

# Курсовой проект

"Численный анализ математических моделей механики  
сплошной среды"

# КУРСОВАЯ РАБОТА (6 курс)

Цель: полное исследование кейсовой задачи математической физики

① Постановка задачи

- 1.1. Математическая формулировка
- 1.2. Физические интерпретации модели  
(посмотреть литературу)

② Корректность модели (по Адлеру)

③ Дискретизация. Корректность дискретной постановки. Сходимость к точному решению.

④ Метод решения конечномерной задачи (напр. МКЭ + регуляризация или МКЭ + Узловая)

Обоснование сходимости алгоритма.

⑤ Численные результаты и их анализ

⑥ Выводы

---

## Литература

1. Задача с препятствием  
(obstacle problem)

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ , липшицева граница  $\Gamma$

$f \in L^2(\Omega)$

Найти  $u \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega)$  такое, что

$$J(u) = \min_{w \in K} J(w); \quad J(w) := \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - fw \right) dx$$

$$K := \{w \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega) \mid w(x) \geq \psi(x) \quad x \in \Gamma\}$$

$\psi(x) \leq 0$  на  $\Gamma$     $\psi(x)$  — непрерывная  
кусочная линия

2. Задача о течении жидкости в канале

Найти  $u \in \overset{\circ}{H}^1(\Omega)$  такое, что

$$J(u) = \min_{w \in \overset{\circ}{H}^1} J(w); \quad J(w) := \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla w|^2 + K |\nabla w| - fw \right) dx$$

$K > 0$ ,  $v > 0$  — константы пластичности  
и вязкости

$f \in L^2(\Omega)$ . Для  $\Omega$  — круг задача  
имеет точное решение

③ Задача о кручении упругопластичных стержней

$$\Omega \in \mathbb{R}^2$$

Найти  $u \in \tilde{H}^1(\Omega)$  такое, что

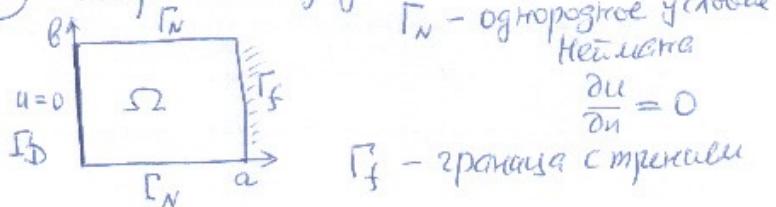
$$J(u) = \min_{w \in K} J(w); \quad J(w) := \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - cw \right) dx$$

$$K := \{w \in \tilde{H}^1(\Omega) \mid |\nabla w| \leq K\}$$

$K > 0$  — константа инасимметрии

Для  $\Omega$  — круг  $\mathbb{R}^2$ , задача имеет чистое решение

④ Модельная задача с трещинами



$$V := \{w \in \tilde{H}^1 \mid w = 0 \text{ на } \Gamma_D\}$$

Найти  $u \in V$  такое, что

$$J(u) = \min_{w \in V} J(w); \quad J(w) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla w|^2 - fw \right) dx + K \int_{\Gamma_f} |w| ds$$

$K > 0$  — параметр трещин

(5) Нелинейная диффузия

$$V_p := \{w \in W^{1,p}(\Omega), p > 1\}$$

Найти  $u \in V_p$  такое, что

$$J_p(u) = \min_{w \in V_p} J_p(w); \quad J_p(w) := \int_{\Omega} \left( \frac{1}{p} |\nabla w|^p - fw \right) dx$$

(6) Нелинейная реакция-диффузия

$\Omega$  — выпуклая ограниченная область в  $\mathbb{R}^2$

$$\text{Найти } u \in V := \{w \in H^1(\Omega), w = 0 \text{ на } \Gamma_D\}$$

( $\Gamma_D$  и  $\Gamma_N$  — две непересекающиеся части линьевой границы  $\Gamma$ )

такую, что

$$J(u) = \min_{w \in V} J(w); \quad J(w) := \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla w|^2 + \frac{\alpha}{2} |w|^p - fw \right) dx$$

$p > 1$      $\alpha > 0$  — коэффициент нелинейной реакции.

