Стационарная задача теплопроводности в балке

Рассмотрим задачу о нагревании балки квадратного сечения, бесконечной по одной оси координат. Пусть температура граней поддерживается постоянной: 1, 2, 3 и 4 соответственно на различных гранях, если смотреть против часовой стрелки (температура приведена в относительных единицах, $T_* = 100C^o$). Получим численное решение стационарного уравнения теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \\ u(0,y) = 1, \qquad u(1,y) = 3 \\ u(x,0) = 4 \qquad u(x,1) = 2 \end{cases}$$

с помощью различных числовых схем и исследуем их на устойчивость по начальным данным.

Итерационный метод Якоби

Используем числовую схему

$$\frac{u^i_{m+1,l} - 2u^{i+1}_{m,l} + u^i_{m-1,l}}{h_x^2} + \frac{u^i_{m,l+1} - 2u^{i+1}_{m,l} + u^i_{m,l-1}}{h_y^2} = 0.$$

Чтобы избежать проблемы с маленькими числами при вычислении, удобнее взять $h_x = h_y = h$ (так же и для метода Зейделя), тогда схему удобнее переписать в виде

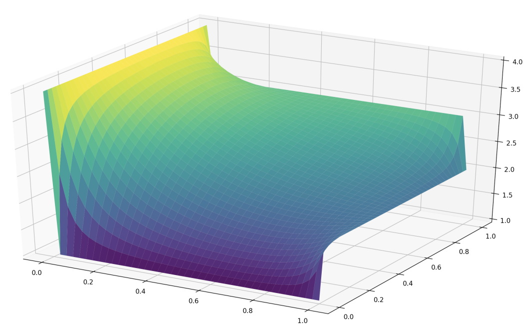
$$u^{i+1}_{m,l} = \frac{u^i_{m+1,l} + u^i_{m-1,l} + u^i_{m,l+1} + u^i_{m,l-1}}{4}$$

Вычисления были проведены для набора различных значений шагов сетки и количества итераций для двух начальных приближений (одно $u_{m,l} = 0$, другое $u_{ml} = 10$, с учетом граничных условий). Результаты представлены в таблице 1, в качестве характеристики устойчивости Δ использовалась норма сеточной функции для разности решений.

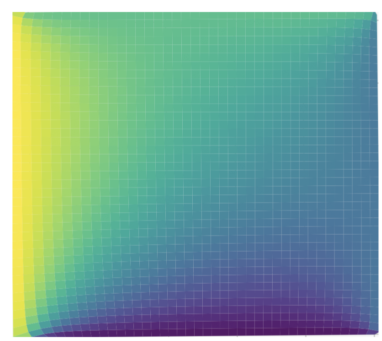
Таблица 1: Метод Якоби

h	Количество итераций	Δ
0.1	800	$5 \cdot 10^{-15}$
0.05	1000	$7 \cdot 10^{-5}$
0.025	1000	0.7
0.025	3000	0.002
0.01	1000	9
0.01	2000	6
0.01	4000	2.3

Из таблицы видно, что метод устойчив при $h \to 0$, хоть и медленно сходится при малых значениях шага. Из устойчивости и аппроксимации метода следует его сходимость к точному решению. Оптимальной для визуализации, с учетом комбинации величины шага и степени устойчивости, является схема с количеством итераций 3000 и $h = 0.025$.



3D график сеточной функции



изолинии температуры

Рис. 1: Метод Якоби, h = 0.025

Метод Зейделя

С учетом $h_x = h_y = h$ схему удобно записать в виде

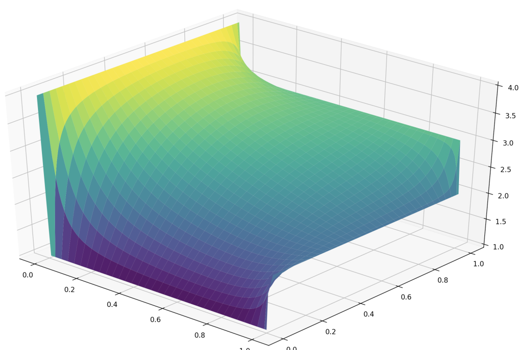
$$u^{i+1}_{m,l} = \frac{u^{i}_{m+1,l} + u^{i+1}_{m-1,l} + u^{i}_{m,l+1} + u^{i+1}_{m,l-1}}{4}$$

Расчет с учетом неявности схемы проводился послойно по m для различных значений шага и количества итераций, результаты приведены в таблице 2.

