Содержание

Теоремы. Определения. Доказательства

Множества. Операции. (Лекция)

Определение. Набор неких элементов.

Натуральные числа. (Лекция)

Определение. Числа, используемые для счета.

Теоремы о натуральных числах (Лекция)

Теорема. (Основная теорема арифметики) У любого натурального числа (кроме единицы) найдется два набора различных простых чисел и их натуральных степеней, которые составляют его, при том единственным образом.

Теорема. (Теорема Евклида) Простых чисел бесконечно много.

Доказательство Теорема.

- Пусть простых чисел конечное число, N штук.
- Рассмотрим число $A = 1 + \prod_{1 \le i \le N} p_i$
- Тогда число А не делится ни на одно p_i (в результате для любого рассматриваемого простого будет 1)
- Значит А имеет простой делитель, который не входит в изначальное множество.
- Таким образом найдено N + 1 простое число

□

Комбинаторика (Лекция)

Бином Ньютона (Лекция)

Определение.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

Доказательство Определение.

- База: если $n = 1$, то слева $(a+b)^1 = a + b$, а справа $\sum_{k=0}^{1} C_1^k \cdot a^k \cdot b^{1-k} = 1 \cdot a^0 \cdot b + 1 \cdot a \cdot b^0 = a + b$ - формула верна.

... $\square$

Целые и рациональные числа (Лекция)

Целые

Определение. $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ – натуральные, симметричные им отрицательные и 0.

Рациональные

Определение. $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$

Теорема. Множество рациональных чисел полно, т.е. $\forall a, b \in \mathbb{Q}, a < b \ c \in \mathbb{Q} : a < c < b$

Доказательство Теорема.

- Обозначим $a = \frac{p}{q}, b = \frac{m}{n}$, что допустимо, раз $a, b \in \mathbb{Q}$
- Из $a < b$ следует, что $\frac{p}{q} < \frac{m}{n}$ или $pn < mq$
- Рассмотрим $c = \frac{a+b}{2} = \frac{pn+mq}{2qn} : a = \frac{p}{q} = \frac{p2n}{q2n} = \frac{pn+pn}{2qn} < \frac{pn+mq}{2qn} = c = \frac{pn+mq}{2qn} < \frac{mq+mq}{2qn} = \frac{m}{n} = b$

$\square$

Иррациональные и действительные числа (Лекция)

Иррациональные

Определение. $\mathbb{I}$

Доказательство.

Докажем иррациональность $\sqrt{2}$ от противного

- Допустим $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, тогда $\exists m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} : \sqrt{2} = \frac{m}{n}$ – несократимая дробь
- Раз $2n^2 = m^2$, то m - четное: $m = 2k$ (это следует из основной теоремы арифметики Теорема)
- В таком случае $2n^2 = 4k^2, n^2 = 2m^2$ и n - четное число. Противоречие (несократимость)

$\square$

Действительные (вещественные)

Определение. Совокупность всех рациональных и иррациональных чисел: $R = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

Отображения (Лекция)

Определение. Соответствие (правило) между двумя множествами, при котором каждому элементу первого множества (прообраз) соотвествует не более одного элемента второго (образ).

Аксиоматика $\mathbb{R}$ (Лекция)

Расширенное множество действительных чисел

Определение. $\overline{\mathbb{R}} = R \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

Модуль (Лекция)

Модуль

Определение. Неотрицательное число, которое отражает расстояние от числа до начала координат числовой прямой.

$$|x| = \begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0. \end{cases}$$

Функция знака

Определение.

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, x > 0 \\ 0, x = 0 \\ -1, x < 0 \end{cases}$$

Промежутки числовой прямой (Лекция)

Отрезок

Определение. $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

Интервал

Определение. $(a;b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

Полуинтервал

Определение. $(a;b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ и $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

Положительная и отрицательная полуоси

Определение.
- $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$
- $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$

Окрестность

Определение. Любой интервал $(b;c)$, содержащий точку $a : b \leq a \leq c$ Обозначают $O(a)$

ε-окрестность

Определение. Интервал с размером 2ε с центром в точке a. Обозначают $O_{\varepsilon(a)} = (a - \varepsilon; a + \varepsilon = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\})$

