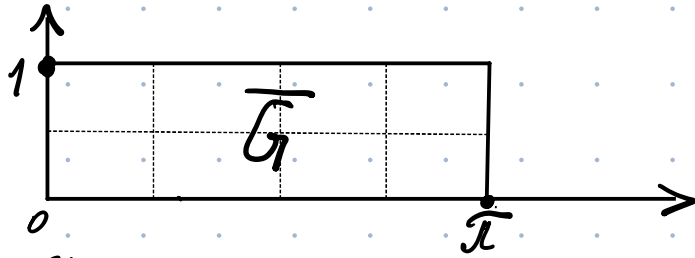Решаем задачу (1) на области (2) с
граничным условием (3).

д $N_x = 4$, $N_y = 2$

Шаги сетки:
$$h_x = \frac{\pi}{4}, \quad h_y = \frac{1}{2}$$

Узлы сетки:

$x_i = \frac{\pi i}{4}, \quad i = \overline{0, 4}$

$y_i = \frac{i}{2}, \quad i = \overline{0, 2}$

12 внеш. узлов, 3 внутр.

Граничные значения находим из усл. (3):

1) $v_{0,0} = u(0,0) = 0$

2) $v_{0,1} = u(0; 0,5) = 0,25$

3) $v_{0,2} = 1^2 = \cos 0 = 1$

4) $v_{1,2} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$

5) $v_{2,2} = \cos \frac{\pi}{2} = 0$

6) $v_{3,2} = \cos \frac{3\pi}{4} \approx -0,707$

7) $v_{4,2} = -1$

8) $v_{4,1} = -0,25$

9-12) $v_{4,0} = 0 = v_{3,0} = v_{2,0} = v_{1,0}$

Начальное приближение $v^{(0)} = 0$

Итерация 1

1) узел $v_{1,1}$

По формуле (6):

$$v_{1,1}^{(1)} \approx \frac{\dfrac{0 + 0,25}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} + \dfrac{0 + 0,707}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} - \left(2 - \frac{1}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\dfrac{2}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} + \dfrac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = 0,178$$

2) узел $V_{2,1}$

$$V_{2,1}^{(1)} \approx \cfrac{\cfrac{0+0,178}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} + \cfrac{0+0}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{\cfrac{2}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} + \cfrac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = 0,0257$$

3) узел $V_{3,1}$

$$V_{3,1}^{(1)} \approx \cfrac{\cfrac{-0,25+0,0257}{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2} + \cfrac{0-0,707}{\frac{1}{4}} - \left(2-\frac{1}{4}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{11,242} = -0,174$$

$$\boxed{V_{1,1}^{(1)} \approx 0,178; \; V_{2,1}^{(1)} \approx 0,0257; \; V_{3,1}^{(1)} \approx -0,174}$$

## Итерация 2

1) узел $V_{1,1}$

$$V_{1,1}^{(2)} \approx \cfrac{\cfrac{0,0257+0,25}{0,617} + \cfrac{0+0,707}{\frac{1}{4}} - 1,75\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{11,242} = 0,1813$$

2) узел $V_{2,1}$

$$V_{2,1}^{(2)} \approx \cfrac{\cfrac{-0,174+0,1813}{0,617}}{11,242} = 0,0011$$

3) узел $V_{3,1}$

$$V_{3,1}^{(2)} \approx \cfrac{\cfrac{-0,25+0,0011}{0,617} + \cfrac{0-0,707}{\frac{1}{4}} - 1,75\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)}{11,242} = -0,1774$$

$$\boxed{V_{1,1}^{(2)} \approx 0,1813; \; V_{2,1}^{(2)} \approx 0,0011; \; V_{3,2}^{(2)} \approx -0,1774}$$