Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Методы решения нелинейных задач

Отчёт по лабораторной работе №5
"ДВУСТОРОННИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ"

Работу выполнила:
студентка I курса магистратуры
Добрецова Е.В.
Группа:
5040102/40101
Преподаватель:
Фролов М.Е.

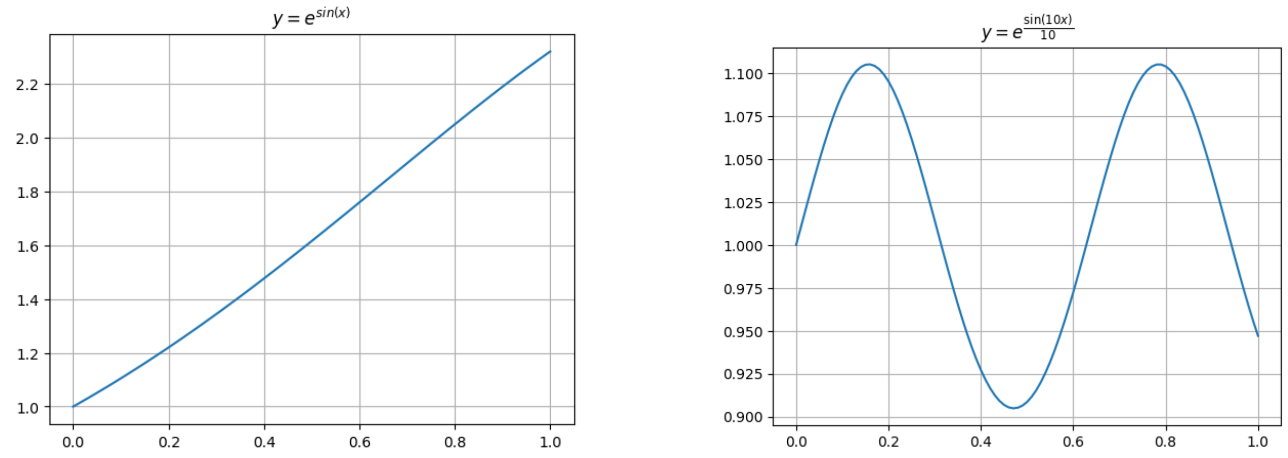
Санкт-Петербург
2025

1. Постановка задачи

Необходимо на основе метода Рунге-Кутты построить двусторонние оценки решения следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} y'(x) = ycos(tx) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Точным решением этой задачи является функция $y(x) = e^{\frac{sin(tx)}{t}}$.



(a) $t = 1$ (b) $t = 10$

Рисунок 1.1. Точное решение задачи Коши при различных значениях параметра

2. Цель работы

Требуется на примере данной задачи исследовать эффективность двустороннего метода и сравнить его с методом Эйлера. Сравнение методоы нужно провести при различных значениях параметра t, рассмотрев сетки с шагом $h = 0.01$, $h = 0.005$ и $h = 0.0025$.

3. Алгоритмы методов

Поставлена задача Коши:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

Необходимо вычислить значения функции y на множестве узлов $\{x_i\}_{i=0}^{n}$, где $x_0 = a$, $x_n = b$ и $x_i < x_{i+1}$. В данной лабораторной работе рассматриваются вычислительные схемы, относящиеся к группе методов Рунге-Кутты. Они основаны на использовании для перехода от узла x_i к узлу x_{i+1} определенного количества слагаемых из разложения функции y в ряд Тейлора:

$$y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \frac{h^3}{6}y'''(x) + \dots,$$

где $x = x_i$, $h = x_{i+1} - x_i$.

3.1. Метод Эйлера

Метод Эйлера является простейшим из группы методов Рунге-Кутты. Его вычислительная схема выглядит следующим образом:

$$y(x+h) \approx y(x) + hf(x,y)$$

3.2. Двусторонний метод Рунге-Кутты

Двусторонний метод использует две независимые аппроксимации решения с различными коэффициентами, что позволяет получить верхнюю и нижнюю границы для значения $y(x)$ на каждом шаге.
Первый шаг метода: двусторонние оценки для x_1.
Вычислим три промежуточных значения:

$$K_1 = f(x,y)$$

$$K_2 = f(x + h\alpha_2, y + h\beta_{21}K_1)$$
$$K_3 = f(x + h\alpha_3, y + h(\beta_{31}K_1 + \beta_{32}K_2)),$$

где α_2, α_3, β_{21}, β_{31}, β_{32} - коэффициенты метода, обеспечивающие его порядок точности.
На основе этих значений строятся две различные оценки для $y(x_1) = y(x_0 + h)$:

$$y^{(1)}(x+h) = y(x) + h(p_1K_1 + p_2K_2 + p_3K_3)$$

$$y^{(2)}(x+h) = y(x) + h(\tilde{p}_1K_1 + \tilde{p}_2K_2 + \tilde{p}_3K_3)$$

Коэффициенты p_1, p_2, p_3 и $\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \tilde{p}_3$ подобраны так, чтобы одна из формул переоценивала точное решение, а другая - недооценивала его.
В результате на первом узле x_1 получаем две границы для точного значения:

