Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Численные методы механики сплошных сред

Курсовая работа "Нелинейная реакция-диффузия"

Работу выполнила:
студентка II курса
магистратуры
Добрецова Е.В.
Группа:
5040102/40101
Преподаватель:
Репин С.И.

Санкт-Петербург
2026

Содержание

1. Постановка задачи

1.1. Математическая формулировка

Найти функцию $u \in V$, где

$$V := \left\{ w \in H^1(\Omega) : \ w\big|_{\Gamma_D} = 0 \right\}, \tag{1}$$

минимизирующую функционал

$$J(u) = \int_\Omega \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\alpha}{p} |u|^p - fu \right) dx, \tag{2}$$

где

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - выпуклая ограниченная область с липшицевой границей;
- Γ_D и Γ_N - две непересекающиеся части границы $\partial\Omega$;
- $p > 1$ - показатель нелинейности;
- $\alpha > 0$ - коэффициент нелинейной реакции;
- f - внешнее воздействие (источник/сток вещества).

Таким образом, требуется найти

$$u = \arg\min_{w \in V} J(w).$$

1.2. Физические интерпретации модели

Рассматривается процесс распространения некоторого вещества в ограниченной области. На движение вещества внутри области влияют два эффекта: диффузия, стремящаяся выровнять концентрацию, и внутренняя реакция, скорость которой нелинейно зависит от концентрации вещества. На части границы область находится под фиксированным воздействием, что моделируется условием Дирихле. На другой части границы фиксированное значение не задаётся, и вещество может свободно обмениваться с внешней средой, что соответствует условию Неймана. Интерес представляет стационарное распределение концентрации, которое устанавливается в системе под действием диффузии, нелинейной реакции и внешних факторов.

Функция $u(x)$ интерпретируется как концентрация вещества в точке $x \in \Omega$. Первое слагаемое функционала

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

соответствует диффузионному переносу и характеризует энергетические затраты, связанные с неоднородностью распределения концентрации. Минимизация данного слагаемого отражает стремление системы к выравниванию концентрации.

Нелинейное слагаемое

$$\frac{\alpha}{p} \int_\Omega |u|^p dx$$

описывает внутреннюю реакцию, скорость которой нелинейно зависит от концентрации вещества, при этом параметр $p > 1$ определяет характер нелинейности, а коэффициент $\alpha > 0$ - её интенсивность.

Последнее слагаемое

$$-\int_\Omega fudx$$

учитывает влияние внешних источников или стоков вещества.

2. Корректность модели (по Адамару)

Задача математической физики является корректно поставленной по Адамару при выполнении следующих условий:

1. существование решения;
2. единственность решения;
3. устойчивость решения.

2.1. Существование решения

Рассматривается задача минимизации функционала J на пространстве V. Пространство V является замкнутым как линейное подпространство пространства $H^1(\Omega)$ и непустым, так как нулевая функция принадлежит V.

Докажем коэрцитивность функционала J, на V т.е. покажем, что

$$||u||_V \to \infty \Rightarrow J(u) \to +\infty.$$

Для этого оценим по модулю линейное слагаемое функционала $-\int_\Omega f u\, dx$.
Так как $V \subset H^1(\Omega)$, положим

$$\|u\|_V := \|u\|_{H^1(\Omega)} \simeq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

По неравенству Пуанкаре в пространстве V имеем

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \le C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Применяя неравенство Коши--Буняковского--Шварца, получаем

$$\left| \int_\Omega f u\, dx \right| \le \|f\|_{L^2(\Omega)}\, \|u\|_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)} C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Далее используем неравенство Юнга

$$ab \le \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

откуда

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \le \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{C_P^2}{2\varepsilon} \|f\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
J(u) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{\alpha}{p}\int_\Omega |u|^p\,dx - \int_\Omega fu\,dx \\
&\geq \frac{1}{2}\,\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{p}\,\|u\|^p_{L^p(\Omega)} - \left(\frac{\varepsilon}{2}\,\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{C_P^2}{2\varepsilon}\,\|f\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\geq \frac{1-\varepsilon}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{p}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} - \frac{C_P^2}{2\varepsilon}\|f\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Выбирая $\varepsilon = \frac{1}{4}$, получаем оценку

$$J(u) \geq \frac{3}{8}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\alpha}{p}\|u\|^p_{L^p(\Omega)} - \tilde{C},$$

где $\tilde{C} = \mathrm{const}$. Таким образом, функционал J является коэрцитивным на пространстве V.