## Оглавление

1 Введение. Задачи о движении жидкости в области, ограниченной полу- проницаемой мембраной	3
2 Постановка задачи.	3
3 Существование и единственность решения задачи (10), (11).	4
4 Аппроксимация по методу конечных элементов.	5
4.1 Треангуляция области $\Omega$ .	5
4.2 Аппроксимация функционала $J$ .	5
4.3 Формулировка приближённой задачи.	6
4.4 Сходимость последовательности приближённых решений при $h \rightarrow 0$ .	7
4.5 Решение приближённой задачи методом релаксации.	7
5 Пример решения задачи диффузии жидкости через полупроницаемую мембрану для квадратной области.	8
5.1 Геометрические данные.	8
5.2 Результаты вычислений.	9

## Введение. Задачи о движении жидкости в области, ограниченной полупроницаемой мембраной

Пусть  $\Omega$  - область в  $\mathbf{R}^n$  с границей  $\Gamma$ . Будем предполагать, что область  $\Omega$  заполнена некоторой жидкостью, совершающей устремленное к движению при давлении  $u(x)$ . Жидкость может свободно втекать в область  $\Omega$  через границу  $\Gamma$ , а обратное движение невозможно. Пусть на границе области (вне  $\Omega$ ) задано давление жидкости  $h = h(x)$ . В сделанных предположениях давление внутри  $\Omega$  удовлетворяет уравнению

$$-\Delta u = f, \quad (1)$$

$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ , а  $f = f(x)$  - заданная в  $\Omega$  функция. При задании граничных условий существует различать два случая; В первом из них

$$u(x) > h(x) \quad (2)$$

жидкость вытекает из рассматриваемой области  $\Omega$ , но мембрана  $\Gamma$  мешает этому движению. Нетрудно видеть, что расход жидкости будет равен 0. Таким образом:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0 \quad (3)$$

затем, что  $\frac{\partial}{\partial n}$  - производная по нормали на  $\Gamma$ , направленная вне  $\Omega$ . Во втором случае жидкость стремится втекать в область  $\Omega$ , то есть расход жидкости ненулевой величиной. Тогда верно:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) \geq 0, \quad (4)$$

$\frac{\partial u}{\partial n}$  конечная величина. Для бесконечно тонкой мембранны, учитывая непрерывность  $u(x)$  в окрестности точки  $x$ , получаем  $u(x) = h(x)$  [1]. То есть, окончательно, граничные условия имеют вид:

$$(u - h) \geq 0, \quad \frac{\partial u}{\partial n} \geq 0, \quad (u - h) \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma \quad (5)$$

затем, что граница  $\Gamma$  может быть разделена на две подобласти  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , так что в первой  $u = h$ , а во второй  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ . Однако, эти области неизвестны заранее и их определение равносильно решению задачи.

## Постановка задачи.

В задачах, описывающих процесс диффузии сквозь ограничивающую область  $\Omega$  мембрану, возникает проблема определения функции  $u(x)$ ,  $x \in \Omega$ , удовлетворяющей нижеследующим уравнениям и условиям:

$$\mu u - \Delta u = f \text{ в } \Omega \quad (6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \phi(u) = 0 \text{ на } \Gamma_2 \quad (7)$$

$$u = 0 \text{ на } \Gamma \setminus \Gamma_2 \quad (8)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma \setminus \Gamma_2 \quad (9)$$

