni liniowych. Zbiór*

$$\vec{\mathbf{V}}=\{\vec{x}=(\vec{x}_i;\vec{x}_i\in\vec{\mathbf{V}}_i dlai\in I\}$$

z działaniami:

$$\vec{x}+\vec{y}=(\vec{x}_i+\vec{y}_i),$$

$$\alpha\vec{x}=(\alpha\vec{x}_i,$$

dla dowolnych $\vec{x}=(\vec{x}_i)$, $\vec{y}=(\vec{y}_i)\in\vec{\mathbf{V}}$ *oraz* $\alpha\in\mathscr{R}$, *jest przestrzenią wektorową.*

Na przykład, gdy $I=\mathscr{N}$, *to* $\vec{x}=(\vec{x}_i)=(\vec{x}_1,\cdots,\vec{x}_n,\cdots)$ *- ciąg wektorów a gdy ponadto* $\vec{\mathbf{V}}_i=\mathscr{R}$ *dla wszystkich* $iinI=\mathscr{N}$, *to* $\vec{x}=(x_i)=(x_1,\cdots,x_n,\cdots)$ *– ciąg liczbowy.*

Definicja 34. *Zbiór* $\vec{\mathbf{U}}$ *zawarty w przestrzeni wektorowej (liniowej)* $\vec{\mathbf{V}}$ *nazywamy podprzestrzenią (liniową) przestrzeni* $\vec{\mathbf{V}}$, *jeżeli* $\vec{\mathbf{U}}$ *z działaniami określonymi w* $\vec{\mathbf{V}}$ *i ograniczonymi do* $\vec{\mathbf{U}}$ *stanowi przestrzeń wektorową.*

Twierdzenie 1. *(Kryterium podprzestrzeni). Jeśli dla każdych* $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{\mathbf{U}} \subset \vec{\mathbf{V}}$ *i* $\alpha \in \mathscr{R}$ *jest:*

$$\vec{x} + \vec{y} \in \vec{\mathbf{U}},$$

$$\alpha\vec{x} \in \vec{\mathbf{U}},$$

to $\vec{\mathbf{U}}$ *jest podprzestrzenią (liniową) przestrzeni* $\vec{\mathbf{V}}$.

Definicja 35. *Niech* $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m\} \subset \vec{\mathbf{V}}$ *dowolny skończony podzbiór wektorów przestrzeni* $\vec{\mathbf{V}}$ *i niech* $(\vec{v}_i) \overset{\text{ozn}}{=} (\vec{v}_i, \cdots, \vec{v}_m)$. *Wektor*

$$\vec{x} = \xi_i \vec{v}_i,$$

dla $(\xi_i) = (\xi_i, \cdots, \xi_m) \in \mathscr{R}^m$ *nosi nazwę kombinacji liniowej ciągu* $(\vec{v}_i)$.

Przykład 7. *Niech*

$$\vec{\mathbf{u}} \overset{\text{ozn}}{=} \text{lin}(\vec{v}_i) \overset{\text{df}}{=} \{\vec{x} = \xi_i \vec{v}_i; (\xi_i) \in \mathscr{R}^m\}$$

gdzie $\vec{v}_i$ *dowolny ustalony podzbiór (ciąg, układ) m wektorów przestrzeni wektorowej* $\vec{\mathbf{V}}$. *Zbiór* $\vec{\mathbf{U}}$ *(wszystkich kombinacji liniowych wektorów* $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m)$*) jest podprzestrzenią liniową przestrzeni* $\vec{\mathbf{V}}$ *(na mocy kryterium) – tzw. przestrzenią generowaną przez układ wektorów* $(\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m)$.

Definicja 36. *Niech* $\vec{\mathbf{U}}'$ *i* $\vec{\mathbf{U}}''$ *podprzestrzenie liniowe* $\vec{\mathbf{V}}$. *Zbiór*

$$\vec{\mathbf{U}} = \vec{\mathbf{U}}' + \vec{\mathbf{U}}'' = \{\vec{u} = \vec{u}' + \vec{u}''; \vec{u}' \in \vec{\mathbf{U}}'; \vec{u}'' \in \vec{\mathbf{U}}''\},$$

nosi nazwę sumy podprzestrzeni $\vec{\mathbf{U}}'$ *i* $\vec{\mathbf{U}}''$. *Jest to podprzestrzeń* $\vec{\mathbf{V}}$. *Jeśli ponadto* $\vec{\mathbf{U}}' \cap \vec{\mathbf{U}}'' = \{\vec{0}\}$ *to* $\vec{\mathbf{U}} \overset{\text{ozn}}{=} \vec{\mathbf{U}}' \oplus \vec{\mathbf{U}}$" *jest tzw. sumą prostą* $\vec{\mathbf{U}}'$ *i* $\vec{\mathbf{U}}''$.