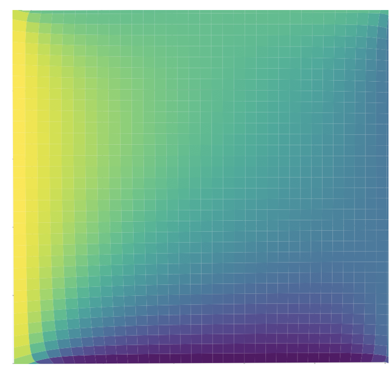
Таблица 2: Метод Зейделя

h	Количество итераций	Δ
0.1	800	$5 \cdot 10^{-15}$
0.05	1000	$3 \cdot 10^{-10}$
0.025	800	0.12
0.025	2000	$7 \cdot 10^{-5}$
0.025	3000	$1.5 \cdot 10^{-7}$
0.01	1000	6
0.01	2000	2.25
0.01	3000	0.8
0.01	4000	0.3

Из таблицы видно, что метод устойчив при $h \to 0$. При малых значениях шага сходится хоть и быстрее, чем метод Якоби, но все еще требует большое количество итераций. Из устойчивости и аппроксимации метода следует его сходимость к точному решению. Для визуализации был выбран результат с 4000 итераций и $h = 0.01$.



3D график сеточной функции



изолинии температуры

Рис. 2: Метод Зейделя, h = 0.01

Метод верхней релаксации

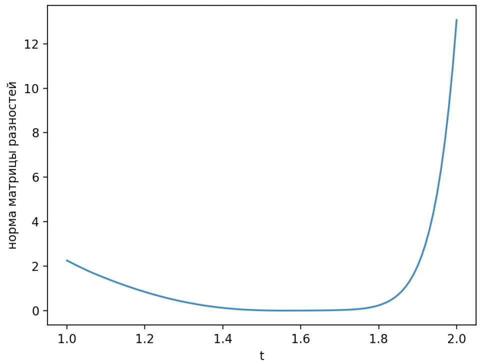
Запишем схему метода верхней релаксации в удобной для расчетов форме:

$$u^{i+1}_{m,l} = t\frac{u^{i}_{m+1,l} + u^{i+1}_{m-1,l} + u^{i}_{m,l+1} + u^{i+1}_{m,l-1} + (1 - \frac{1}{t})u^{i}_{m,l}}{4}$$

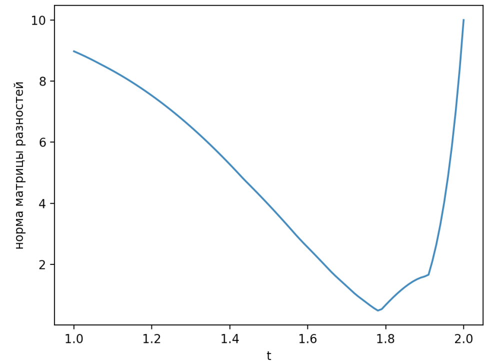
Оптимальный параметр t для расчетов подбирается эмпирически, исходя из графиков зависимости нормы разности двух решений с различными начальными условиями от t (сравнение проводилось при 20 итерациях). Графики и выбранное оптимальное значение t представлены ниже.