В сформулированой задаче,  $\mu$  - неотрицательная константа,  $\Gamma_d$  - часть  $\Gamma$  - границы области  $\Omega$ , и  $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  - заданная возрастающая функция. В соответствии с результатами работы [1], решение этой задачи сводится к задаче минимизации функционала

$$J(v)_{v \in V} \leq J(v) \forall v \in V, \text{ где } f \in \mathbf{L}^2(\Omega) \quad (10)$$

при

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mu v^2 + |\nabla v|^2) dx - \int_{\Omega} f v dx - \int_{\Gamma_d} \Psi(v) d\Gamma \quad (11)$$

и (10) для случая задачи (6), (7), (8), где

$$V = \left\{ v \mid v \in \mathbf{H}^1(\Omega), v \mid \Gamma \setminus \Gamma_d = 0 \right\} \quad (12)$$

и  $V = \mathbf{H}^1(\Omega)$  для задачи (6), (7), (9). Функция  $\Psi$  в выражении (10) является первообразной функции  $\phi$ , которая равна 0 в начале т.e:

$$\Psi(\xi) = \int_0^{\xi} \phi(\tau) d\tau \quad (13)$$

Везде далее будем считать, что  $\mu > 0$ . Определим функцию  $\phi$  по формуле:

$$\begin{cases} g, \text{ если } \xi \geq kg \\ \frac{\xi}{kg}, \text{ если } -kg \leq \xi \leq kg \\ -g, \text{ если } \xi \leq -kg, \end{cases} \quad (14)$$

где  $k$  и  $g$  - положительные постоянные. Т.о. учитывая (13) получим

$$\begin{cases} g\xi - \frac{1}{2}kg^2, \text{ если } \xi \geq kg \\ \frac{\xi^2}{2k}, \text{ если } -kg \leq \xi \leq kg \\ -g\xi - \frac{1}{2}kg^2, \text{ если } \xi \leq -kg. \end{cases} \quad (15)$$

### 3 Существование и единственность решения задачи (10), (11).

Через  $\|v\|$  обозначим стандартную норму на пространстве  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  т.е

$$\|v\| = \left( \int_{\Omega} (v^2 + |\nabla v|^2) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (16)$$

**Теорема.**

Если область  $\Omega$  ограничена, её граница  $\Gamma$  удовлетворяет условию Липшица, то задача (10), (11) имеет решение и при этом только одно.

## 4 Аппроксимация по методу конечных элементов.

### 4.1 Триангуляция области $\Omega$ .

Пусть  $T_h$  конечная триангуляция области  $\Omega$  удовлетворяющая условиям:

1.  $T \in \tilde{\Omega}$  и  $\forall T \in T_h, \bigcup_{T \in T_h} T = \tilde{\Omega}$ , где  $\tilde{\Omega}$  - замыкание  $\Omega$ .
2.  $T$  и  $T' \in T_h \Rightarrow T \cap T' = \emptyset$ , или же  $T$  и  $T'$  имеют одну общую сторону, или они имеют одну общую вершину.

Обозначим:  $h$  - длина наибольшей стороны  $T \in T_h$ ,  $\Sigma_h$  - множество вершин  $T_h$ ,  $\Sigma'_h$  - множество середин сторон треугольников из  $T_h$ . Будем предполагать, что  $\Gamma_d$  представляет собой объединение лежащих на  $\Gamma$  сторон треугольников из  $T_h$ . Пространство  $H^1(\Omega)$  аппроксимируется пространством

$$V_h = \left\{ v_h | v_h \in H^1(\Omega) \cap C^0(\tilde{\Omega}), v_h|_T \in P_q \quad \forall T \in T_h \right\}, \quad (17)$$

где  $v_h|_T$  - сужение функции  $v_h$  на треугольник  $T$ , а  $P_q$  - пространство полиномов степени не большей  $q$  по совокупности переменных. Т.о. пространство  $V_h$  для задачи (6), (7), (8) выглядит так:

$$V_h = \left\{ v_h | v_h \in V_h, v_h|_{P_1 P_2} = 0 \right\}, \quad (18)$$

а для задачи (6), (7), (9) положим  $V_h = V_h$

### 4.2 Аппроксимация функционала $j$ .

Функционал

$$j(v) = \int_{\Gamma_d} \Psi(v) d\Gamma \quad (19)$$

определен на введенных в предыдущем разделе пространствах  $V_h$ . Аппроксимируем его функционалом  $j_h$ , полученным путем численного интегрирования  $j$ . Т.е.

