Algorytmy i Struktury Danych
Kolokwium 2 (25.V.2023)

Format rozwiązań

Rozwiązanie zadania musi się składać z **krótkiego** opisu algorytmu (wraz z uzasadnieniem poprawności) oraz jego implementacji. Zarówno opis algorytmu jak i implementacja powinny się znajdować w tym samym pliku Pythona (rozszerzenie `.py`). Opis powinien być na początku pliku w formie komentarza (w pierwszej linii w komentarzu powinno być imię i nazwisko studenta). Opis nie musi być długi—wystarczy kilka zdań, jasno opisujących ideę algorytmu. Implementacja musi być zgodna z szablonem kodu źródłowego dostarczonym wraz z zadaniem. Niedopuszczalne jest w szczególności:

1. korzystanie z zaawansowanych struktur danych (np. słowników czy zbiorów),
2. zmienianie nazwy funkcji implementującej algorytm, listy jej argumentów, lub nazwy pliku z rozwiązaniem,
3. modyfikowanie testów dostarczonych wraz z szablonem,
4. wypisywanie na ekranie jakichkolwiek napisów innych niż wypisywane przez dostarczony kod (ew. napisy dodane na potrzeby diagnozowania błędów należy usunąć przed wysłaniem zadania).

Dopuszczalne jest natomiast:

1. korzystanie z następujących elementarnych struktur danych: krotka, lista, kolejka `collections.deque`, kolejka priorytetowa (`queue.PriorityQueue, heapq`),
2. korzystanie ze struktur danych dostarczonych razem z zadaniem (jeśli takie są).
3. korzystanie z wbudowanych funkcji sortujących (można założyć, że mają złożoność $O(n \log n)$).

Wszystkie inne algorytmy lub struktury danych wymagają implementacji przez studenta. Dopuszczalne jest oczywiście implementowanie dodatkowych funkcji pomocniczych w pliku z szablonem rozwiązania.

Zadania niezgodne z powyższymi ograniczeniami otrzymają ocenę 0 punktów. Rozwiązania w innych formatach (np. `.PDF`, `.DOC`, `.PNG`, `.JPG`) z definicji nie będą sprawdzane i otrzymają ocenę 0 punktów, nawet jeśli będą poprawne.

Testowanie rozwiązań

Żeby przetestować rozwiązanie zadania należy wykonać polecenie: `python3 kol2.py`

Szablon rozwiązania:	`kol2.py`
Złożoność podstawowa (1.0pkt):	$O(E^2)$
Złożoność akceptowalna (+1.0pkt):	$O(VE \log^* E)$
Złożoność wzorcowa (+2.0pkt):	$O(VE)$
V to liczba wierzchołków a E to liczba krawędzi grafu; $\log^*$ to logarytm iterowany.	

Dany jest nieskierowany, ważony graf G. Wagi krawędzi są parami różne. Niech T będzie pewnym drzewem rozpinającym G, m będzie najmniejszą wagą krawędzi z T a M będzie największą wagą krawędzi z T. Mówimy, że T jest *piękne* jeśli każda krawędź z G **nie wchodząca** w skład drzewa T ma wagę mniejszą niż m albo większą niż M. Wagą drzewa rozpinającego jest suma wag jego krawędzi. Zadanie polega na implementacji funkcji:

```
beautree( G )
```

która na wejściu otrzymuje graf reprezentowany w postaci listowej i zwraca wagę najlżejszego pięknego drzewa rozpinającego na G lub `None` jeśli takie drzewo nie istnieje. Użyty algorytm powinien być możliwie jak najszybszy. Proszę uzasadnić poprawność zaproponowanego algorytmu oraz oszacować jego złożoność czasową i pamięciową.

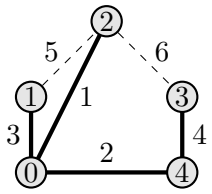
Reprezentacja grafu. Niech `G` będzie argumentem funkcji `beautree`. Graf `G` ma wierzchołki o numerach od 0 do $n-1$, gdzie:

```
n = len(G)
```

Dla danego wierzchołka `i`, `G[i]` to lista par postaci `(j,w)`, gdzie `j` to numer wierzchołka do którego prowadzi krawędź z `i` a `w` to jej waga.

Przykład 1. Dla wejścia:

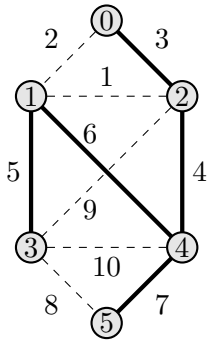
```
G = [ [(1,3), (2,1), (4,2)],  # 0
      [(0,3), (2,5) ],        # 1
      [(1,5), (0,1), (3,6)],  # 2
      [(2,6), (4,4) ],        # 3
      [(3,4), (0,2) ] ]       # 4
```



wynikiem jest 10. Mamy piękne drzewo rozpinające składające się z krawędzi $0-1$, $0-2$, $0-4$ i $4-3$ o wadze $3+1+2+4=10$. Drzewo jest *piękne* ponieważ pozostałe krawędzie z G mają wagi 5 oraz 6, czyli większe niż waga największej krawędzi drzewa (która ma wartość 4).

Przykład 2. Dla wejścia:

```
G = [[(1,2), (2,3)],                 # 0
     [(0,2), (2,1), (3,5), (4,6)],   # 1
     [(0,3), (1,1), (3,9), (4,4)],   # 2
     [(1,5), (2,9), (4,10), (5,8)], # 3
     [(2,4), (1,6), (3,10), (5,7)], # 4
     [(3,8), (4,7)] ]                # 5
```



wynikiem jest 25. Mamy piękne drzewo rozpinające składające się z krawędzi $0-2$, $2-4$, $1-3$, $1-4$ i $4-5$ o wadze $3+4+5+6+7=25$. Drzewo jest *piękne* ponieważ pozostałe krawędzie G mają wagi 1, 2 oraz 8, 9, 10, tak więc pierwsze dwie są mniejsze niż minimalna waga krawędzi drzewa (ta wynosi 3) a pozostałe są większe od maksymalnej wagi w drzewie (ta wynosi 7).