Также функционал является слабо полунепрерывным снизу в V, так как отображение $u \mapsto \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$ выпукло и слабо непрерывно снизу, отображение $u \mapsto \int_\Omega |u|^p dx$ выпукло и слабо полунепрерывно снизу при $p > 1$, а линейный член $u \mapsto \int_\Omega fu\,dx$ слабо непрерывен.

Из коэрцитивности и слабой полунепрерывности снизу функционала J следует существование минимизирующей последовательности, имеющей подпоследовательность, которая слабо сходится в V к некоторой функции $u \in V$. Данная функция и будет минимизатором J на V.

2.2. Единственность решения

Единственность решения следует из строгой выпуклости функционала J на пространстве V, которая следует из строгой выпуклости первых двух слагаемых и того, что третье слагаемое не влияет на выпуклость. Строго выпуклый функционал не может иметь более одного минимизатора.

2.3. Устойчивость решения

Покажем, что решение задачи устойчиво относительно возмущений правой части f, т.е. малое изменение входных данных задачи влечёт за собой малое изменение решения.

Рассмотрим две функции $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ и соответствующие им решения $u_1, u_2 \in V$, являющиеся минимизаторами функционала J.

Функции u_1 и u_2 удовлетворяют уравнению Эйлера-Лагранжа:

$$\int_\Omega \nabla u_i \cdot \nabla v\,dx + \alpha\int_\Omega |u_i|^{p-2}u_i v\,dx = \int_\Omega f_i v\,dx, \quad \forall v \in V,\ i = 1, 2.$$

Вычитая эти равенства и выбирая в качестве тестовой функции $v = u_1 - u_2$, получаем

$$\int_\Omega |\nabla(u_1 - u_2)|^2\,dx + \alpha\int_\Omega \left(|u_1|^{p-2}u_1 - |u_2|^{p-2}u_2\right)(u_1 - u_2)\,dx = \int_\Omega (f_1 - f_2)(u_1 - u_2)\,dx.$$

Так как функция $s \mapsto |s|^{p-2}s$ является монотонной при $p > 1$, то

$$\int_\Omega \left(|u_1|^{p-2}u_1 - |u_2|^{p-2}u_2\right)(u_1 - u_2)\,dx \geq 0.$$

Следовательно,

$$\|\nabla(u_1 - u_2)\|^2_{L^2(\Omega)} \le \left| \int_\Omega (f_1 - f_2)(u_1 - u_2)\, dx \right|.$$

Применяя неравенство Коши--Буняковского--Шварца и неравенство Пуанкаре, получаем оценку

$$\|u_1 - u_2\|_V \le C\|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)},$$

где постоянная C не зависит от f_1 и f_2.

Таким образом, решение задачи непрерывно зависит от правой части, и задача является устойчивой.

3. Дискретизация задачи

3.1. Дискретная постановка задачи

Пусть $\mathcal{T}_h$ - регулярная триангуляция области Ω с параметром $h > 0$. Обозначим через Ω_h многоугольную аппроксимацию Ω на основе разбиения $\mathcal{T}_h$. Пусть $V_h \subset V$ - конечное аппроксимирующее пространство, состоящее из кусочно-линейных непрерывных функций, обращающихся в ноль на Γ_D:

$$V_h = \{v_h \in C(\overline{\Omega}_h) : v_h|_K \in \mathbb{P}_1(K)\, \forall K \in \mathcal{T}_h,\ v_h|_{\Gamma_D} = 0\}. \tag{3}$$

Будем искать функцию $u_h \in V_h$, минимизирующую функционал

$$J_h(v_h) = \int_{\Omega_h} \left(\frac{1}{2}|\nabla v_h|^2 + \frac{\alpha}{p}|v_h|^p - f v_h \right) dx, \quad v_h \in V_h. \tag{4}$$

3.2. Корректность дискретной постановки

Функционал J_h является непрерывным и коэрцитивным на V_h, следовательно, решение дискретной задачи существует. Его единственность следует из строгой выпуклости J_h на V_h. Устойчивость решения дискретной задачи по отношению к правой части f следует из строгой выпуклости функционала и непрерывной зависимости минимума выпуклого функционала от параметров.