Проколотая ε-окрестность

Определение. Окрестность точки a без самой точки a. Обозначают $\dot{O}_{\varepsilon(a)} = (a - \varepsilon; a) \cup (a; a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \varepsilon\}$

Правая и левая ε-полуокрестности

Определение.
- $O_\varepsilon^+(a) = [a; a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x - a < \varepsilon\}$
- $O_\varepsilon^-(a) = (a - \varepsilon; a] = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq a - x < \varepsilon\}$

Правая и левая проколотые ε-полуокрестности

Определение.
- $\dot{O}_\varepsilon^+(a) = (a; a + \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x - a < \varepsilon\}$
- $\dot{O}_\varepsilon^-(a) = (a - \varepsilon; a) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < a - x < \varepsilon\}$

ε-окрестности бесконечностей

Определение.
- $O_\varepsilon(+\infty) = \left[\frac{1}{\varepsilon}; +\infty\right) = \left\{x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{1}{\varepsilon}\right\}$
- $O_\varepsilon(-\infty) = \left(-\infty; -\frac{1}{\varepsilon}\right] = \left\{x \in \mathbb{R} : x \leq -\frac{1}{\varepsilon}\right\}$

Ограниченность (Лекция)

Ограниченное снизу

Определение. $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \ x \geq m$. Такое число m называют **нижней гранью** или **минорантой**.

Ограниченное сверху

Определение. $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{X} \ x \leq M$. Такое число M называют **верхней гранью** или **мажорантой**.

Критерий ограниченности

Теорема.

$$\{X - \text{ограничено}\} \Leftrightarrow \exists c \in R^+ : \forall x \in X \quad |x| < c$$

Доказательство Теорема.
- *Необходимость*: рассмотрим ограниченное множество X, тогда оно ограничено снизу и сверху, т.е. из определений: $\exists m, M \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{X} \ m \leq x \leq M$. Тогда положим $c = \max\{|m|; |M|\} : \forall x \in \mathbb{X} - c = -\max\{|m|; |M|\} \leq x \leq M \leq \max\{|m|; |M|\} = c$.
- *Достаточность*: достаточно положить, что $m = -c, M = c$

□

Точные грани (Лекция)

Инфимум (наибольшая из минорант)

Определение.
- $\forall x \in X \ m \leq x$
- $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x` \in X \ m + \varepsilon > x`$

Супремум (наименьшая из мажорант)

Определение.
- $\forall x \in X \ x \leq M$
- $\forall \varepsilon > 0 \ x` \in X \ x` > M - \varepsilon$

Теорема о единственности точных граней

Теорема. (Теорема о единственности точных граней) Числовое множество не может иметь более одной точной верхней (нижней) грани.

Доказательство Теорема.
Для супремума:
- Рассмотрим $X \subseteq \mathbb{R}, x \neq \emptyset$
- Допустим $\exists b < b`: \sup X = b, \sup X = b`$. Тогда $\forall x \in X \ x \leq b, x \leq b`$, но $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x, x` \in X : x > b - \varepsilon, x` > b` - \varepsilon$
- Рассмотрим $\varepsilon = b` - b$. Раз $\exists x \in X : x > b - \varepsilon = b`$, противоречие

Для инфимума:
- TODO

□

Теорема о существовании точных граней

Теорема. (Теорема о существовании точных граней) Всякое непустое ограниченно сверху (снизу) числовое множество имеет точную верхнюю (нижнюю) грань.

Доказательство Теорема.
Для супремума:
- Рассмотрим $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset$
- Рассмотрим множество его верхних граней $V : \forall v \in V, \forall x \in X \ x \leq v$
- В силу аксиомы непрерывности, $\exists c \in \mathbb{R} : \forall x \in X, \forall v \in V \ x \leq c \leq v$. Осталось доказать, что $\sup X = c$
- По определению супремума требуется 2 условия, первое уже выполнено ($\forall x \in X \ x \leq c$). Теперь убедимся, что $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x` \in X : x` > c - \varepsilon = c`$. Утвердим, что $c`$ - не верхняя грань, т.е. $c` \notin V$, т.к $c` = c - \varepsilon < c$, но ранее утвердили, что $\forall v \in V c \leq v$

Для инфимума:

- TODO

∎

Теорема Кантора (Лекция)

Система вложенных отрезков

Определение. Набор отрезков, каждый из которых содержится внутри предыдущего.

$$\{[a_n; b_n]\}^{+}_{n=1}\infty = \{[a_1; b_1], [a_2, b_2], ... : \forall n \in \mathbb{N} [a_{n+1}; b_{n+1}] \subseteq [a_n; b_n]\}$$

Теорема Кантора о системе вложенных отрезков

Теорема. (Теорема Кантора о системе вложенных отрезков) В любой системе вложенных отрезков найдется точка, принадлежащая всем отрезкам системы.

