



دانشکده‌ی علوم ریاضی



ساختمان داده‌ها

مهلت اصلی: ۵ آبان ۱۳۹۶

### تمرین سری ۱

مدّرس: دکتر شهرام خزائی

مهلت نهایی: ۱۹ آبان ۱۳۹۶

- پاسخ‌های خود را در قالب StudentNumber.pdf روی سامانه‌ی درس افزار آپلود کنید.
- تنها فرمت PDF قابل قبول است. از ارسال فایل‌های تصویری و فشرده شده جدا خودداری کنید.
- تمرین‌های مشابه نمره‌دهی نخواهند شد.
- ارسال پاسخ‌ها از طریق ایمیل قابل قبول نیست.
- حداکثر حجم فایل پاسخ‌ها یک مگابایت است. بنابراین توصیه می‌شود پاسخ‌هایتان را تایپ کنید.
- مهلت تحویل پاسخ‌ها همواره تا ساعت ۲۳:۵۵ تاریخ ذکر شده در صورت تمرین‌هاست و تمدید نخواهد شد.
- سوالات خود پیرامون این تمرین‌ها را با احمدرضا یوسفخانی (ahmadreza\_u@yahoo.com) مطرح نمایید.
- از مجموع ۱۹۰ نمره سوالات زیر کافی است به ۱۰۰ نمره پاسخ دهی کنید.

## مسأله‌ی ۱

اشتباه تحلیل زیر را پیدا کنید:  
می‌خواهیم ثابت کنیم الگوریتم مرتب سازی ادغامی از  $O(n)$  است!  
روی  $n$  استقرا می‌زنیم، برای  $n = 1$  که حکم درست است. فرض کنید ادعای ما برای همه آرایه‌های با اندازه‌ی کمتر از  $n$  درست باشد، یک آرایه  $n$  عنصری داریم. طبق الگوریتم به دو قسمت  $\frac{n}{2}$  تقسیم می‌شود. هر کدام از این دو قسمت مرتب می‌شود و بعد با  $O(n)$  ادغام می‌شود. طبق فرض استقرا هر کدام از این دو قسمت در  $O(\frac{n}{2})$  مرتب می‌شوند. پس در کل داریم:  $O(\frac{n}{2}) + O(\frac{n}{2}) + O(n)$  که از  $O(n)$  است. (۵ نمره)

## مسأله‌ی ۲

توابع زیر را از لحاظ رشد مرتب کنید: (۱۰ نمره)

$$\log^* n, \log(\log n), \log(n!), 4^{\log n}$$
$$n^{\frac{3}{2}}, \log(\log(n!)), (\log n)!, (\log n)^{\log n}$$

## مسأله‌ی ۳

با استفاده از قضیه اصلی، مرتبه زمانی روابط بازگشتی زیر را تحلیل کنید: (هر قسمت ۲ نمره)

$$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + cn \quad ۱.$$

$$T(n) = 3T(\frac{n}{3}) + \sqrt{n} \quad ۲.$$

$$T(n) = 6T(\frac{n}{3}) + O(n^2 \log n) \quad ۳.$$

$$T(n) = \sqrt{2}T(\frac{n}{2}) + O(\log n) \quad ۴.$$

$$T(n) = 2T(n-1) + O(n^3) \quad ۵.$$

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + O(\sqrt{n}) \quad ۶.$$

## مسأله‌ی ۴

درست یا غلط بودن گزاره‌های زیر را تعیین کنید: (هر قسمت ۲ نمره)

$$f(n) = O(f(n^2)) \quad \bullet$$

$$f(n) + g(n) = \Theta(\max(f(n), g(n))) \quad \bullet$$

$$f(n) = \Theta(f(\frac{n}{2})) \quad \bullet$$

$$f(n) \in O(n) \longrightarrow g(n) \in \Omega(f(n)) \quad \bullet$$

## مسأله‌ی ۵

الگوریتم مرتب‌سازی زیر را در نظر بگیرید و آنرا از نظر درستی و پایان‌پذیری و پیچیدگی زمانی بررسی کنید. (۱۵ نمره)

```
pos ← 0
while True do
  if pos == 0 then
    pos ← 1
  end if
  if pos >= len(array) then
    break
  end if
  if array[pos] >= array[pos - 1] then
    pos ← pos + 1
  else
    swap(array[pos], arr[pos - 1])
    pos ← pos - 1
  end if
end while
```

## مسأله‌ی ۶

الگوریتم مرتب‌سازی آرایه  $A$  را به صورت زیر در نظر بگیرید:  
کوچک‌ترین عنصر  $A$  را پیدا کن و آنرا با  $A[1]$  جابجا کن. سپس دومین کوچک‌ترین عنصر  $A$  را پیدا کن و آن را با  $A[2]$  جایگزین کن. به همین ترتیب تا  $n - 1$  امین کوچک‌ترین عنصر ادامه بده. به این الگوریتم selection sort می‌گویند. (هر قسمت ۵ نمره)

- شبه کدی برای آن بنویسید.
- درستی الگوریتم را به طور دقیق اثبات کنید.
- مرتبه اجرای این الگوریتم را در بهترین و بدترین حالت محاسبه کنید و بر حسب نماد  $\Theta$  نشان دهید.

