

Дана система из трёх линейных неодн. оду:

$$\frac{dy}{dt} = Ay + f(t),$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, f(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ \sin t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 0,3, \Delta t = 0,1$$

Сетка:  $t_m = \frac{m}{10}, m = \overline{0,3}$

Начальные условия:  $y_m^{(0)} = 0, m = \overline{0,3}$

Дальнейшие значения  $y_{m+1}^{(k+1)}$  находятся по формуле (3).

Пусть доступно  $p=3$  потока Орем МР. Тогда поток с номером  $m-1, m = \overline{1,3}$  будет считать  $y_m$ . Все потоки используют значения  $y^{(k)}$  полученные на предыдущей итерации, поэтому вычисления полностью независимы.

Поток 0: вычисляет  $\frac{dy_1}{dt} = y_1 + t$

Поток 1: вычисляет  $\frac{dy_2}{dt} = y_1 + y_2 + t^2$

Поток 2: вычисляет  $\frac{dy_3}{dt} = y_1 + y_2 + y_3 + \sin t$

После данных вычислений компоненты собираются в общий вектор, затем переходим к следующей итерации.

# Упражнение 1

$$y^{(0)} \equiv 0 \Rightarrow Ay_m^{(0)} + f(t_m) = f(t_m)$$

$$f(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f(t_1) = \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,01 \\ 0,099 \end{pmatrix}, f(t_2) = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,04 \\ 0,199 \end{pmatrix},$$

$$f(t_3) = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,09 \\ 0,296 \end{pmatrix}$$

Этап 0:

$$y_0^{(1)} = 0$$

Этап 1:

$$y_1^{(1)} = 0 + 0,05 \cdot (f(t_1) + f(t_0)) = 0,05 \cdot f(0,1) = \begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,0005 \\ 0,00499 \end{pmatrix}$$

Этап 2:

$$y_2^{(1)} = y_1^{(1)} + 0,05 (f(t_2) + f(t_1)) = \begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,0005 \\ 0,00499 \end{pmatrix} +$$

$$+ 0,05 \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,01 \\ 0,099 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,003 \\ 0,0199 \end{pmatrix}$$

Этап 3:

$$y_3^{(1)} = y_2^{(1)} + 0,05 (f(t_3) + f(t_2)) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,003 \\ 0,0199 \end{pmatrix} + 0,05 \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,09 \\ 0,296 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,045 \\ 0,0095 \\ 0,0447 \end{pmatrix}$$

$$y_0^{(1)} = (0, 0, 0)^T$$

$$y_1^{(1)} = (0,005; 0,0005; 0,00499)^T$$

$$y_2^{(1)} = (0,02; 0,003; 0,0199)^T$$

$$y_3^{(1)} = (0,045; 0,0095; 0,0447)^T$$

## Итерация 2

Узел 0:

$$y_0^{(2)} = 0$$

Узел 1:

$$Ay_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,0005 \\ 0,00499 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,0055 \\ 0,0105 \end{pmatrix}$$

$$y_1^{(2)} = y_0^{(2)} + 0,05(Ay_0^{(1)} + f(t_0) + Ay_1^{(1)} + f(t_1)) =$$
$$= 0,05 \left( \begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,0055 \\ 0,0105 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,01 \\ 0,099 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0,00525 \\ 0,000775 \\ 0,00548 \end{pmatrix}$$

Узел 2:

$$Ay_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,003 \\ 0,0199 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,023 \\ 0,0429 \end{pmatrix}$$

$$y_2^{(2)} = y_1^{(2)} + 0,05(Ay_1^{(1)} + f(t_1) + Ay_2^{(1)} + f(t_2)) =$$
$$= \begin{pmatrix} 0,00525 \\ 0,000775 \\ 0,00548 \end{pmatrix} + 0,05 \left( \begin{pmatrix} 0,005 \\ 0,0055 \\ 0,0105 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,1 \\ 0,01 \\ 0,099 \end{pmatrix} + \right.$$
$$\left. + \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,023 \\ 0,0429 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,04 \\ 0,199 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0,0215 \\ 0,0047 \\ 0,0231 \end{pmatrix}$$

Узел 3:

$$Ay_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,045 \\ 0,0095 \\ 0,0447 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,045 \\ 0,0545 \\ 0,0992 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 y_3^{(2)} &= y_2^{(2)} + 0,05(Ay_2^{(1)} + f(t_2) + Ay_3^{(1)} + f(t_3)) = \\
 &= \begin{pmatrix} 0,0215 \\ 0,0047 \\ 0,0231 \end{pmatrix} + 0,05 \left( \begin{pmatrix} 0,02 \\ 0,023 \\ 0,0429 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,04 \\ 0,199 \end{pmatrix} + \right. \\
 &\left. + \begin{pmatrix} 0,045 \\ 0,0545 \\ 0,0992 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,09 \\ 0,296 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0,04975 \\ 0,015075 \\ 0,05496 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_0^{(2)} &= (0, 0, 0)^T \\
 y_1^{(2)} &= (0,00525; 0,000775; 0,00548)^T \\
 y_2^{(2)} &= (0,0215; 0,0047; 0,0231)^T \\
 y_3^{(2)} &= (0,04975; 0,015075; 0,05496)^T
 \end{aligned}$$