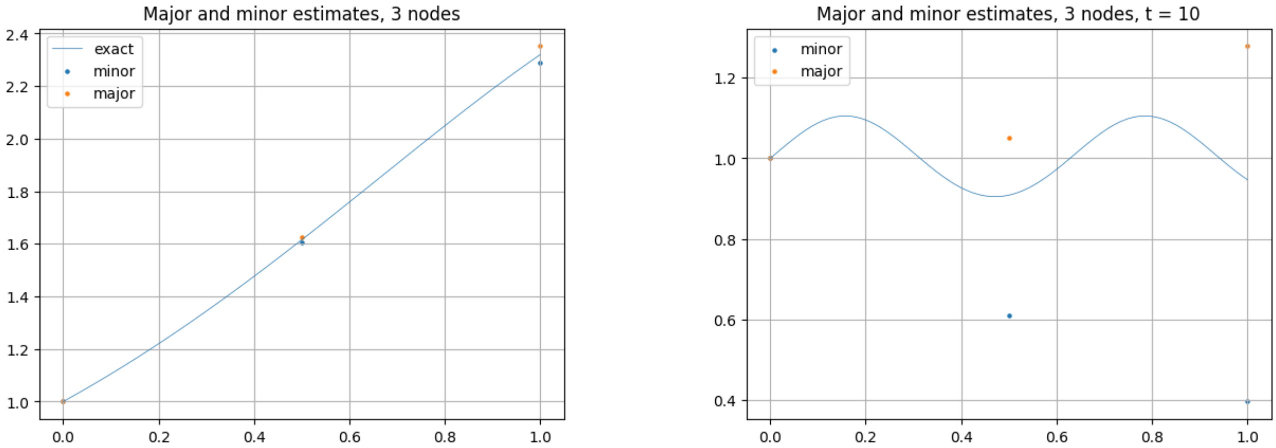
$$min(y^{(1)}, y^{(2)}) \leqslant y(x_1) \leqslant max(y^{(1)}, y^{(2)})$$

Таким образом, на первом узле мы получаем 2 приближённых значения.
Построение двусторонней оценки на i-м узле
На каждом шаге строятся два новых значения на основе каждого из полученных на предыдущем шаге. Таким образом, на каждом следующем шаге количество аппроксимаций удваивается, следовательно, на i-м узле получается 2^i значений. Среди них выбираются максимальное и минимальное. Эти границы обеспечивают интервал, в который попадёт точка решения.

4. Результаты

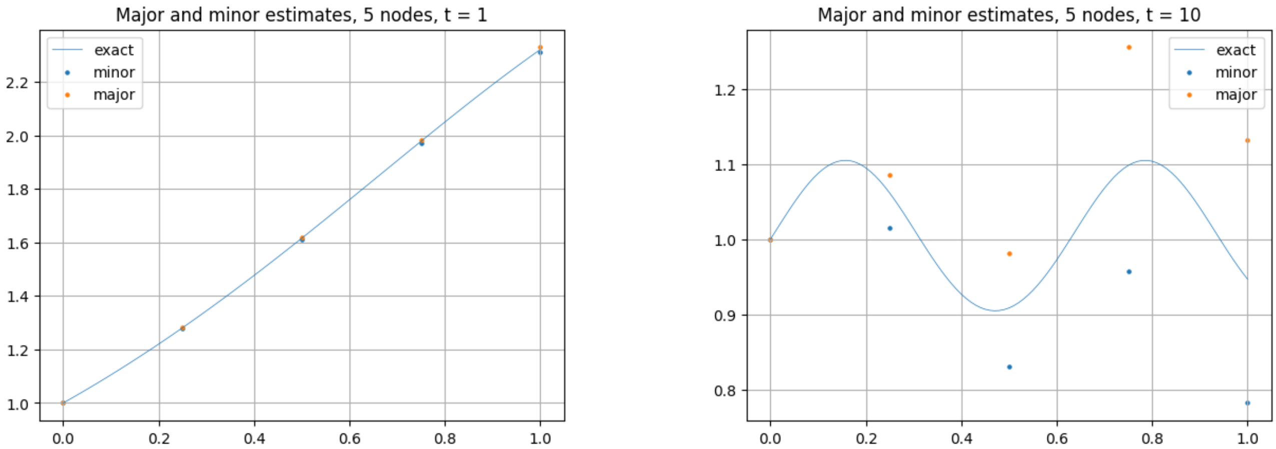
4.1. Визуализация двусторонних оценок

Построим графики решения ДУ двусторонним методом Рунге-Кутты. Для наглядности выберем малое число узлов.