2.3 Przestrzenie skończenie wymiarowe. Baza algebraiczna

Definicja 37. *Podzbiór* $\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n \overset{\text{ozn}}{=} (\vec{e}_i) = (\vec{e}_i, \cdots, \vec{e}_n)$ *przestrzeni wektorowej* $\vec{\mathbf{V}}$ *nazywa się* *liniowo niezależnym, jeżeli prawdziwa jest implikacja:*

$$\alpha_i \vec{e}_i = \vec{0} \rightarrow \alpha_i = 0 \ \ \forall i = 1, \cdots, n.$$

Definicja 38. *Zbiór* $\vec{\mathbf{B}} = (\vec{e}_i)$ *wektorów z przestrzeni* $\vec{\mathbf{V}}$ *nazywamy bazą (algebraiczną), jeżeli:*

1. $\vec{\mathbf{B}}$ *jest liniowo niezależnym*
2. $\mathrm{lin}\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{V}}$ *(*$\vec{\mathbf{B}}$ *generuje* $\vec{\mathbf{V}}$*).*

Definicja 39. *Jeżeli w przestrzeni* $\vec{\mathbf{V}}$ *istnieje baza n-elementowa* $\vec{\mathbf{B}}$*, to* $\vec{\mathbf{V}}$ *nazywamy n-wymiarową (skończenie wymiarową o wymiarze n) i piszemy*

$$\dim \vec{\mathbf{V}} = n$$

! Jeżeli istnieje w $\vec{\mathbf{V}}$ baza n-elementowa, to istnieje nieskończenie wiele baz i każda jest n-elementowa.

! Jeżeli $\vec{\mathbf{B}}$ jest n-elementową bazą przestrzeni $\vec{\mathbf{V}}$, to

$$\forall \vec{x} \in \vec{\mathbf{V}} \exists (x^i) \in \mathscr{R}^n \ \ \vec{x} = x^i \vec{e}_i,$$

gdzie (x^i) są tzw. współczynnikami rozkładu lub współrzędnymi wektorze $\vec{x}$ w bazie $\vec{\mathbf{B}}$. Przy tym rozkład ten jest jednoznaczny, bowiem

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i = y^i \vec{e}_i \rightarrow (x^i - y^i)\vec{e}_i = \vec{0} \rightarrow x^i - y^i = 0 \ \ \forall i = 1, 2, \cdots, n.$$

Przykład 8. *Bazą przestrzeni arytmetycznej* $\mathscr{R}^n$ *– tzw. bazą standardową - jest układ ciągów*

$$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, \cdots, 0),$$
$$\vec{e}_2 = (0, 1, 0, \cdots, 0),$$
$$\vdots$$
$$\vec{e}_n = (0, 0, 0, \cdots, 1)$$

czyli

$$\vec{e}_i = (\delta_{ij}) dla i = 1, \cdots, n,$$

gdzie

$$\delta_{ij} \overset{\text{df}}{=} CASES$$

jest tzw. symbolem Kroneckera.

! Przestrzeń funkcyjna $F(\Omega, \vec{\mathbf{V}})$ - nieskończenie wymiarowa.

! Jeżeli $(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m) \subset \vec{\mathbf{V}}$ liniowo niezależny, to $\mathrm{lin}(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_k) \oplus \mathrm{lin}(\vec{e}_{k+1}, \cdots, \vec{e}_m) = \mathrm{lin}(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m)$ oraz $\dim \mathrm{lin}(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_m) = m$.

! Niech $(\vec{e}_i$ i $(\vec{e'}_i) \overset{\text{ozn}}{=} (\vec{e}_{i'})(i, i' = 1, \cdots, n)$ dwie bazy przestrzeni n-wymiarowej $\vec{\mathbf{V}}$. Zatem

$$\vec{e}_{i'} \ A^i_{i'} \vec{e}_i, \ \ \vec{e}_i \ A^{i'}_i \vec{e}_{i'},$$

a w konsekwencji

$$\vec{e}_{i'} = A^i_{i'} \vec{e}_i = A^i_{i'} A^{j'}_i \vec{e}_{j'},$$

skąd

$$A^i_{i'} A^{j'}_i = \delta^{i'}_{j'} = CASES,$$

czyli

$$[A^i_{i'}][A^{j'}_i] = [\delta^{j'}_{i'}],$$

lub

$$\mathbb{A}\mathbb{A}' = \mathbb{I} \ \ (\mathbb{A}' = \mathbb{A}^{-1}),$$

w notacji macierzowej, przy

$$\mathbb{A} = [A^i_{i'}], \ \ \mathbb{A}' = [A^{i'}_i],$$

tzw <u>macierzach transformacji baz</u> (z $\vec{e}_i$ do $\vec{e}_{i'}$ i na odwrót).