Доказательство Теорема.

- Рассмотрим множества левых и правых концов системы: Пусть $A = \{a_1, a_2, ...\}, B = \{b_1, b_2, ...\}$
- $A, B \neq \emptyset$ и $\forall n, m \in \mathbb{N}\ a_n \leq a_{n+m} < b_{n+m} \leq b_m$. Тогда, в силу аксиомы непрерывности, $\exists \varepsilon \in \mathbb{R} : a_n \leq \varepsilon \leq b_m$
- В силу произвольного выбора n и m, положим n = m, тогда $\varepsilon \in [a_n; b_n]\ \forall n \in \mathbb{N}$

∎

Стягивающаяся система вложенных отрезков

Определение. Если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : b_N - a_N < \varepsilon$

Теорема Кантора о системе стягивающихся отрезков

Теорема. (Теорема Кантора о системе стягивающихся отрезков) Стягивающаяся система вложенных отрезков имеет ровно одну точку ε, принадлежащую всем отрезкам, причем $\xi = \sup\limits_{\forall n \in \mathbb{N}} \{a_n\} = \inf\limits_{\forall n \in \mathbb{N}} \{b_n\}$

Доказательство Теорема.

Доказательство единственности:

- Существование точки доказано ранее, покажем единственность
- Допустим обратное: пусть $\exists \xi_1 \neq \xi_2 : \xi_1, \xi_2 \in [a_n; b_n] \forall n \in \mathbb{N}$. Тогда $0 < |\xi_1 - \xi_2| \leq b_n - a_n$

- Из определения $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ b_n - a_n < \varepsilon$, то $|\xi_1 - \xi_2| \leq b_n - a_n < \varepsilon$
- В силу произвольного выбора ε, рассмотрим $\varepsilon = \frac{|\xi_1 - \xi_2|}{2}$, тогда $|\xi_1 - \xi_2| < \frac{|\xi_1 - \xi_2|}{2}$

Доказательство $\xi = \sup\limits_{\forall n \in \mathbb{N}} \{a_n\} = \inf\limits_{\forall n \in \mathbb{N}} \{b_n\}$:

- Из определения вложенных отрезков $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq b_n$
- По теореме Кантора всегда найдется точка $\xi : \forall n \in \mathbb{N} a_n \leq \xi \leq b_n$
- Значит, ξ мажорирует множество $\{a_n\}$ и минорирует множество $\{b_n\} : \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq \sup\limits_{\forall n \in \mathbb{N}} \{a_n\} \leq \xi \leq \inf\limits_{\forall n \in \mathbb{N}} \{b_n\} \leq b_n$
- Допустим, $\exists \eta = \sup\limits_{\forall n \in \mathbb{N}} \{a_n\} \neq \mu = \inf\limits_{\forall n \in \mathbb{N}} \{b_n\}$
- Тогда $\forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leq \eta \leq b_n$ и $a_n \leq \mu \leq b_n$ - нашлось две точки, принадлежащих всем отрезкам системы

$\square$

Числовая последовательность (Лекция)

Определение. Функция $a_n = a(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, обозначают $\{a_n\}_{n=1}^{+}\infty$ или просто $\{a_n\}$.

Монотонность (Лекция)

Сходимость (Лекция)

Определение. Число $A \in \mathbb{R}$ назовем **конечным пределом** последовательности $\{a_n\}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ \ |a_n - A| < \varepsilon$. Обозначают $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n) = A$ или $a_n \underset{n \to +\infty}{\to} A$

Говорят, что такая последовательность сходится к A или просто называют ее **сходящейся**. A - обязательно число.

