

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого  
Институт прикладной математики и механики  
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

# Методы решения нелинейных задач

Отчёт по лабораторной работе №4  
"ДВУСТОРОННИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ  
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ"

**Работу**  
**выполнила:**  
студентка I курса  
магистратуры  
Добрецова Е.В.  
Группа:  
5040102/40101  
**Преподаватель:**  
Фролов М.Е.

Санкт-Петербург  
2024

# 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу

$$u = Au + f,$$

где матрица  $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$  удовлетворяет условиям, гарантирующим сходимость итерационного процесса:

$$u_{i+1} = Au_i + f.$$

Необходимо получить двусторонние оценки точного решения, выполняющиеся покомпонентно, для матрицы с нормой, равной 0.5, затем для матрицы с нормой, близкой к 1. Построить графики зависимости погрешности от номера итерации и графики покомпонентной сходимости для обеих матриц. В качестве нормы матрицы выбирается бесконечная норма.

## 2. Цель работы

Рассмотрев случаи, когда норма матрицы  $A$  намного меньше единицы и когда она близка к единице, изучить сходимость двусторонних оценок точного решения друг к другу.

## 3. Алгоритм получения двусторонних оценок

Представим матрицу  $A$  в виде

$$A = A^+ - A^-,$$

где коэффициенты  $A^+$  и  $A^-$  неотрицательны.

Выберем начальные приближения  $u_0^-$  и  $u_0^+$  так, чтобы они покомпонентно оценивали точное решение снизу и сверху. Последующие приближения будем вычислять по формулам

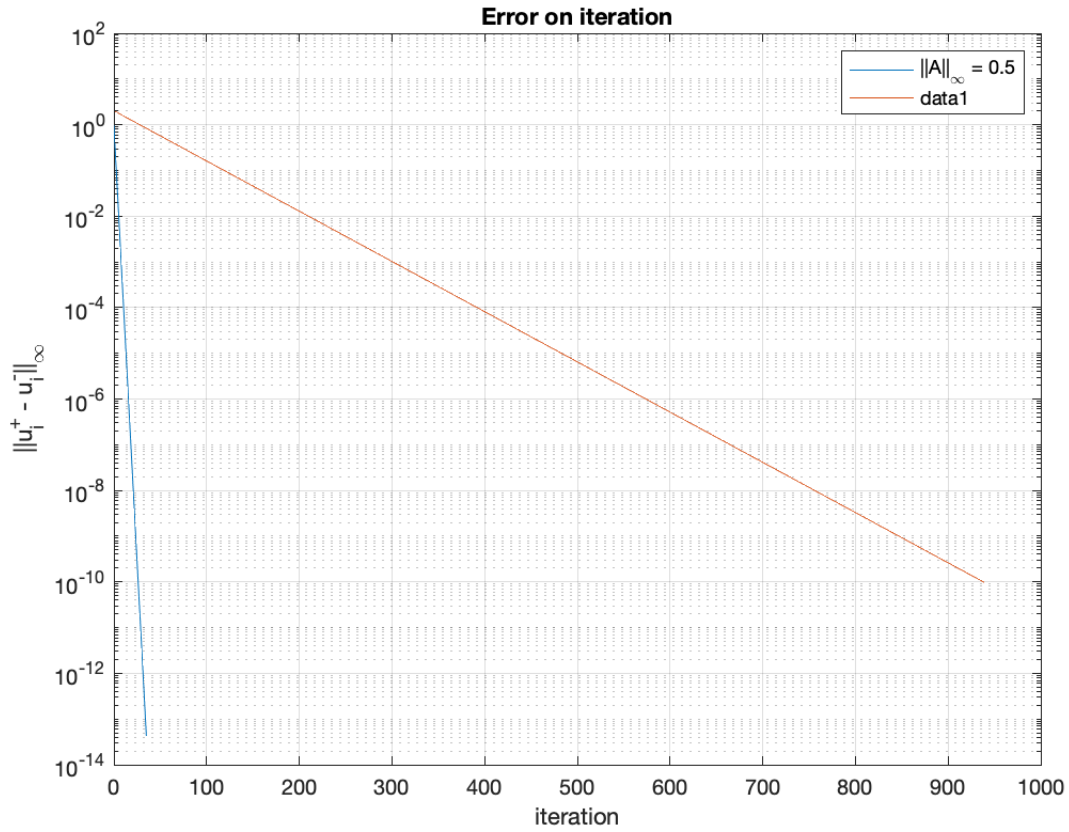
$$u_{i+1}^- = A^+ u_i^- - A^- u_i^+ + f;$$

$$u_{i+1}^+ = A^+ u_i^+ - A^- u_i^- + f.$$

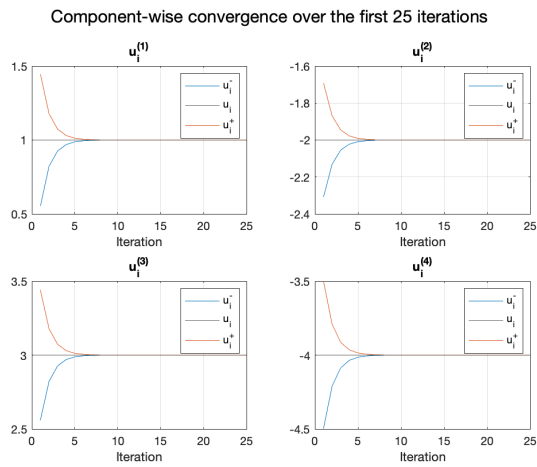
Условие выхода из цикла: значение нормы разности верхней и нижней оценки становится меньше заданного  $\varepsilon$ .

## 4. Результаты

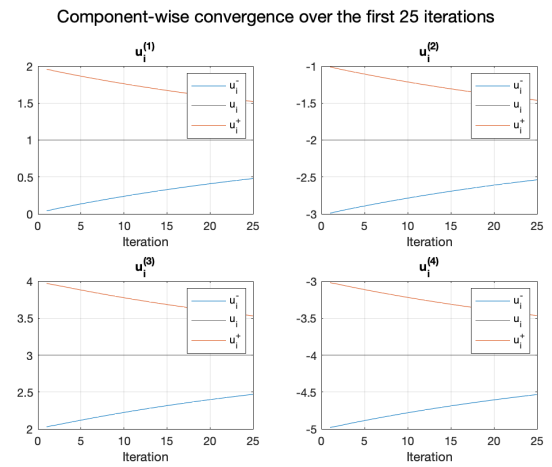
Расчеты и построение графиков проводились на языке программирования MATLAB. График зависимости погрешности от номера итерации:



Графики покомпонентной сходимости:



(a)  $\|A\|_\infty = 0.5$



(b)  $\|A\|_\infty = 0.99$

## 5. Анализ результатов

По графикам видно, что при норме матрицы, близкой к единице, получение оценок требует значительно большего числа итераций. Это связано с тем, что разница между верхней и нижней оценками с каждой следующей итерацией уменьшается пропорционально норме матрицы СЛАУ  $A$ .

## 6. Выводы

В ходе выполнения данной работы были получены двусторонние оценки точного решения, выполняющиеся покомпонентно, для двух матриц: с нормой, равной 0.5, и с нормой, близкой к 1. Были построены графики зависимости погрешности от номера итерации и графики покомпонентной сходимости для обеих матриц. Анализ сходимости подтвердил, что согласно предположению, при норме матрицы, близкой к 1, получение двусторонних оценок с заданной точностью требует значительно большего числа итераций.