3.3. Сходимость к точному решению

Пусть $u \in V$ - точное решение исходной задачи минимизации функционала J на пространстве V, а $u_h \in V_h$ - решение дискретной задачи, т.е. минимизатор функционала J_h на конечномерном пространчтве $V_h \in V$.

Докажем, что при $h \to 0$ дискретное решение u_h сходится к точному решению u в пространстве V.

Так как V_h состоит из кусочно-линейных функций на регулярной триангуляции и $V_h \subset V$, $\forall v \in V$ существует аппроксимирующая последовательность $v_h \in V_h$ такая, что

$$||v - v_h||_V \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

В частности, для точного решения $u \in V$ существует последовательность $u^*h \in V_h$. для которой

$$||u - u^*_h||_V \to 0 \text{ при } h \to 0.$$

По определению дискретного решения u_h

$$J(u_h) \le J(v_h) \ \forall v_h \in V_h,$$

в частности, для аппроксимирующей функции $u_h^* \in V_h$

$$J(u_h) \le J(u_h^*).$$

Перейдём к пределу при $h \to 0$ и используем непрерывность функционала J на V, получим

$$\limsup_{h\to 0} J(u_h) \le J(u),$$

с другой стороны, из слабой полунепрерывности снизу функционала следует

$$J(u) \le \liminf_{h\to 0} J(u_h).$$

Отсюда

$$\lim_{h\to 0} J(u_h) = J(u).$$

Так как функционал J строго выпуклый, из сходимости значений функционала следует сильная сходимость $u_h \to u$ в пространстве V.

4. Решение конечномерной задачи

Для того, чтобы свести исходную бесконечномерную задачу минимизации функционала к конечномерной задаче минимизации функции нескольких переменных, необходимо применить метод конечных элементов.

4.1. Метод конечных элементов

В точке минимума функционала первая вариация равна нулю во всех допустимых направлениях. Введём направление вариации v_h как произвольную функцию из того же пространства V_h, потребуем, чтобы первая вариация функционала в точке u_h обращалась в ноль по всем направлениям v_h. Таким образом, исходная конечномерная задача (3), (4) сводится к следующей:

$$\int_{\Omega_h} \nabla u_h \cdot \nabla v_h dx + \alpha \int_{\Omega_h} |u_h|^{p-2} u_h v_h dx = \int_{\Omega_h} f v_h dx, \quad \forall v_h \in V_h. \tag{5}$$

4.2. Метод Ньютона

Для численного решения нелинейной задачи (5) используется метод Ньютона. После выбора базиса $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$ пространства V_h искомое решение представляется в виде

$$u_h = \sum_{i=1}^N U_i \varphi_i,$$

где $U = (U_1, \ldots, U_N)^T$ — вектор неизвестных коэффициентов.

Подставляя это представление в (5) и выбирая в качестве тестовых функций базисные функции φ_j, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений относительно вектора U.

Метод Ньютона заключается в построении последовательности приближений $\{U^{(k)}\}$, сходящейся к решению этой системы. На каждом шаге метода нелинейная система линеаризуется в окрестности текущего приближения $U^{(k)}$, после чего решается соответствующая линейная система уравнений для поправки $\delta U^{(k)}$. Следующее приближение определяется по формуле

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} + \delta U^{(k)}.$$

В качестве начального приближения $U^{(0)}$ может быть выбрано нулевое решение.

5. Численные результаты и их анализ

6. Выводы

7. Список литературы