

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Численные методы механики сплошных сред

Курсовая работа "Нелинейная реакция-диффузия"

Работу выполнила:
студентка II курса
магистратуры
Добрецова Е.В.
Группа:
5040102/40101
Преподаватель:
Репин С.И.

Санкт-Петербург
2026

Содержание

1.	Постановка задачи	3
1.1.	Математическая формулировка	3
1.2.	Физические интерпретации модели	3
2.	Корректность модели (по Адамару)	4
2.1.	Существование решения	4
2.2.	Единственность решения	5
2.3.	Устойчивость решения	5
3.	Дискретизация задачи	6
3.1.	Корректность дискретной постановки	6
3.2.	Сходимость к точному решению	6
4.	Решение конечномерной задачи	6
4.1.	Метод	6
4.2.	Сходимость метода	6
5.	Численные результаты и их анализ	6
6.	Выводы	6
7.	Список литературы	6

1. Постановка задачи

1.1. Математическая формулировка

Найти функцию $u \in V$, где

$$V := \left\{ w \in H^1(\Omega) : w|_{\Gamma_D} = 0 \right\}, \quad (1)$$

минимизирующую функционал

$$J(u) = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \frac{\alpha}{p} |u|^p - fu \right) dx, \quad (2)$$

где

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ - выпуклая ограниченная область с липшицевой границей;
- Γ_D и Γ_N - две непересекающиеся части границы $\partial\Omega$;
- $p > 1$ - показатель нелинейности;
- $\alpha > 0$ - коэффициент нелинейной реакции;
- f - внешнее воздействие (источник/сток вещества).

Таким образом, требуется найти

$$u = \arg \min_{w \in V} J(w).$$

1.2. Физические интерпретации модели

Рассматривается процесс распространения некоторого вещества в ограниченной области. На движение вещества внутри области влияют два эффекта: диффузия, стремящаяся выровнять концентрацию, и внутренняя реакция, скорость которой нелинейно зависит от концентрации вещества. На части границы область находится под фиксированным воздействием, что моделируется условием Дирихле. На другой части границы фиксированное значение не задаётся, и вещество может свободно обмениваться с внешней средой, что соответствует условию Неймана. Интерес представляет стационарное распределение концентрации, которое устанавливается в системе под действием диффузии, нелинейной реакции и внешних факторов.

Функция $u(x)$ интерпретируется как концентрация вещества в точке $x \in \Omega$. Первое слагаемое функционала

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

соответствует диффузионному переносу и характеризует энергетические затраты, связанные с неоднородностью распределения концентрации. Минимизация данного слагаемого отражает стремление системы к выравниванию концентрации.

Нелинейное слагаемое

$$\frac{\alpha}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx$$

описывает внутреннюю реакцию, скорость которой нелинейно зависит от концентрации вещества, при этом параметр $p > 1$ определяет характер нелинейности, а коэффициент $\alpha > 0$ - её интенсивность.

Последнее слагаемое

$$-\int_{\Omega} f u dx$$

учитывает влияние внешних источников или стоков вещества.

2. Корректность модели (по Адамару)

Задача математической физики является корректно поставленной по Адамару при выполнении следующих условий:

1. существование решения;
2. единственность решения;
3. устойчивость решения.

2.1. Существование решения

Рассматривается задача минимизации функционала J на пространстве V . Пространство V является замкнутым как линейное подпространство пространства $H^1(\Omega)$ и непустым, так как нулевая функция принадлежит V .

Докажем коэрцитивность функционала J , на V т.е. покажем, что

$$\|u\|_V \rightarrow \infty \Rightarrow J(u) \rightarrow +\infty.$$

Для этого оценим по модулю линейное слагаемое функционала $-\int_{\Omega} f u dx$. Так как $V \subset H^1(\Omega)$, положим

$$\|u\|_V := \|u\|_{H^1(\Omega)} \simeq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

По неравенству Пуанкаре в пространстве V имеем

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Применяя неравенство Коши--Буняковского--Шварца, получаем

$$\left| \int_{\Omega} f u dx \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Далее используем неравенство Юнга

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

откуда

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} C_P \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_P^2}{2\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{\alpha}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx - \int_{\Omega} f u dx \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{p} \|u\|_{L^p(\Omega)}^p - \left(\frac{\varepsilon}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_P^2}{2\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &\geq \frac{1-\varepsilon}{2} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{p} \|u\|_{L^p(\Omega)}^p - \frac{C_P^2}{2\varepsilon} \|f\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Выбирая $\varepsilon = \frac{1}{4}$, получаем оценку

$$J(u) \geq \frac{3}{8} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\alpha}{p} \|u\|_{L^p(\Omega)}^p - \tilde{C},$$

где $\tilde{C} = \text{const}$. Таким образом, функционал J является коэрцитивным на пространстве V .

Также функционал является слабо полунепрерывным снизу в V , так как отображение $u \mapsto \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ выпукло и слабо непрерывно снизу, отображение $u \mapsto \int_{\Omega} |u|^p dx$ выпукло и слабо полунепрерывно снизу при $p > 1$, а линейный член $u \mapsto \int_{\Omega} f u dx$ слабо непрерывен.

Из коэрцитивности и слабой полунепрерывности снизу функционала J следует существование минимизирующей последовательности, имеющей подпоследовательность, которая слабо сходится в V к некоторой функции $u \in V$. Данная функция и будет минимизатором J на V .

2.2. Единственность решения

Единственность решения следует из строгой выпуклости функционала J на пространстве V , которая следует из строгой выпуклости первых двух слагаемых и того, что третье слагаемое не влияет на выпуклость. Строго выпуклый функционал не может иметь более одного минимизатора.

2.3. Устойчивость решения

Покажем, что решение задачи устойчиво относительно возмущений правой части f , т.е. малое изменение входных данных задачи влечёт за собой малое изменение решения.

Рассмотрим две функции $f_1, f_2 \in L^2(\Omega)$ и соответствующие им решения $u_1, u_2 \in V$, являющиеся минимизаторами функционала J .

Функции u_1 и u_2 удовлетворяют уравнению Эйлера-Лагранжа:

$$\int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v dx + \alpha \int_{\Omega} |u_i|^{p-2} u_i v dx = \int_{\Omega} f_i v dx, \quad \forall v \in V, i = 1, 2.$$

Вычитая эти равенства и выбирая в качестве тестовой функции $v = u_1 - u_2$, получаем

$$\int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} (|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2) (u_1 - u_2) dx = \int_{\Omega} (f_1 - f_2)(u_1 - u_2) dx.$$

Так как функция $s \mapsto |s|^{p-2}s$ является монотонной при $p > 1$, то

$$\int_{\Omega} (|u_1|^{p-2} u_1 - |u_2|^{p-2} u_2) (u_1 - u_2) dx \geq 0.$$

Следовательно,

$$\|\nabla(u_1 - u_2)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left| \int_{\Omega} (f_1 - f_2)(u_1 - u_2) dx \right|.$$

Применяя неравенство Коши--Буняковского--Шварца и неравенство Пуанкаре, получаем оценку

$$\|u_1 - u_2\|_V \leq C \|f_1 - f_2\|_{L^2(\Omega)},$$

где постоянная C не зависит от f_1 и f_2 .

Таким образом, решение задачи непрерывно зависит от правой части, и задача является устойчивой.

3. Дискретизация задачи

3.1. Корректность дискретной постановки

3.2. Сходимость к точному решению

4. Решение конечномерной задачи

4.1. Метод

4.2. Сходимость метода

5. Численные результаты и их анализ

6. Выводы

7. Список литературы