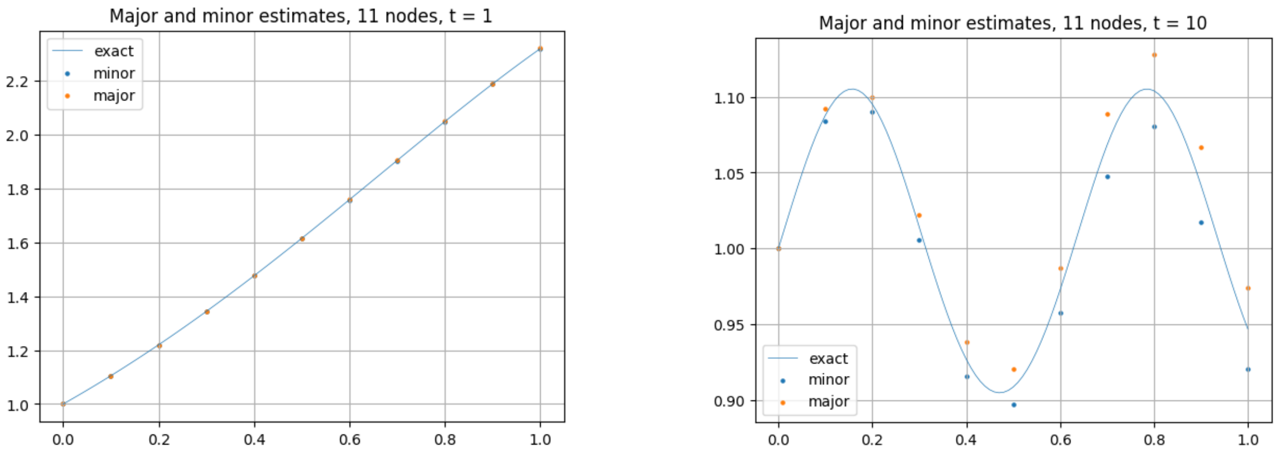
(a) $t = 1$ (b) $t = 10$

Рисунок 4.1. Двусторонние оценки при 5 узлах и различных значениях параметра



(a) $t = 1$ (b) $t = 10$

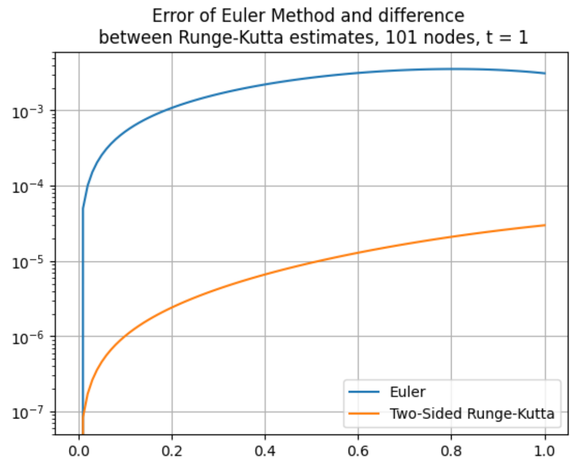
Рисунок 4.2. Двусторонние оценки при 5 узлах и различных значениях параметра