## مسأله‌ی ۷

دو آرایه مرتب  $A$  و  $B$  را به ترتیب با اندازه‌های  $m$  و  $n$  در نظر بگیرید. یک الگوریتم با زمان لگاریتمی ارائه دهید که  $k$  امین عوض کوچک در اجتماع دو آرایه را پیدا نماید. (۱۰ نمره)

## مسأله‌ی ۸

یک ماتریس  $n \times n$  در حافظه ذخیره شده است. به طوری که عدد هر خانه از خانه راست و پایینی خود کوچک‌تر است. الگوریتمی از  $O(n)$  در بدترین حالت ارائه دهید که مشخص کند که عدد  $X$  در ماتریس داده شده وجود دارد یا نه. (۱۵ نمره)

## مسئله‌ی ۹

الگوریتم merge sort را در حالت میانگین از نظر زمانی تحلیل کنید. (۱۰ نمره)

## مسئله‌ی ۱۰

رابطه زیر را ثابت کنید: (۱۰ نمره)

$$\log_k n = \Theta(\log_2 n)$$

## مسئله‌ی ۱۱

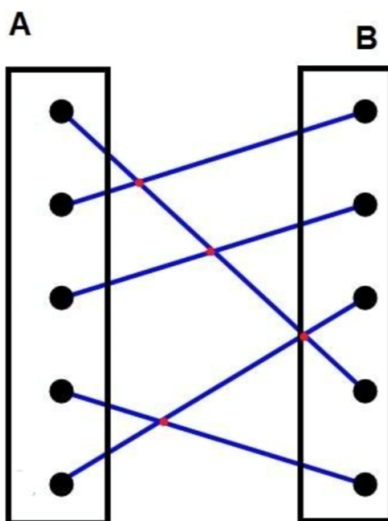
آرایه  $2n$  عضوی از اعداد متمایز داریم و می‌دانیم که این آرایه یا صعودی است و یا قابل افراز به دو زیر دنباله  $n$  عضوی است که یکی صعودی و دیگری نزولی است. مثلاً دنباله  $[1, 7, 6, 5, 8, 4, 3, 9, 10, 2]$  در این شرایط صدق می‌کند چون قابل افراز به دو زیر دنباله  $[1, 5, 8, 9, 10]$  و  $[7, 6, 4, 3, 2]$  است. دو سوال درباره این آرایه حل کنید. (هر قسمت ۱۵ نمره)

• با  $n + 1$  بار مقایسه پیدا کنید که این آرایه مرتب شده است یا خیر.

• با  $n$  بار مقایسه هم می‌توان این مسئله را حل کرد؟

## مسئله‌ی ۱۲

گراف دو بخشی  $G$  با دو بخش  $A$  و  $B$  روی صفحه مطابق شکل کشیده است (فرض کنید رئوس در هر بخش از بالا به پایین به ترتیب با اعداد  $1, 2, 3$  شماره‌گذاری شده‌اند). می‌دانیم درجه هر راس در  $A$  دقیقاً ۱ است اما محدودیت خاصی روی تعداد و درجه رئوس در بخش  $B$  نداریم. الگوریتمی طراحی کنید که با دانستن همسایه‌ی هر راس درون  $A$  تعداد نقاط برخورد یال‌های گراف را به دست آورد. (نقاط برخورد در شکل با قرمز مشخص شده‌اند) (۲۰ نمره)



### مسأله‌ی ۱۳

دو آرایه  $n$  تایی  $A$  و  $M$  که  $A$  شامل اعداد حقیقی متمایز است و  $M[k] = k$  برای  $k = 1 \dots n$  را در نظر بگیرید. می‌خواهیم الگوریتمی طراحی کنیم که اعداد  $M$  را به صورتی مرتب کند که:

$$A[M[1]] < A[M[2]] < \dots < A[M[n]]$$

برای این کار از الگوریتم زیر استفاده می‌کنیم:

```
for  $i = 1$  to  $n - 1$  do
  for  $j = i + 1$  to  $n$  do
    if  $A[M[i]] > A[j]$  then
      EXCHANGE( $M[i], M[j]$ )
    end if
  end for
end for
```

۱. آیا الگوریتم فوق درست کار می‌کند؟ برای پاسخ به این سوال مقاله زیر را ببینید:

László Csirmaz. A simple algorithm with no simple verification. (1990). Unpublished. Available at: <http://eprints.renyi.hu/7/1/simple.pdf>

۲. در خط سوم  $A[j]$  را با  $A[M[j]]$  جایگزین کنید و با استفاده از نوردایی حلقه ثابت کنید که الگوریتم جدید درست کار می‌کند. (30 نمره)