$$j_h(v_h) = \int_{\Gamma_d} \Psi_h(v_h) d\Gamma \quad (20)$$

Очевидно, он непрерывен и обладает свойством выпуклости. Считая, что суммирование проводится по всем сторонам треугольников из  $T_h$ , объединение которых совпадает с  $\Gamma_d$ , записьм:

$$j_h(v_h) = \frac{1}{2} \sum |M_i M_{i+1}| (\Psi(v_h(M_i)) + \Psi(v_h(M_{i+1}))), \quad (21)$$

что соответствует формуле трапеций Симпсона.

### 4.3 Формулировка приближённой задачи.

Представление функционала  $j_h$  через значения функции  $v_h$  в точках множества  $\Sigma_h \cap \Gamma$  записывается формулой:

$$j_h(v_h) = \frac{1}{2} \sum_{M_i \in \Sigma_h} |M_i M_{i+1}| (\Psi(v_i) - \Psi(v_{i+1})) \quad (22)$$

Для построения явных выражений для линейной формы  $\int_{\Omega} f v_h dx$  надо ввести базисные функции в пространстве  $V_h$  таким образом, что:  $(\omega_i)_{M_i \in \Sigma_h}, \omega_i \in V_h, \omega_i(M_j) = \delta_{ij}$ ,  $\forall M_j \in \Sigma_h$ . Обозначив через  $\Omega_i$  накитель функции  $\omega_i$ , запишем:

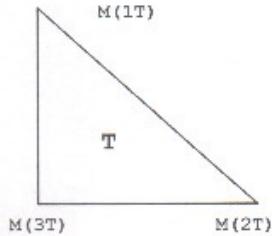


Рис. 1: Базисный элемент.

$$\int_{\Omega} f v_h dx = \sum_{M_i \in \Sigma_h} v_i \int_{\Omega_i} f \omega_i dx \quad (23)$$

В обозначениях рис. (1) получим формулу:

$$\int_{\Omega} |v_h|^2 dx = \frac{S(T)}{12} [(v_{1T} + v_{2T})^2 + (v_{2T} + v_{3T})^2 + (v_{3T} + v_{1T})^2], \quad (24)$$

где  $S(T)$  – площадь треугольника  $T$ . Из этой формулы следует:

$$\int_{\Omega} |v_h|^2 dx = \frac{1}{12} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} S(T) [(v_{1T} + v_{2T})^2 + (v_{2T} + v_{3T})^2 + (v_{3T} + v_{1T})^2] \quad (25)$$

Используя результаты работы [2] установим:

$$\int_{\Omega} |\nabla v_h|^2 dx = \frac{1}{4S(T)} |v_{1T} \overrightarrow{M_{2T}M_{3T}} + v_{2T} \overrightarrow{M_{3T}M_{1T}} + v_{3T} \overrightarrow{M_{1T}M_{2T}}|^2, \quad (26)$$

откуда вытекает выражение:

$$\int_{\Omega} |\nabla v_h|^2 dx = \frac{1}{4} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{S(T)} |v_{1T} \overrightarrow{M_{2T}M_{3T}} + v_{2T} \overrightarrow{M_{3T}M_{1T}} + v_{3T} \overrightarrow{M_{1T}M_{2T}}|^2 \quad (27)$$

Формулы (22), (23) - (27) позволяют сформулировать приближённую задачу

$$J_0(v_h) = \min_{v_h \in V_h} [J_0(v_h) + j_h(v_h)], \quad (28)$$

$$J_0(v_h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \frac{\rho}{2} \int_{\Omega} |v_h|^2 dx - \int_{\Omega} fv_h dx$$

в явном виде, как задачу оптимизации в пространстве конечного числа измерений.

