Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт прикладной математики и механики
Высшая школа прикладной математики и вычислительной физики

Параллельные вычислени

Лабораторная работа №1
«Решение задачи Коши для системы линейных неоднородных ОДУ методом Пикара»

Работу выполнила:
студентка II курса
магистратуры
Добрецова Е.В.
Группа:
5040102/40101
Преподаватель:
Козлов К.Н.

Санкт-Петербург
2025

Содержание

1. Постановка задачи и её формализация

Дана система линейных неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt} = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{f}(t), \tag{1}$$

и следующими начальными условиями:

$$y_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_n(t) \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$, матрица A имеет размерность $n \times n$ и является нижнетреугольной ($a_{ij} = 0$ при $i > j$) с единичными ненулевыми элементами.

Необходимо решить задачу методом последовательных приближений Пикара с применением циклической схемы распределения уравнений по процессам для обеспечения равномерной загрузки процессоров, осуществляя программирование на языке C с применением технологии OpenMP. Также требуется провести анализ метода путём следующих исследований:

- зависимость времени выполнения от размера системы;
- зависимость времени выполнения от числа параллельных процессов/потоков;
- зависимость ускорения от числа параллельных процессов/потоков;
- зависимость эффективности параллелизации от числа параллельных процессов/потоков.

2. Алгоритм метода Пикара и условия его применимости

2.1. Описание метода

Метод Пикара для задачи (1) с начальными условиями (2) определяет последовательность приближений $\boldsymbol{y}^{(k)}(t)$ следующим образом:

$$\boldsymbol{y}^{(k+1)}(t) = \boldsymbol{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \left(A\boldsymbol{y}^{(k)}(\tau) + \boldsymbol{f}(\tau)\right) d\tau, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Процесс продолжается до выполнения критерия сходимости:

$$\left\|\boldsymbol{y}^{(k+1)} - \boldsymbol{y}^{(k)}\right\| < \varepsilon$$

Интеграл вычисляется численно по квадратурной формуле трапеций на каждом временном интервале $[t_m, t_{m+1}]$:

$$\boldsymbol{y}_{m+1}^{(k+1)} = \boldsymbol{y}_m^{(k+1)} + \frac{\Delta t}{2}\left[A\boldsymbol{y}_m^{(k)} + \boldsymbol{f}(t_m) + A\boldsymbol{y}_{m+1}^{(k)} + \boldsymbol{f}(t_{m+1)})\right], \tag{3}$$

где $\Delta t = t_{m+1} - t_m,\ \boldsymbol{y}_m^{(k)}$ - приближение в узле t_m на k-й итерации.

2.2. Параллелизация вычислений

На каждой итерации вычисления правых частей для разных компонент системы независимы, так как они используют значения предыдущего приближения $\boldsymbol{y}^{(k)}$, которые на этом этапе полностью известны. Поэтому в данной задаче применяется декомпозиция по данным (parallelism across space). При таком способе работы каждая компонентная функция $y_i(t)$ считается независимо, уравнения равномерно распределяются между потоками OpenMP. Используется циклическая схема распределения.
Каждый поток независимо выполняет:

1. вычисление своих компонент
$$A\boldsymbol{y}^{(k)} + \boldsymbol{f}(t),$$

2. применение квадратурной формулы трапеций для этих компонент.

Синхронизация необходима только между итерациями k и $k{+}1$, когда все потоки должны завершить обновление своих компонент.

2.3. Условия применимости метода

Итерационный процесс Пикара сходится при выполнении следующих условий:

1. липшицевость правой части по переменной y;

2. ограниченность интервала интегрирования;

3. корректность задания начальных условий.

2.4. Стандарт OpenMP

OpenMP (от англ. Open Multi-Processing) - открытый стандарт для распараллеливания программ на языках C, C++ и Fortran, дающий описание совокупности директив компилятора, библиотечных процедур и переменных окружения, предназначенных для программирования многопоточных приложений на многопроцессорных системах с общей памятью.

3. Предварительный анализ задачи (проверка условий применимости метода)

Проверим условие Липшица по y для правой части в рассматриваемой области.

$F(t, y) = Ay + f(t)$ линейна по y, поэтому удовлетворяет усл. Липшица в любой ограниченной области:

$$\|F(t, y_1) - F(t, y_2)\| = \|A(y_1 - y_2)\| \leqslant L\|y_1 - y_2\|,$$

$L = \|A\|$

4. Тестовый пример с детальными расчётами для задачи малой размерности

Дана система из трёх линейных неодн. ОДУ:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = A\mathbf{y} + f(t),$$

$$\text{Г } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 0{,}3, \quad \Delta t = 0{,}1$$

Сетка: $t_m = \frac{m}{10}$, $m = \overline{0,3}$

Нулевое приближение $y_m^{(0)} = 0$, $m = \overline{0,3}$

Дальнейшие значения $y_{m+1}^{(k+1)}$ находятся по формуле (3).

