תרגיל בית מס' 4 במבוא מורחב למדעי המחשב – 315328963

שאלה 1

א. נוכיח כי $p(n) = n!$. בעיה זאת היא כמו סידור n איברים שונים בשורה (ללא חזרות). ראשית, נקבע מהו האיבר השמאלי ביותר בסידור: ישנן n אפשרויות לכך. לאחר הבחירה (נסמן מספר זה i) תהיינה n-1 אפשרויות לבחירת המספר שמימין לו (כל המספרים ללא i, כי אין חזרות). במקום שמימין לו, תהיינה n-2 אפשרויות לבחירת המספר שמימין לו, וכך הלאה, עד שהמספר האחרון מימין בסידור, תהיה אפשרות אחת בלבד לבחור אותו (המספר שנשאר). נשתמש בעקרון הכפל, ונקבל כי מספר האפשרויות הוא $p(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

ב. נוכיח כי $w(n) = 2^{n-1}$. נבחין כי המקרה הגרוע ביותר, קורה כאשר המספר עליו רצים (pivot) הוא המקסימלי, או המינימלי ברשימה. זאת משום שבמקרה כזה, הפונקציה תרוץ רקורסיבית על אותה רשימה ללא ה-pivot.
כאשר הרשימה מורכבת מאיברים מקסימליים או מינימליים אחד אחרי השני, קל להבין כי הפונקציה תבצע n-1 קריאות רקורסיביות, כאשר רק האחרונה תגיע לתנאי העצירה, כלומר, ללא לבנות את הרשימות (קטן, גדול ושווה ל-pivot).
עם זאת, בכל מקרה בו ה-pivot אינו המקסימלי או המינימלי ברשימה, תיווצרנה שתי רשימות עליהן ירוצו רקורסיבית: הראשונה של הקטנים מה-pivot, השנייה של הגדולים מה-pivot). במקרה זה, שתי הרשימות יגיעו בפחות קריאות רקורסיביות כל אחת לתנאי העצירה, ועומק הרקורסיה יהיה נמוך יותר מאשר במקרה הראשון עליו כתבנו. כך, הרשימות יוכלו לרוץ במקביל ולא יחכו לקריאה רקורסיבית אחת מתמשכת בשביל להתקדם הלאה. לכן מקרה זה יהיה יעיל יותר מהראשון.
לכן, בכדי לקבל את המקרה הגרוע ביותר, ברשימה אפשרית יהיה על כל איבר שמאלי ביותר להיות המקסימלי או המינימלי (2 אפשרויות), האיבר הבא יצטרך להיות המקסימלי או המינימלי מבין הרשימה הנותרת וכך הלאה. לאיבר האחרון יש אפשרות אחת לבחור (פשוט האיבר שנותר).
כלומר, ברשימה של המקרה הגרוע ביותר, ישנן 2 אפשרויות לכל אחד מ-n-1 האיברים השמאליים, נכפיל אותן (כי הן תלויות) לפי עקרון הכפל ונקבל בסה"כ $w(n) = 2^{n-1}$.

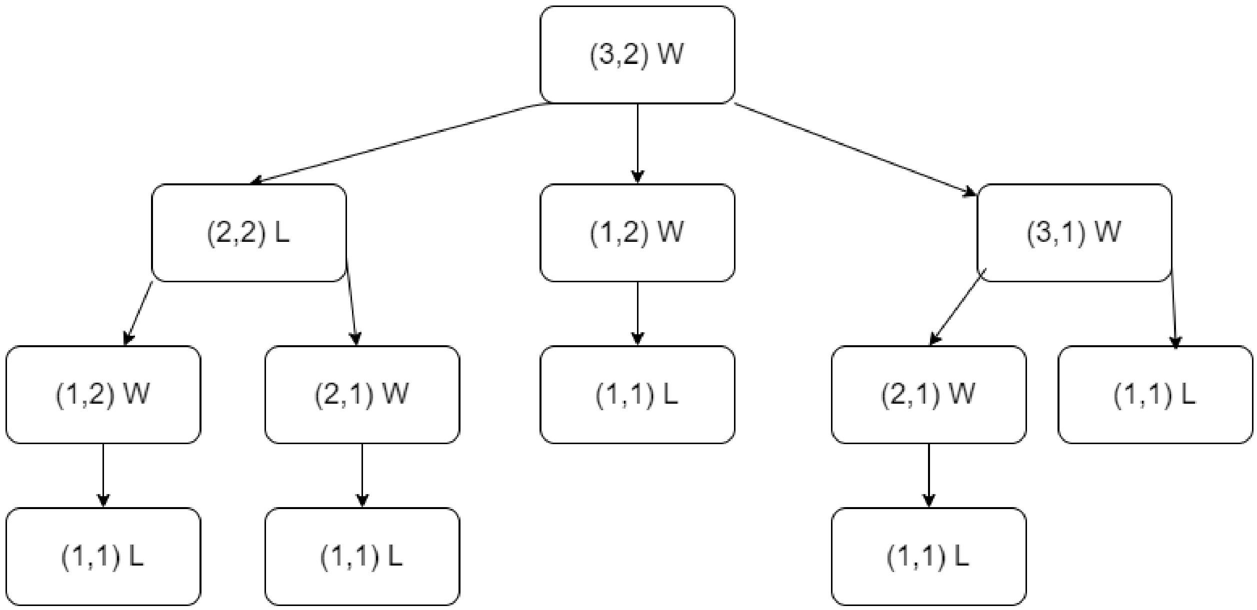
ג. נחשב את הגבול לפי מבחן המנה לסדרות (כמובן שאיברי סדרות אלה הם כולם חיוביים) לפי אריתמטיקה של גבולות:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{w(n+1)}{p(n+1)} \cdot \frac{p(n)}{w(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0$$