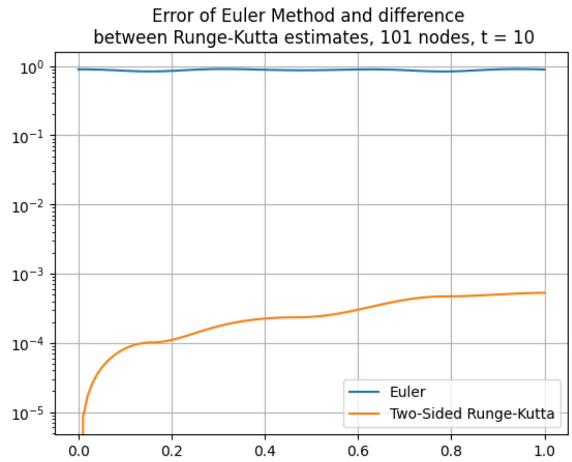
(a) $t = 1$ (b) $t = 10$

Рисунок 4.3. Двусторонние оценки при 11 узлах и различных значениях параметра

4.2. Сравнение погрешностей метода Эйлера и двустороннего метода Рунге-Кутты

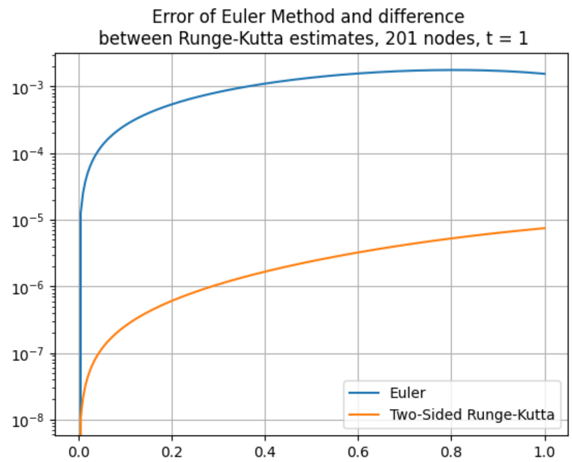


(a) $t = 1$

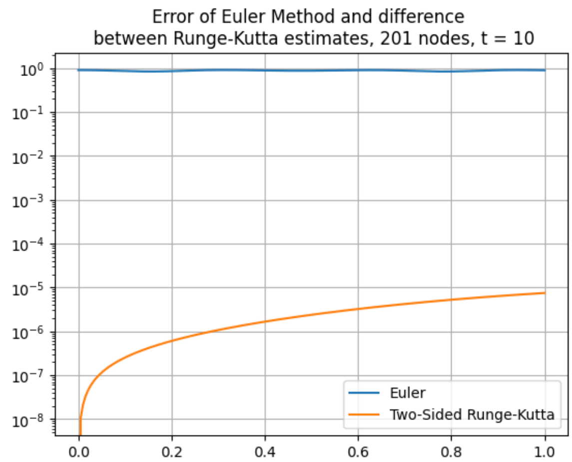


(b) $t = 10$

Рисунок 4.4. Двусторонние оценки при 101 узлах и различных значениях параметра

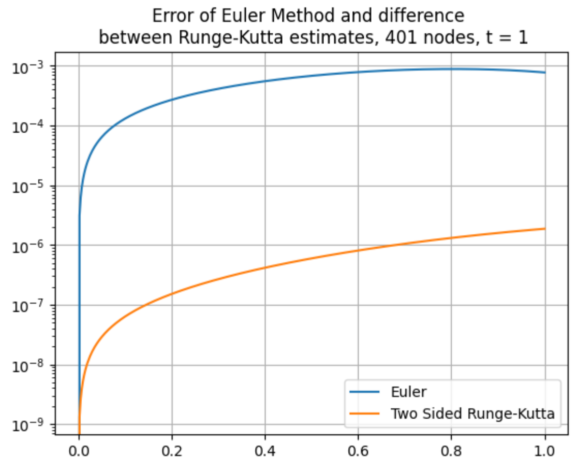


(a) $t = 1$

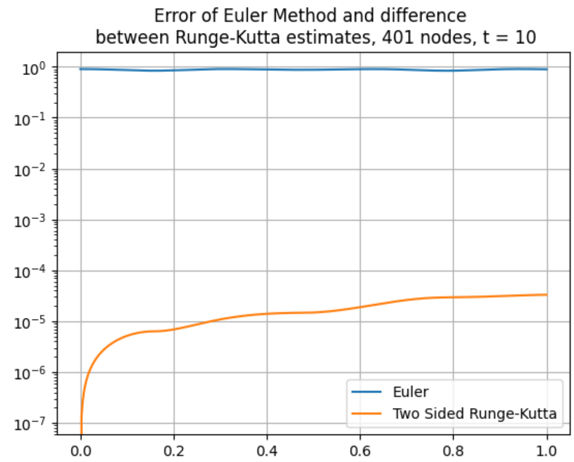


(b) $t = 10$

Рисунок 4.5. Двусторонние оценки при 201 узлах и различных значениях параметра



(a) $t = 1$



(b) $t = 10$

Рисунок 4.6. Двусторонние оценки при 401 узлах и различных значениях параметра

5. Выводы

В ходе выполнения работы был реализован алгоритм двустороннего метода Рунге-Кутты, проведено исследование его эффективности и выполнено сравнение с методом Эйлера на примере двух задач Коши с известным точным решением.

Анализ результатов показал, что метод Рунге-Кутты значительно превосходит метод Эйлера по точности. В случае задачи, точное решение которой имеет производную одного знака на заданном отрезке, преимущество двустороннего метода выражается в разнице порядка 2–3 десятичных разрядов. Однако при решении задачи, в которой производная изменяет знак, двусторонний метод Рунге-Кутты демонстрирует явное превосходство: метод Эйлера оказывается практически неприменим из-за высокой ошибки, в то время как метод Рунге-Кутты остаётся работоспособным и даёт значительно более точные результаты. При этом наблюдается небольшое снижение точности по сравнению с задачей, где производная не меняет знак.

Основным недостатком двустороннего метода Рунге-Кутты является его высокая вычислительная сложность. На узле с номером ii необходимо определять минимум и максимум среди 2^i значений, что значительно увеличивает затраты на вычисления.