

Дана система из трех линейных неодн. ОДУ:

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t), \quad y(t) \in \mathbb{R}^3$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin(t+1) \\ \sin(t+2) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 0,3, \quad \Delta t = 0,1$$

Сетка: $t_m = \frac{m}{10}, m = \overline{0,3}$

Начальные условия: $y_m^{(0)} = 1, m = \overline{0,3}$

Дальнейшие значения $y_{m+1}^{(k+1)}$ находятся по формуле (3).

Итерация 1: $Ay_0^{(0)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = Ay_1^{(0)}$

$$f(t_0) = \begin{pmatrix} \sin 0 \\ \sin 1 \\ \sin 2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0,841 \\ 0,909 \end{pmatrix}$$

$$f(t_1) = \begin{pmatrix} \sin 0,1 \\ \sin 1,1 \\ \sin 2,1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,0998 \\ 0,891 \\ 0,863 \end{pmatrix}$$

По формуле (3):

$$y_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,05 \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,841 \\ 0,909 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,0998 \\ 0,891 \\ 0,863 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,305 \\ 1,287 \\ 1,189 \end{pmatrix}$$

$$f(t_2) = \begin{pmatrix} \sin 0,2 \\ \sin 1,2 \\ \sin 2,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,199 \\ 0,932 \\ 0,808 \end{pmatrix}$$

$$y_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,05 \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,199 \\ 0,932 \\ 0,808 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,0998 \\ 0,891 \\ 0,863 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,315 \\ 1,291 \\ 1,184 \end{pmatrix}$$

$$f(t_3) = \begin{pmatrix} \sin 0,3 \\ \sin 1,3 \\ \sin 2,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,296 \\ 0,964 \\ 0,746 \end{pmatrix}$$

$$y_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,05 \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,296 \\ 0,964 \\ 0,746 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,199 \\ 0,932 \\ 0,808 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,325 \\ 1,295 \\ 1,178 \end{pmatrix}$$

$$y_0^{(1)} = (1, 1, 1)^T$$

$$y_1^{(1)} = (1,305; 1,287; 1,189)^T$$

$$y_2^{(1)} = (1,315; 1,291; 1,184)^T$$

$$y_3^{(1)} = (1,325; 1,295; 1,178)^T$$

Упражнение 2

$$y_0^{(2)} = (1, 1, 1)^T$$

$$y_1^{(2)} = y_0 + 0,05(A y_0^{(1)} + f(t_0) + A y_1^{(1)} + f(t_1))$$

$$A y_0^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A y_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,305 \\ 1,287 \\ 1,189 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,781 \\ 2,476 \\ 1,189 \end{pmatrix}$$

$$y_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,05 \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,841 \\ 0,909 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3,781 \\ 2,476 \\ 1,189 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,0998 \\ 0,891 \\ 0,863 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,344 \\ 1,310 \\ 1,198 \end{pmatrix}$$

$$Ay_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,315 \\ 1,291 \\ 1,184 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,790 \\ 2,475 \\ 1,184 \end{pmatrix}$$

$$y_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0,05 \left(\begin{pmatrix} 3,781 \\ 2,476 \\ 1,189 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,0998 \\ 0,891 \\ 0,863 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3,790 \\ 2,475 \\ 1,184 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,199 \\ 0,932 \\ 0,808 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,393 \\ 1,339 \\ 1,202 \end{pmatrix}$$

$$Ay_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,325 \\ 1,295 \\ 1,178 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,798 \\ 2,473 \\ 1,178 \end{pmatrix}$$

$$y_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 3,790 \\ 2,475 \\ 1,184 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,199 \\ 0,932 \\ 0,808 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3,798 \\ 2,473 \\ 1,178 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,296 \\ 0,964 \\ 0,746 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,404 \\ 1,342 \\ 1,196 \end{pmatrix}$$

$$y_0^{(2)} = (1, 1, 1)^T$$

$$y_1^{(2)} = (1,344; 1,310; 1,198)^T$$

$$y_2^{(2)} = (1,393; 1,339; 1,202)^T$$

$$y_3^{(2)} = (1,404; 1,342; 1,196)^T$$