На языке окрестностей: $\exists A \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ a_n \in O_\varepsilon(A)$

Необходимое условие сходимости (Лекция)

Теорема. (Необходимое условие сходимости) Сходящаяся последовательность ограничена: $\left\{\exists A \in \mathbb{R} : \lim\limits_{n \to +\infty} (a_n) = A\right\} \Rightarrow \{\exists C \in \mathbb{R}^+ : \forall n \in \mathbb{N}\ \ |a_n| \leq C\}$

Обратное неверно

Доказательство *Теорема*.

- Из определения $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad |a_n - A| < \varepsilon$
- Значит для $\varepsilon = 1\ \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 \quad |a_n - A| < 1$
- Рассмотрим $\quad |a_n| = |a_n - A + A| \leq |a_n - A| + |A| < 1 + |A| \to N_1 \ |a_n| < 1 + |A|$
- Пусть $C = \max\{|a_1|, |a_2|, ..., |a_{N_1 - 1}|, 1 + |A|\}$, тогда $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| \leq C$

□

Лемма. (О необходимом условии сходимости)

$$\left\{\exists A \in \mathbb{R} : \lim_{n\to+\infty}(a_n) = A\right\} \Rightarrow \left\{\lim_{n\to+\infty}(a_n - a_{n+1}) = 0\right\}$$

Доказательство *Лемма*.

- Из определения $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad |a_n - A| < \varepsilon$
- Рассмотрим $\quad |a_n - a_{n+1}| = |a_n - A + A - a_{n+1}| \overset{\text{н-во } \triangle}{\leq} |a_n - A| + |a_{n+1} - A| < 2\varepsilon$
- Тогда $\forall \varepsilon` > 0\ \exists N` = N(\grave{\varepsilon}_2) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N` \ |a_n - a_{n+1} - 0| < \varepsilon`$

□

Единственность предела (Лекция)

Теорема. (Теорема о единственности предела) Последовательность не может иметь более одного предела.

Доказательство *Теорема*.

- Пусть $\exists A_1 < A_2 \in \mathbb{R} : A_1 = \lim_{n\to+\infty} a_n, A_2 = \lim_{n\to+\infty} a_n$
- Выберем ε так, чтобы окрестности не пересекались, например, $\varepsilon = \frac{A_2 - A_1}{3}$, то $O_\varepsilon A_1 \cap O_\varepsilon A_2 = \emptyset$
- Из определения $\exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 \quad |a_n - A_1| < \varepsilon$ и $\exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_2 \quad |a_n - A_2| < \varepsilon$
- Рассмотрим $N_m = \max\{N_1, N_2\}$, тогда одновременно $\forall n \geq N_m$ одновременно $a_n \in O_\varepsilon A_1$ и $a_n \in O_\varepsilon A_2$, но по построению они не пересекаются.

□

Теоремы об арифметике в пределах (Лекция)

Теорема. (Теорема о линейных комбинациях в пределах)
Пусть $\{a_n\}, \{b_n\} : \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A, \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = B; A, B \in \mathbb{R}$, тогда

1. $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} (c \cdot a_n), \forall c \in \mathbb{R}$ и он равен $c \cdot A$
2. $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} (a_n + b_n)$ и он равен $A + B$
3. $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} (a_n \cdot b_n)$ и он равен $A \cdot B$
4. если $\forall n \in \mathbb{N}\ b_n \neq 0$ и $B \neq 0$, то $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$ и он равен $\frac{A}{B}$

Доказательство *Теорема*.

1. $\exists \lim\limits_{n\to+\infty} (c \cdot a_n) = c \cdot A, \forall c \in \mathbb{R}$
   - Требуется $\forall \varepsilon > 0$ назвать $N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \quad |(c \cdot a_n) - c \cdot A| < \varepsilon$
   - $\forall c \neq 0 \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A \Rightarrow \forall \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{|c|} > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_1 \quad |a_n - A| < \varepsilon_1$
   - $\forall \varepsilon > 0\ \exists N = N_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N\ |(c \cdot a_n) - c \cdot A| = |c \cdot (a_n - A)| = |c| \cdot |a_n - A| < |c| \cdot \varepsilon_1$, чтд

$\square$

Вопросы