Jeżeli $\det \mathbb{A} > 0$, to bazy $(\vec{e}_i)$ i $(\vec{e}_{i'})$ są <u>zgodnie zorientowane</u>.
Niech

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i = x^{i'} \vec{e}_{i'}.$$

Wobec

$$x^{i'} \vec{e}_{i'} = x^{i'} A^i_{i'} \vec{e}_i = x^i \vec{e}_i = x^i A^{i'}_i \vec{e}_{i'},$$

mamy

$$x^{i'} = A^{i'}_i x^i, \ \ x^i = A^i_{i'} x^{i'},$$

czyli w notacji macierzowej

$$[x^{i'}] = [A^{i'}_i][x^i], \ \ [x^i] = [x^i_{i'}][x^{i'}]$$

! Niech $\vec{\mathbf{B}} = (\vec{e}_i)$ ustalona baza przestrzeni $\vec{\mathbf{V}}$. Odwzorowanie

$$\vec{\mathbf{i}}_{\vec{\mathbf{B}}} : \vec{\mathbf{V}} \to \mathscr{R}^n; \ \vec{\mathbf{i}}_{\vec{\mathbf{B}}}(\vec{x}) = (x^i), \ \vec{x} = x^i \vec{e}_i,$$

ustala tzw. <u>izomorfizm</u> $\vec{\mathbf{V}}$ i $\mathscr{R}^n$ w danej bazie $\vec{\mathbf{B}}$.

2.4 Przestrzenie unormowane

Definicja 40. *Przestrzenią (liniową, wektorową) unormowaną nazywamy parę (układ) $\{\vec{\mathbf{V}}, |\cdot|\}$, gdzie $\vec{\mathbf{V}}$ jest przestrzenią wektorową, a $|\cdot|$ – odwzorowaniem, zwanym normą, o następujących własnościach:*

$$|\cdot| : \vec{\mathbf{V}} \to < p, \infty) \subset \mathscr{R},$$

1. $|\vec{x}| = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$,
2. $|\alpha\vec{x}| = |\alpha|\,|\vec{x}| \;\; \forall \alpha \in \mathscr{R}, \forall \vec{x} \in \vec{\mathbf{V}}$,
3. $|\vec{x} + \vec{y}| \leqslant |\vec{x}| + |\vec{y}| \;\; \forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{\mathbf{V}}$.

Liczba $|\vec{x}|$ – norma lub długość wektora $\vec{x}$.

! Wektor jednostkowy (inaczej wersor) – wektor o długości jednostkowej ($\vec{i}$ - wersor $\Leftrightarrow$ $|\vec{i}| = 1$).

Przykład 9. *Przestrzeń wektorowa arytmetyczna $\mathscr{R}^n$ jest unormowana – z normą:*

$$|\vec{x}| \stackrel{\text{df}}{==} \sum_{i=1}^{n} |x_i|, \quad \vec{x} = (x_i).$$

Przykład 10. *Niech $\vec{\mathbf{V}}$ przestrzeń unormowana z normą $|\cdot|$. Zbiór*

$$L^\infty(\Omega, \vec{\mathbf{V}}) = \{\vec{f} \in F(\Omega, \vec{\mathbf{V}}); \sup_{\xi\in\Omega} |\vec{f}(\xi)| < \infty\},$$

jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $F(\Omega, \vec{\mathbf{V}})$, co wynika z kryterium podprzestrzeni, a więc jest przestrzenią wektorową - tzw. przestrzenią funkcji ograniczonych. Ponadto przestrzeń ta jest unormowana, gdyż

$$||\vec{f}||_\infty \stackrel{\text{df}}{=} \sup_{\xi\in\Omega} |\vec{f}(\xi)|,$$

spełnia warunki definicyjne normy.

! Jeżeli $\vec{\mathbf{V}}$ jest skończenie wymiarowa, to każde dwie normy na $\vec{\mathbf{V}}$ są równoważne, tzn.

$$\exists \alpha, \beta > 0 \;\; \alpha|\vec{x}|_1 \leqslant |\vec{x}|_2 \leqslant |\vec{x}|_1 \;\; \forall \vec{x} \in \vec{\mathbf{V}}.$$

! Jeżeli $\vec{\mathbf{U}}$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni unormowanej $\vec{\mathbf{V}}$ z normą $|\cdot|$, to $\vec{\mathbf{U}}$ jest również unormowana – z normą $|\cdot|$ obciętą do $\vec{\mathbf{U}}$.