Таблица 3: Метод верхней релаксации, t(h)

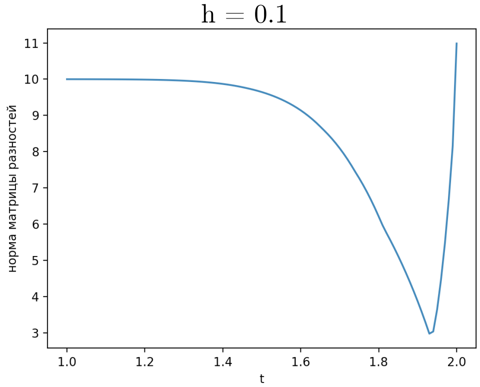
h	t
0.1	1.6
0.05	1.79
0.025	1.93
0.01	1.97



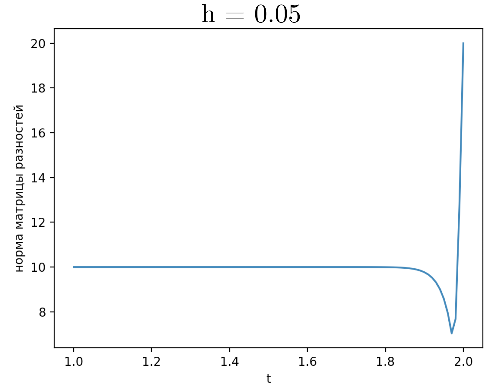
h = 0.1



h = 0.05



h = 0.025



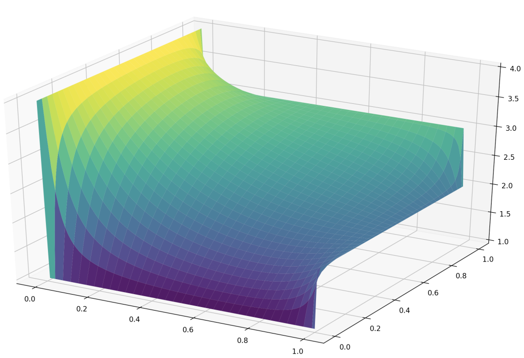
h = 0.01

Рис. 3: зависимость нормы разности двух решений с различными начальными условиями от t

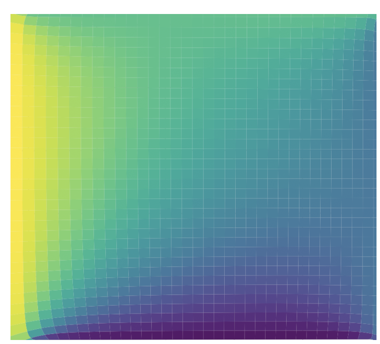
Таблица 4: Метод верхней релаксации

h	Количество итераций	Δ
0.1	100	$8 \cdot 10^{-15}$
0.1	800	$5 \cdot 10^{-15}$
0.05	100	$4 \cdot 10^{-8}$
0.05	800	$2.5 \cdot 10^{-14}$
0.025	100	0.26
0.025	800	10^{-13}
0.01	800	$4.4 \cdot 10^{-8}$
0.01	2000	$4 \cdot 10^{-13}$

При значениях параметра из таблицы 3 были проведены вычисления для различных шагов сетки и количества итераций, данные занесены в таблицу 4. Из таблицы видно, что метод устойчив при $h \to 0$ и сходится гораздо быстрее чем предыдущие методы. Для визуализации было выбрано решение с $h = 0.01$ и 2000 итераций.



3D график сеточной функции



изолинии температуры

Рис. 4: Метод верхней релаксации, h = 0.01

Итоги

Была численно решена стационарная задачу теплопроводности в квадратной балке с помощью итерационных методов Якоби, Зейделя и верхней релаксации. Наибольшей из наблюдаемых скоростью сходимости обладает метод верхней релаксации. Метод Зейделя хоть и сходится немного быстрее метода Якоби, при малых шагах сетки получение хорошей сходимости требует слишком большого количества итераций. Такая картина соотвествует теоретическим значениям скорости сходимости используемых методов. Для всех методов наблюдалась устойчивость по нулевому приближению при устремлении шага сетки к нулю, следственно можно сделать вывод о наличии сходимости. Численное исследование зависимости скорости сходимости метода верхней релаксации от итерационного параметра t позволила получить оптимальное значение t для всех требуемых шагов сетки. Результаты вычислений в графическом виде предоставлены в самой работе, но рекомендуется посмотреть их с помощью программы, проводящей вычисления (там можно крутить картинку).