#### 4.4 Сходимость последовательности приближённых решений при $h \rightarrow 0$ .

В этом разделе различные константы будем обозначать буквой  $C$ .

**Лемма.**

Имеет место оценка

$$j_h(v_h) \geq j(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \forall h. \quad (29)$$

**Лемма.**

Пусть  $s \in [0, 1]$ , тогда

$$|j_h(v_h) - j(v_h)| \leq C_0 g^s h^s \| \gamma_0 v_h \|_{H^s(\Gamma)} \quad (30)$$

где  $C_0$  - константа, не зависящая от  $k, g, h, s, v_h$ .

Используя результаты этих лемм, в [2] доказывается

**Теорема.**

Если при  $h \rightarrow 0$  величины углов треугольников триангуляции  $T_h$  ограничены сверху константой  $\theta_0 > 0$ , то

$$\lim_{h \rightarrow 0} u_h = u \text{ сильно в } H^1(\Omega), \quad (31)$$

где  $u$  решение задачи (10) - (11), а  $u_h$  - решение

$$J(u_h) \leq J(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \forall u_h \in V_h, f \in L^2(\Omega) \quad (32)$$

#### 4.5 Решение приближённой задачи методом релаксации.

Пусть  $N_h = \dim V_h$ , где  $v_h$  - произвольный элемент пространства  $\mathbf{R}^{N_h}$ . В [2] было показано, что приближённая задача (28) сводится к задаче минимизации функционала  $J_h$  на пространстве  $\mathbf{R}^{N_h}$  в то время как функционал  $J_h$  обладает нижеследующими свойствами:

$$\begin{aligned} J_h &\text{ является строго выпуклым;} \\ &\lim_{\|v_h\| \rightarrow +\infty} J_h(v_h) = +\infty \\ &J_h \in C^1(\mathbf{R}^{N_h}), \text{ так как } \Psi \in C^1(\mathbf{R}) \end{aligned} \quad (33)$$

Учитывая эти свойства, и результаты работы [2] можно сделать вывод, что сходимость метода релаксации к задаче минимизации  $J_h$  на  $\mathbf{R}^{N_h}$  обеспечена. Алгоритм метода релаксации: задаётся произвольный элемент  $v_h^0 = (v_1^0, \dots, v_{N_h}^0)$  в пространстве  $\mathbf{R}^{N_h}$ , при известном  $v_h^n$  определяем координаты элемента  $v_h^{n+1}$  из решения задач:

$$\frac{\partial J_h}{\partial v_i} = (v_1^{n+1}, \dots, v_{i-1}^{n+1}, v_i^{n+1}, v_{i+1}^n, \dots, v_{N_h}^n) = 0, \quad 0 \leq i \leq N_h. \quad (34)$$

Для увеличения скорости сходимости может оказаться полезным введение параметра верхней или нижней релаксации  $\omega$ . В этом случае получаем модификацию сформулированного выше алгоритма:

$$\begin{aligned} u_h^n, & \text{ - задаётся} \\ \frac{\partial J_h}{\partial u_i} = (u_1^{n+1}, \dots, u_{i-1}^{n+1}, u_i^{n+\frac{1}{2}}, u_{i+1}^n, \dots, u_{N_h}^n) & = 0 \\ u_i^{n+1} = u_i^n + \omega(u_i^{n+\frac{1}{2}} - u_i^n) \end{aligned} \quad (35)$$

Условие остановки алгоритма верхней релаксации:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N_h} |u_i^{n+1} - u_i^n|}{\sum_{i=1}^{N_h} |u_i^n|} \leq \epsilon \quad (36)$$

## 5 Пример решения задачи диффузии жидкости через полупроницаемую мембрану для квадратной области.

### 5.1 Геометрические данные.

Рассматриваемая задача (6) – (8) конкретизируется заданием области  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ ,  $\Gamma_d = \{(x_1, x_2) \mid (0 \leq x_1 \leq 1, x_2 = 0) \cup (0 \leq x_2 \leq 1, x_1 = 0)\}$ .