Twierdzenie 2. *Przestrzeń wektorowa unormowana $\{\vec{\mathbf{V}}, |\cdot|\}$ jest "automatycznie" metryczna – z metryką generowaną przez normę:*

$$d(\vec{x}, \vec{y}) \stackrel{\text{df}}{=} |\vec{y} - \vec{x}|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{\mathbf{V}},$$

(jeśli wektory przestrzeni $\vec{\mathbf{V}}$ potraktować także jako punkty przestrzeni $D = \vec{\mathbf{V}}$).

Definicja 41. *Jeżeli przestrzeń unormowana* $\vec{\mathbf{V}}$ *jest jako przestrzeń metryczna (z metryką generowaną przez normę) zupełna, to nazywa się przestrzenią Banacha.*

! Każda skończenie wymiarowa i unormowana przestrzeń wektorowa jest przestrzenią Banacha (w tym $\mathscr{R}^n$).

! Każda skończenie wymiarowa podprzestrzeń przestrzeni unormowanej jest domknięta.

! Żadna nieskończenie wymiarowa przestrzeń Banacha $\vec{\mathbf{V}}$ nie daje się przedstawić w postaci sumy $\vec{\mathbf{V}}_1 \cup \vec{\mathbf{V}}_2 \cup \cdots$ skończenie wymiarowych podprzestrzeni $\vec{\mathbf{V}}$.

Przykład 11. *Niech K podzbiór zwarty przestrzeni $\mathscr{R}^n$ i niech $C(K, \mathscr{R}^m)$ przestrzeń funkcji ciągłych (jako podprzestrzeń przestrzeni $F(K; \mathscr{R}^m)$). Przestrzeń ta jest przestrzenią Banacha z normą:*

$$||f|| = \sup_{x \in K} |f(x)|,$$

gdzie $|f(x)|$ – dowolna norma w $\mathscr{R}^n$.

Przykład 12. *Niech U oznacza podzbiór otwarty i mierzalny (w sensie Lebesgue'a) w $\mathscr{R}^n$ i niech $L(U; \mathscr{R})$ oznacza zbiór wszystkich funkcji całkowalnych (w sensie Lebesgue'a) na U o wartościach w $\mathscr{R}$. $L(U, \mathscr{R})$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni funkcyjnej $F(U, \mathscr{R})$, a ponadto przestrzenią Banacha z normą*

$$|f| = \int_U |f(x)| dV,$$

gdzie dV – miara w $U \subset \mathscr{R}^n$, $dV = dx_1 \cdot ... \cdot dx_n$ przy $x = (x_1, ..., x_n)$.

Definicja 42. *Niech $(\vec{\mathbf{V}}_n) = \{\vec{\mathbf{V}}_n \subset \vec{\mathbf{V}}; n \in \mathscr{N}\}$ ciąg podprzestrzeni liniowych przestrzeni unormowanej (Banacha) $\subset V$. Mówimy, że ciąg $(\vec{\mathbf{V}}_n)$ aproksymuje przestrzeń $\vec{\mathbf{V}}$, jeżeli*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \forall \vec{x} \in \vec{\mathbf{V}} \; \exists N \in \mathscr{N} \; \exists \vec{x}_N \in \vec{\mathbf{V}}_N \; |\vec{x} - \vec{x}_N| < \varepsilon$$

oraz, że ciąg $(\vec{\mathbf{V}}_n)$ aproksymuje przestrzeń $\vec{\mathbf{V}}$ jednostajnie, jeżeli

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathscr{N} \; \forall \vec{x} \in \vec{\mathbf{V}} \; \exists \vec{x}_N \in \vec{\mathbf{V}}_N \; |\vec{x} - \vec{x}_N| < \varepsilon$$

.

2.5 Przestrzenie unitarne

Definicja 43. *Przestrzenią (liniową) unitarną (przestrzenią z iloczynem skalarnym) nazywamy parę* $\{\vec{\mathbf{V}}; <\cdot,\cdot>\}$*, gdzie* $\vec{\mathbf{V}}$ *jest przestrzenią wektorową (liniową), a* $<\cdot,\cdot>$ *odwzorowaniem*

$$<\cdot,\cdot>: \vec{\mathbf{V}} \times \vec{\mathbf{V}} \to \mathscr{R} \ (<\vec{x},\vec{y}> \overset{\text{ozn}}{=} \vec{x}\cdot\vec{y}),$$

zwanym iloczynem skalarnym (produktem skalarnym), spełniającym warunki:

1. $\vec{x}\cdot\vec{x} \geqslant 0,\ \vec{x}\cdot\vec{x} = 0 \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{0}$,
2. $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{x}$,
3. $(\alpha\vec{x}' + \beta\vec{x}'')\cdot\vec{y} = \alpha\vec{x}'\cdot\vec{y} + \beta\vec{x}''\cdot\vec{y}$.