

## TAREA 3: MAT-269

Profesor: Ronny Vallejos

**Problema 1** [40 puntos]. En el contexto de un modelo de regresión con respuesta multivariada.

- a) Demuestre que los estimadores máximo verosímiles de  $\beta$  y  $\Sigma$  son:

$$\begin{aligned}\hat{\beta} &= (\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{Z}^\top \mathbf{Y}, \\ \hat{\Sigma} &= \frac{1}{n} (\mathbf{Y} - \mathbf{Z} \hat{\beta})^\top (\mathbf{Y} - \mathbf{Z} \hat{\beta}).\end{aligned}$$

- b) Demuestre que  $n\hat{\Sigma} \sim W(\Sigma, n - r - 1)$ .

- c) Demuestre que  $\text{cov}[\hat{\beta}_i, \hat{\beta}_k] = \sigma_{ik} (\mathbf{Z}^\top \mathbf{Z})^{-1}$ .

- d) Demuestre que  $E[\hat{\epsilon}_{(i)}^\top \hat{\epsilon}_{(k)}] = \sigma_{ik} (n - r - 1)$  y  $\text{cov}[\hat{\beta}_i, \hat{\epsilon}_{(k)}] = 0$ .

**Problema 2** [30 puntos]. Considere los siguientes datos de una variable predictora  $z_1$  en función de dos variables respuestas  $Y_1$  e  $Y_2$ :

$z_1$	-2	-1	0	1	2
$y_1$	5	3	4	2	1
$y_2$	-3	-1	-1	2	3

- a) Determine los estimadores de mínimos cuadrados de los parámetros del modelo de regresión

$$\begin{aligned}Y_{j1} &= \beta_{01} + \beta_{11} Z_{j1} + \epsilon_{j1} \\ Y_{j2} &= \beta_{02} + \beta_{12} Z_{j1} + \epsilon_{j2}, \quad j = 1, 2, 3, 4, 5.\end{aligned}$$

- b) Calcule los valores estimados  $\hat{\mathbf{Y}}$  del modelo los residuos  $\hat{\epsilon}$ .

- c) Obtenga una región del 95% de confianza para las respuestas  $Y_{01}$  e  $Y_{02}$  correspondientes al valor  $\mathbf{z}_0^\top = (0.5, 0.5)$

**Problema 2** [30 puntos]. La amitriptina es recetada por algunos médicos como un antidepresivo. Existen algunos efectos secundarios de esta droga como: pulsaciones cardíacas irregulares, presión arterial anormal, entre otras. Un conjunto de datos de 17 pacientes a los cuales se les administró esta droga fue recolectado en un estudio. Las variables respuestas fueron las siguientes:

$Y_1$  = Nivel de plasma Total

$Y_2$  = Cantidad de amitriptina presente en el plasma

Se midieron cinco variables predictoras

$Z_1$  = Género (1 Female, 0 Male) (GEN)

$Z_2$  = Cantidad de antidepresivo ingerido (AMT)

$Z_3$  = Medición de la onda cardíaca (PR)

$Z_4$  = Presión diastólica (DIAP)

$Z_5$  = Medida de onda cardíaca (QRS)

- a) Escriba un modelo de regresión con respuesta multivariada para abordar este problema.
- b) Determine los estimadores de mínimos cuadrados, valores ajustados y residuos usando los valores de la tabla con las observaciones.
- c) Realice un análisis de residuos.
- d) Construya una región de confianza del 95% para ambas variables respuestas para  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 1200$ ,  $z_3 = 140$ ,  $z_4 = 70$  y  $z_5 = 85$ .

$y_1$ TOT	$y_2$ AMI	$z_1$ GEN	$z_2$ AMT	$z_3$ PR	$z_4$ DIAP	$z_5$ QRS
3389	3149	1	7500	220	0	140
1101	653	1	1975	200	0	100
1131	810	0	3600	205	60	111
596	448	1	675	160	60	120
896	844	1	750	185	70	83
1767	1450	1	2500	180	60	80
807	493	1	350	154	80	98
1111	941	0	1500	200	70	93
645	547	1	375	137	60	105
628	392	1	1050	167	60	74
1360	1283	1	3000	180	60	80
652	458	1	450	160	64	60
860	722	1	1750	135	90	79
500	384	0	2000	160	60	80
781	501	0	4500	180	0	100
1070	405	0	1500	170	90	120
1754	1520	1	3000	180	0	129