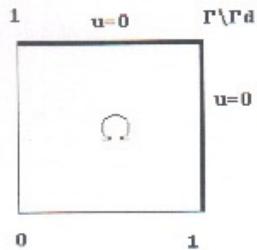


Рис. 2: Область  $\Omega$ .

Пространство  $V : V = \{v \mid v \in \mathbf{H}^1(\Omega), v = 0, \text{ на } \Gamma \setminus \Gamma_d\}$ . Функция  $f$  была выбрана так что:  $f : f(x) = 1$ . Численные значения параметров:  $\mu = 1.0$ ,  $k = 1.0$ ,  $g = 1.0$ . Начальное приближение для алгоритма верхней релаксации  $u_h^0 = 0$ . Возьмём условием остановки алгоритма верхней релаксации условие (36), где  $\epsilon = 10^{-4}$ . Используются конечные элементы первого порядка.

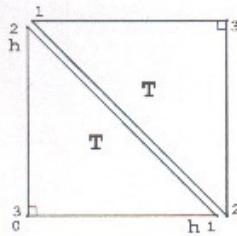


Рис. 3: Элементы первого порядка .

Исходя из нумерации представленной на рис. (3), базисные функции элемента записутся следующим образом:

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 - \frac{x}{h} - \frac{y}{h} \\ p_2 &= \frac{x}{h} \\ p_3 &= \frac{y}{h} \end{aligned} \quad (37)$$

Отсюда, принимая во внимание (22), (23) - (27), можно выразить матрицу элемента и правую часть в явном виде:

$$K_{el} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\mu h^2}{6} & \frac{\mu h^2}{12} & -1 + \frac{\mu h^2}{12} \\ \frac{\mu h^2}{12} & 1 + \frac{\mu h^2}{6} & -1 + \frac{\mu h^2}{12} \\ -1 + \frac{\mu h^2}{12} & -1 + \frac{\mu h^2}{12} & 2 + \frac{\mu h^2}{3} \end{bmatrix} \quad (38)$$

