

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Методы решения нелинейных задач

Отчёт по лабораторной работе №4
"ДВУСТОРОННИЕ МЕТОДЫ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ
АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ"

Работу
выполнила:
студентка I курса
магистратуры
Добрецова Е.В.
Группа:
5040102/40101
Преподаватель:
Фролов М.Е.

Санкт-Петербург
2025

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу

$$u = Au + f,$$

где матрица $A \in \mathbb{M}^{n \times n}$ удовлетворяет условиям, гарантирующим сходимость итерационного процесса:

$$u_{i+1} = Au_i + f.$$

Необходимо получить двусторонние оценки точного решения, выполняющиеся покомпонентно, для матрицы с нормой, равной 0.5, затем для матрицы с нормой, близкой к 1. Построить графики зависимости погрешности от номера итерации и графики покомпонентной сходимости для обеих матриц. В качестве нормы матрицы выбирается бесконечная норма.

2. Цель работы

Рассмотрев случаи, когда норма матрицы A намного меньше единицы и когда она близка к единице, изучить сходимость двусторонних оценок точного решения друг к другу.

3. Алгоритм получения двусторонних оценок

Представим матрицу A в виде

$$A = A^+ - A^-,$$

где коэффициенты A^+ и A^- неотрицательны.

Выберем начальные приближения u_0^- и u_0^+ так, чтобы они покомпонентно оценивали точное решение снизу и сверху. Последующие приближения будем вычислять по формулам

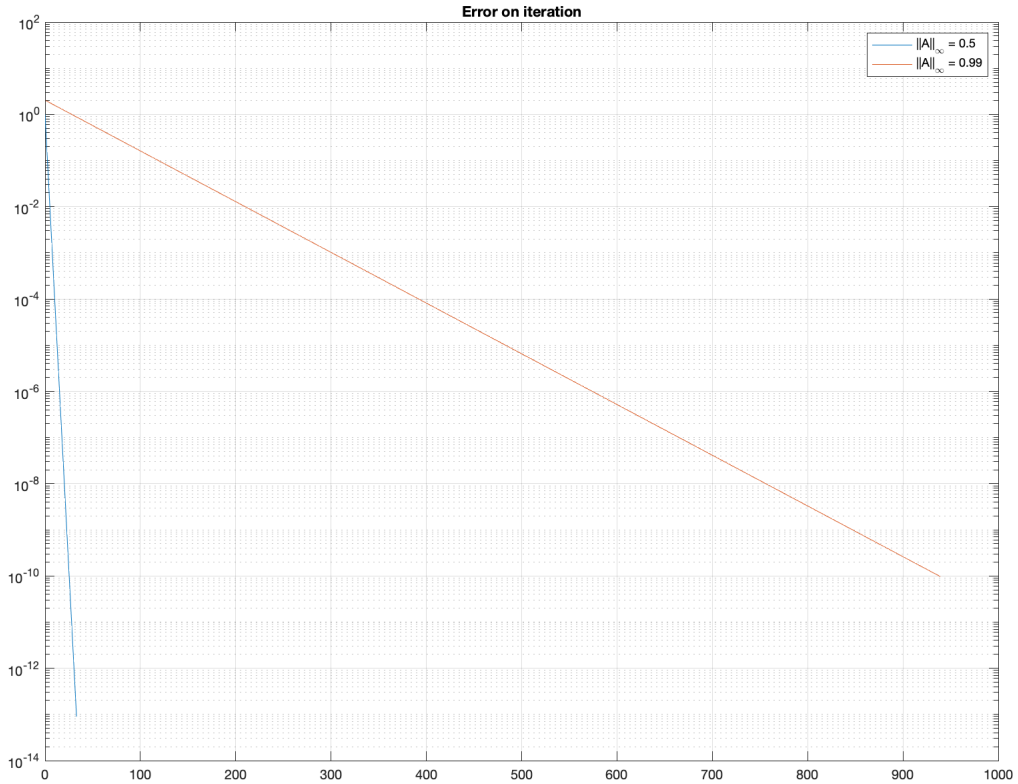
$$u_{i+1}^- = A^+ u_i^- - A^- u_i^+ + f;$$

$$u_{i+1}^+ = A^+ u_i^+ - A^- u_i^- + f.$$

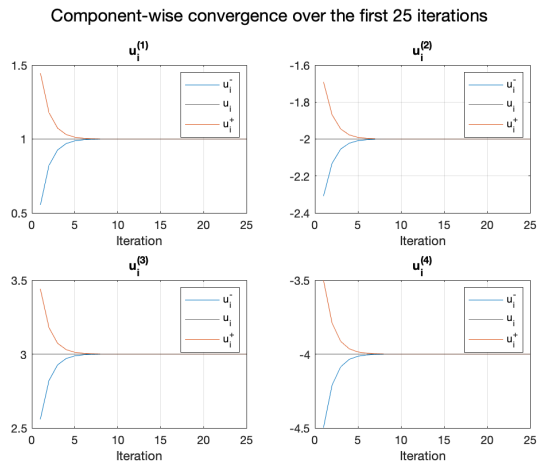
Условие выхода из цикла: значение нормы разности верхней и нижней оценки становится меньше заданного ε .

4. Результаты

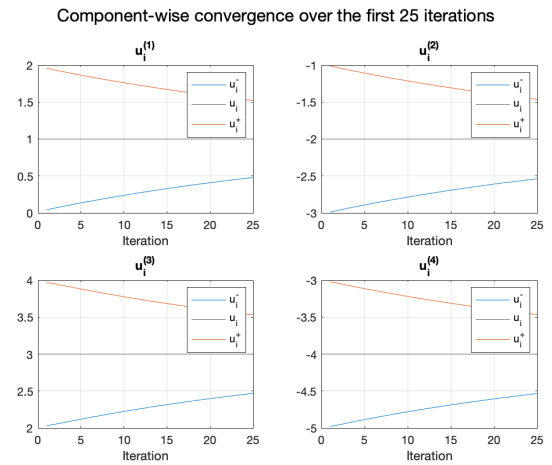
Расчеты и построение графиков проводились на языке программирования MATLAB. График зависимости погрешности от номера итерации:



Графики покомпонентной сходимости:



(a) $\|A\|_\infty = 0.5$



(b) $\|A\|_\infty = 0.99$

5. Анализ результатов

По графикам видно, что при норме матрицы, близкой к единице, получение оценок требует значительно большего числа итераций. Это связано с тем, что разница между верхней и нижней оценками с каждой следующей итерацией уменьшается пропорционально норме матрицы СЛАУ A .

6. Выводы

В ходе выполнения данной работы были получены двусторонние оценки точного решения, выполняющиеся покомпонентно, для двух матриц: с нормой, равной 0.5, и с нормой, близкой к 1. Были построены графики зависимости погрешности от номера итерации и графики покомпонентной сходимости для обеих матриц. Анализ сходимости подтвердил, что согласно предположению, при норме матрицы, близкой к 1, получение двусторонних оценок с заданной точностью требует значительно большего числа итераций.