Пусть доступно $p = 3$ потока OpenMP. Тогда поток с номером $m-1$, $m = \overline{1,3}$ будет считать y_m. Все потоки используют значения $y^{(k)}$, полученные на предыдущей итерации, поэтому вычисления полностью независимы.

Поток 0: вычисляет $\frac{dy_1}{dt} = y_1 + t$

Поток 1: вычисляет $\frac{dy_2}{dt} = y_1 + y_2 + t^2$

Поток 2: вычисляет $\frac{dy_3}{dt} = y_1 + y_2 + y_3 + \sin t$

После данных вычислений компоненты собираются в общий вектор, затем переходим к следующей итерации.

Итерация 1

$y^{(0)} \equiv 0 \Rightarrow A y_m^{(0)} + f(t_m) = f(t_m)$

$f(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad f(t_1) = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,01 \\ 0,099 \end{pmatrix}, \quad f(t_2) = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,04 \\ 0,199 \end{pmatrix},$

$f(t_3) = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,09 \\ 0,296 \end{pmatrix}$

Узел 0:

$y_0^{(1)} = 0$

Узел 1:

$y_1^{(1)} = 0 + 0,05 \cdot (f(t_1) + f(t_0)) = 0,05 \cdot f(0,1) = \begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,0005 \\ 0,00499 \end{pmatrix}$

Узел 2:

$y_2^{(1)} = y_1^{(1)} + 0,05\,(f(t_2) + f(t_1)) = \begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,0005 \\ 0,00499 \end{pmatrix} +$

$+ 0,05 \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,05 \\ 0,2985 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,003 \\ 0,0199 \end{pmatrix}$

Узел 3:

$y_3^{(1)} = y_2^{(1)} + 0,05\,(f(t_3) + f(t_2)) =$

$= \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,003 \\ 0,0199 \end{pmatrix} + 0,05 \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,13 \\ 0,495 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,045 \\ 0,0095 \\ 0,0447 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{aligned} y_0^{(1)} &= (0,0,0)^T \\ y_1^{(1)} &= (0,005;\ 0,0005;\ 0,00499)^T \\ y_2^{(1)} &= (0,02;\ 0,003;\ 0,0199)^T \\ y_3^{(1)} &= (0,045;\ 0,0095;\ 0,0447)^T \end{aligned}}$$

Итерация 2

Узел 0:

$$y_0^{(2)} = 0$$

Узел 1:

$$A y_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,0005 \\ 0,00499 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,0055 \\ 0,0105 \end{pmatrix}$$

$$y_1^{(2)} = y_0^{(2)} + 0,05\left(\cancelto{0}{A y_0^{(1)}} + \cancelto{0}{f(t_0)} + A y_1^{(1)} + f(t_1)\right) =$$

$$= 0,05\left(\begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,0055 \\ 0,0105 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,01 \\ 0,099 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0,00525 \\ 0,000775 \\ 0,00548 \end{pmatrix}$$

Узел 2:

$$A y_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,003 \\ 0,0199 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,023 \\ 0,0429 \end{pmatrix}$$

$$y_2^{(2)} = y_1^{(2)} + 0,05\left(A y_1^{(1)} + f(t_1) + A y_2^{(1)} + f(t_2)\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,00525 \\ 0,000775 \\ 0,00548 \end{pmatrix} + 0,05\left(\begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,0055 \\ 0,0105 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,01 \\ 0,099 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,023 \\ 0,0429 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,04 \\ 0,199 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0,0215 \\ 0,0047 \\ 0,0231 \end{pmatrix}$$

Узел 3:

$$A y_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,045 \\ 0,0095 \\ 0,0447 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,045 \\ 0,0545 \\ 0,0992 \end{pmatrix}$$

$$y_3^{(2)} = y_2^{(2)} + 0,05\left(Ay_2^{(1)} + f(t_2) + Ay_3^{(1)} + f(t_3)\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,0215 \\ 0,0047 \\ 0,0231 \end{pmatrix} + 0,05\left(\begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,023 \\ 0,0429 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,04 \\ 0,199 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. + \begin{pmatrix} 0,045 \\ 0,0545 \\ 0,0992 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,09 \\ 0,296 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0,04975 \\ 0,015075 \\ 0,05496 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &y_0^{(2)} = (0,0,0)^T \\ &y_1^{(2)} = (0,00525;\ 0,000775;\ 0,00548)^T \\ &y_2^{(2)} = (0,0215;\ 0,0047;\ 0,0231)^T \\ &y_3^{(2)} = (0,04975;\ 0,015075;\ 0,05496)^T \end{aligned}}$$

5. Подготовка контрольных тестов для иллюстрации метода
6. Модульная структура программы
7. Численный анализ решения задачи
8. Выводы