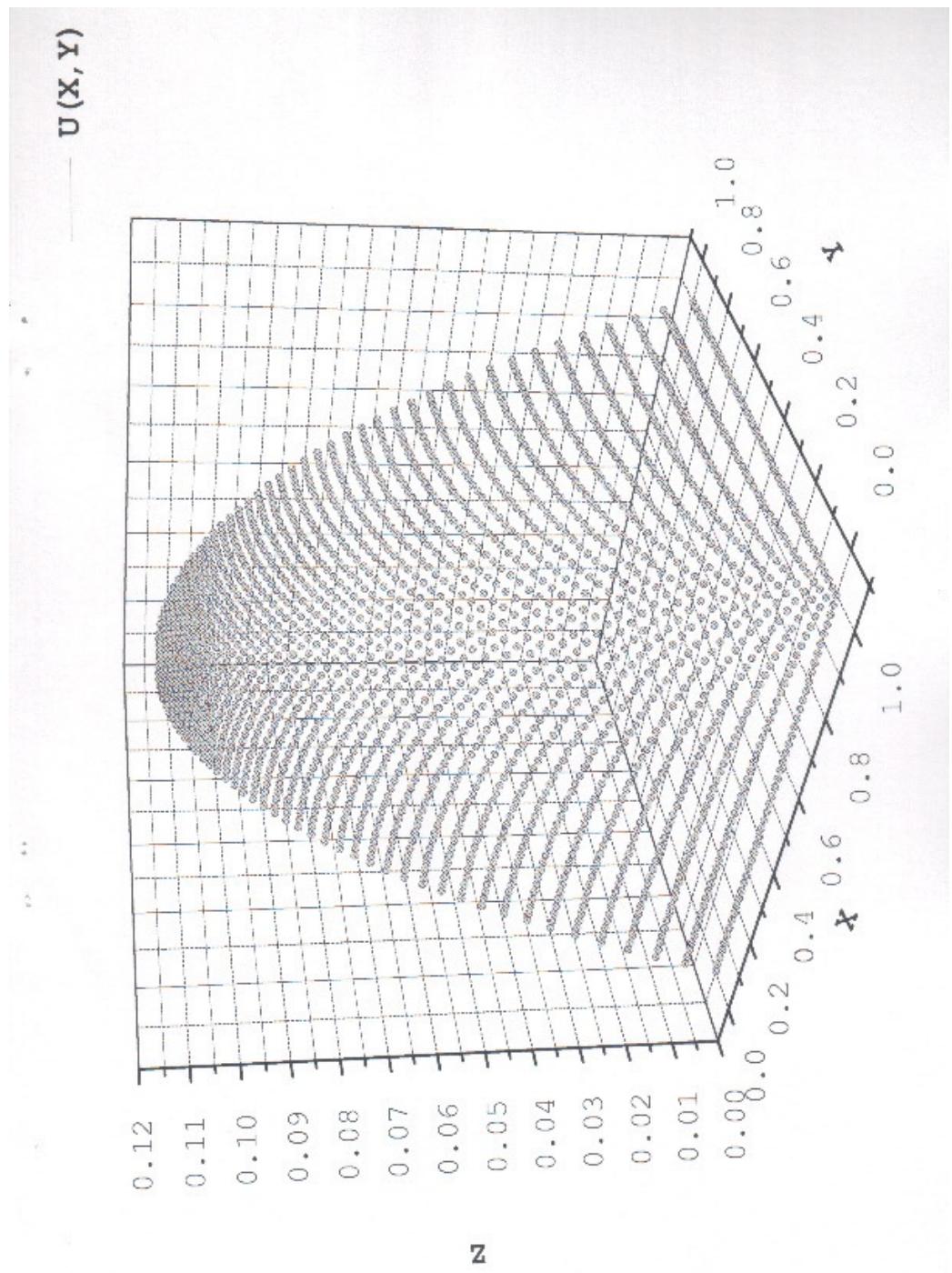
$$f_{el} = \begin{bmatrix} \frac{h^2}{6} \\ \frac{h^2}{6} \\ \frac{h^2}{6} \\ \frac{h^2}{6} \end{bmatrix}, \quad (39)$$

