

Содержание

Содержание	1
Теоремы. Определения. Доказательства	2
Множества. Операции. (Лекция)	2
Натуральные числа. (Лекция)	2
Теоремы о натуральных числах (Лекция)	2
Комбинаторика (Лекция)	2
Бином Ньютона (Лекция)	2
Целые и рациональные числа (Лекция)	3
Целые	3
Рациональные	3
Иrrациональные и действительные числа (Лекция)	3
Иrrациональные	3
Действительные (вещественные)	4
Отображения (Лекция)	4
Аксиоматика \mathbb{R} (Лекция)	4
Расширенное множество действительных чисел	4
Модуль (Лекция)	4
Модуль	4
Функция знака	4
Промежутки числовой прямой (Лекция)	4
Отрезок	4
Интервал	5
Полуинтервал	5
Положительная и отрицательная полуоси	5
Окрестность	5
ε -окрестность	5
Проколотая ε -окрестность	5
Правая и левая ε -полуокрестности	5
Правая и левая проколотые ε -полуокрестности	5
ε -окрестности бесконечностей	6
Ограниченность (Лекция)	6
Ограниченнное снизу	6
Ограниченнное сверху	6
Критерий ограниченности	6
Точные грани	6
Вопросы	7

Теоремы. Определения. Доказательства

Множества. Операции. ([Лекция](#))

Определение. Набор неких элементов.

Натуральные числа. ([Лекция](#))

Определение. Числа, используемые для счета.

Теоремы о натуральных числах ([Лекция](#))

Теорема. (Основная теорема арифметики) У любого натурального числа (кроме единицы) найдется два набора различных простых чисел и их натуральных степеней, которые составляют его, при том единственным образом.

Теорема. (Теорема Евклида) Простых чисел бесконечно много.

Доказательство Теорема.

- Пусть простых чисел конечное число, N штук.
- Рассмотрим число $A = 1 + \prod_{1 \leq i \leq N} p_i$
- Тогда число A не делится ни на одно p_i (в результате для любого рассматриваемого простого будет 1)
- Значит A имеет простой делитель, который не входит в изначальное множество.
- Таким образом найдено $N + 1$ простое число

□

Комбинаторика ([Лекция](#))

Бином Ньютона ([Лекция](#))

Определение.

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

Доказательство Определение.

- База: если $n = 1$, то слева $(a + b)^1 = a + b$, а справа $\sum_{k=0}^1 C_1^k \cdot a^k \cdot b^{1-k} = 1 \cdot a^0 \cdot b + 1 \cdot a \cdot b^0 = a + b$ - формула верна.

...

□

Целые и рациональные числа ([Лекция](#))

Целые

Определение. $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ – натуральные, симметричные им отрицательные и 0.

Рациональные

Определение. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$

Теорема. Множество рациональных чисел полно, т.е. $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a < b \exists c \in \mathbb{Q} : a < c < b$

Доказательство Теоремы.

- Обозначим $a = \frac{p}{q}, b = \frac{m}{n}$, что допустимо, раз $a, b \in \mathbb{Q}$
- Из $a < b$ следует, что $\frac{p}{q} < \frac{m}{n}$ или $pn < mq$
- Рассмотрим $c = \frac{a+b}{2} = \frac{pn+mq}{2qn} : a = \frac{p}{q} = \frac{p2n}{q2n} = \frac{pn+pn}{2qn} < \frac{pn+mq}{2qn} = c = \frac{pn+mq}{2qn} < \frac{mq+mq}{2qn} = \frac{m}{n} = b$

□

Иrrациональные и действительные числа ([Лекция](#))

Иrrациональные

Определение. \mathbb{I}

Доказательство.

Докажем иррациональность $\sqrt{2}$ от противного

- Допустим $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, тогда $\exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \frac{m}{n}$ – несократимая дробь
- Раз $2n^2 = m^2$, то m - четное: $m = 2k$ (это следует из основной теоремы арифметики [Теорема](#))
- В таком случае $2n^2 = 4k^2, n^2 = 2m^2$ и n - четное число. Противоречие (несократимость)

□

Действительные (вещественные)

Определение. Совокупность всех рациональных и иррациональных чисел:

$$R = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Отображения ([Лекция](#))

Определение. Соответствие (правило) между двумя множествами, при котором каждому элементу первого множества (прообраз) соответствует не более одного элемента второго (образ).

Аксиоматика \mathbb{R} ([Лекция](#))

Расширенное множество действительных чисел

Определение. $\bar{\mathbb{R}} = R \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

Модуль ([Лекция](#))

Модуль

Определение. Неотрицательное число, которое отражает расстояние от числа до начала координат числовой прямой.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Функция знака

Определение.

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

Промежутки числовой прямой ([Лекция](#))

Отрезок

Определение. $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Интервал

Определение. $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Полуинтервал

Определение. $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ и $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

Положительная и отрицательная полуоси

Определение.

- $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
- $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$

Окрестность

Определение. Любой интервал $(b; c)$, содержащий точку $a : b \leq a \leq c$ Обозначают $O(a)$

ε -окрестность

Определение. Интервал с размером 2ε с центром в точке a . Обозначают $O_{\varepsilon}(a) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$

Проколотая ε -окрестность

Определение. Окрестность точки a без самой точки a . Обозначают $\dot{O}_{\varepsilon}(a) = (a - \varepsilon; a) \cup (a; a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \varepsilon\}$

Правая и левая ε -полуокрестности

Определение.

- $O_{\varepsilon}^+(a) = [a; a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x - a < \varepsilon\}$
- $O_{\varepsilon}^-(a) = (a - \varepsilon; a] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq a - x < \varepsilon\}$

Правая и левая проколотые ε -полуокрестности

Определение.

- $\dot{O}_{\varepsilon}^+(a) = (a; a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x - a < \varepsilon\}$
- $\dot{O}_{\varepsilon}^-(a) = (a - \varepsilon; a) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < a - x < \varepsilon\}$

ε -окрестности бесконечностей

Определение.

- $O_\varepsilon(+\infty) = \left[\frac{1}{\varepsilon}; +\infty \right) = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{\varepsilon} \right\}$
- $O_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty; -\frac{1}{\varepsilon} \right] = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \leq -\frac{1}{\varepsilon} \right\}$

Ограниченнность ([Лекция](#))

Ограниченнное снизу

Определение. $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X x \geq m$. Такое число m называют **нижней гранью** или **минорантой**.

Ограниченнное сверху

Определение. $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X x \leq M$. Такое число M называют **верхней гранью** или **мажорантой**.

Критерий ограниченности

Теорема.

$$\{X \text{ -- ограничено}\} \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in X |x| < c$$

Доказательство Теорема.

- *Необходимость:* рассмотрим ограниченное множество X , тогда оно ограничено снизу и сверху, т.е. из определений: $\exists m, M \in \mathbb{R} : \forall x \in X m \leq x \leq M$. Тогда положим $c = \max\{|m|; |M|\} : \forall x \in X -c = -\max\{|m|; |M|\} \leq x \leq M \leq \max\{|m|; |M|\} = c$.
- *Достаточность:* достаточно положить, что $m = -c, M = c$

□

Точные грани

Вопросы