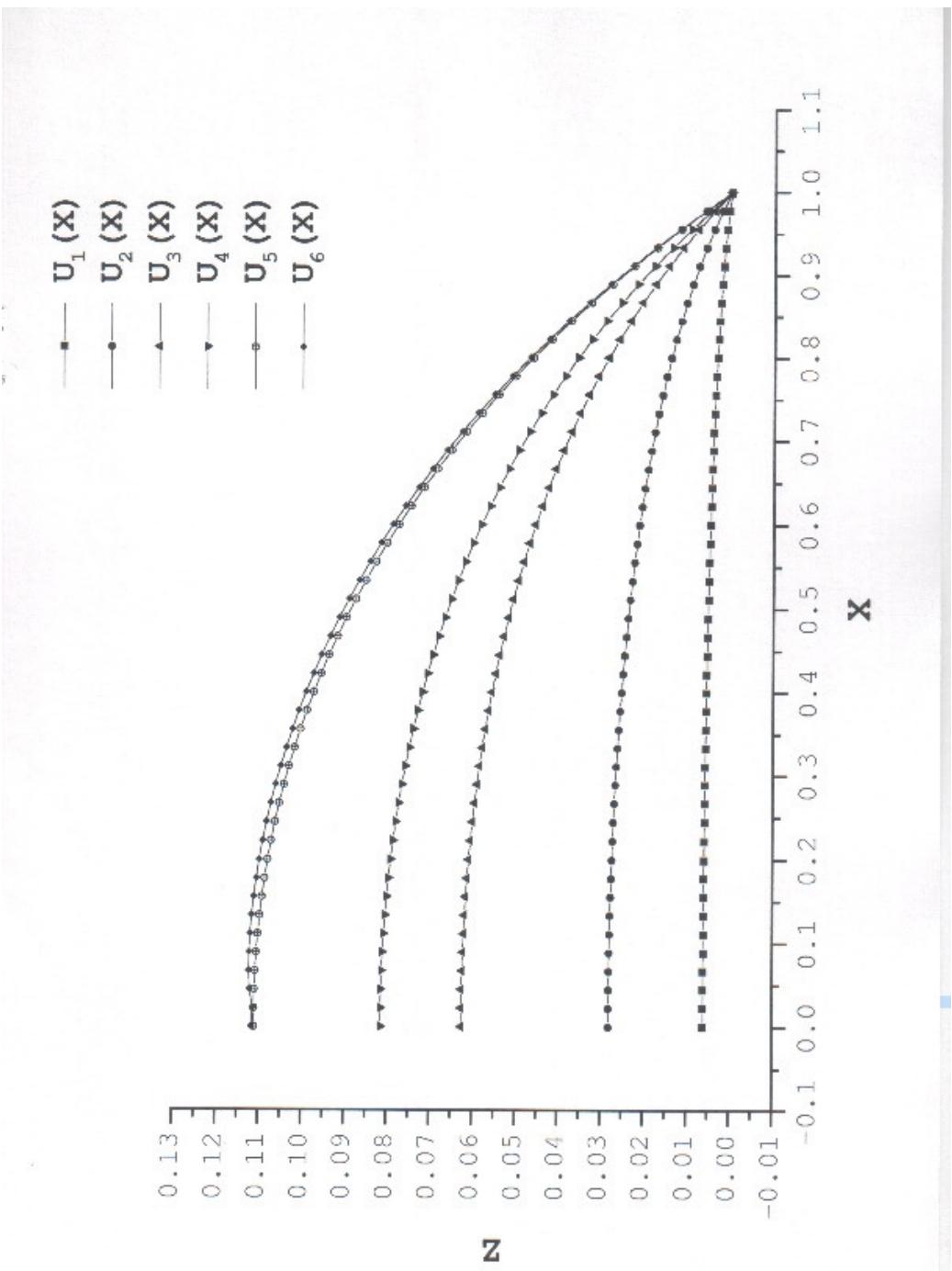
Далее, общая матрица системы и её правая часть собирается в полном соответствии с принципом построения системы, принятым для метода конечных элементов. Получив её, применяем метод верхней релаксации для решения системы.

## 5.2 Результаты вычислений .

Вычисления были проведены на высокопроизводительной рабочей станции Sun Ultra 5 с процессором Ultra Sparc-II 270MHz и операционной системой Solaris 2.6. Алгоритм реализован на языке C с использованием GNU C compiler 2.7.

Численные значения параметров:  $\mu = 1.0$ ,  $k = 1.0$ ,  $g = 1.0$ . Начальное приближение для алгоритма верхней релаксации с параметром  $\omega = 1.8$ :  $u_e^0 = 0$ . Условие остановки алгоритма верхней релаксации условие (38), с  $\varepsilon = 10^{-4}$ . При расчётах,  $N$  - количество разбиений области было взято равным 45 т.е. количество узлов  $N_u = 2116$ , а количество треугольников 4050. Метод релаксации сходится за 236 шагов. Графически результаты вычислений представлены ниже. Стоит так же заметить, что полученные результаты не противоречат физической теории, описывающей данную задачу.





## Литература по курсу лекций