ממבחן המנה לסדרות נובע כי $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{w(n)}{p(n)} = 0$ (מכיוון ש-L>1). מכך נוכל להסיק כי ככל ש-n גדל, הסיכוי לכך שזמן הריצה של האלגוריתם יהיה גרוע ביותר יורד ואף נהיה אפסי. זאת, משום שככל שמספר איברי הרשימה גדל, מספר הדרכים לסדר את הרשימה בכדי לקבל את זמן הריצה הגרוע ביותר קטן ביחס למספר האפשרויות הכללי של סידור הרשימה.

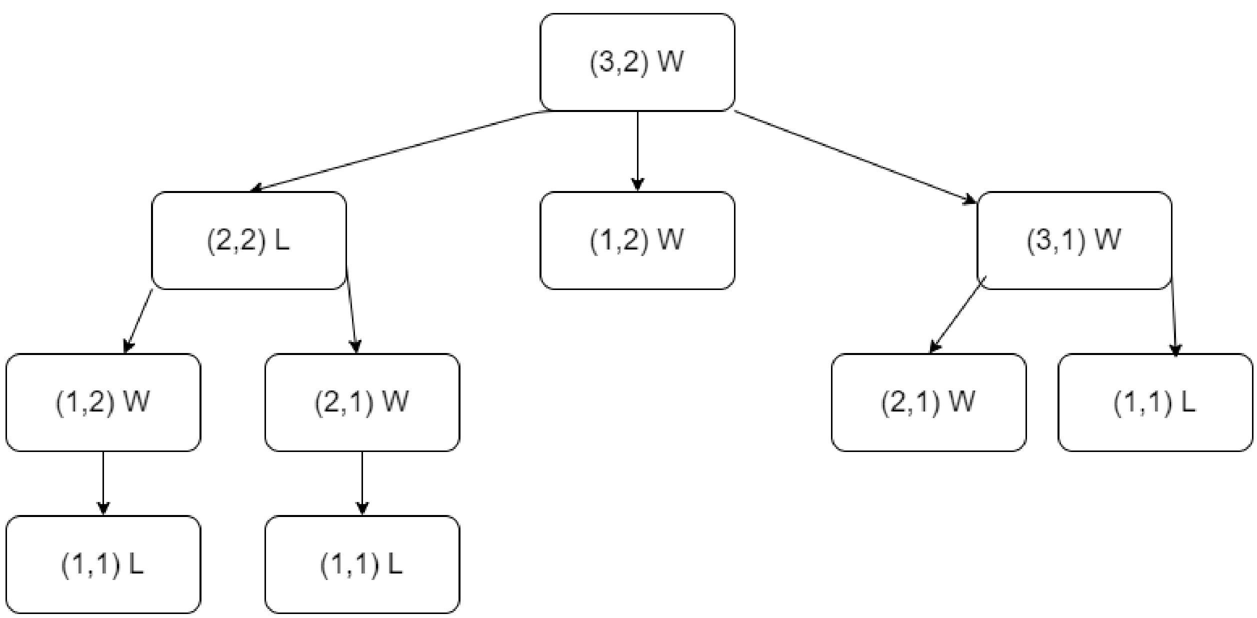
<u>שאלה 2</u>

ב. להלן התרשים:



ניתן לראות כי הקונפיגורציה (1,1) **מופיעה 5 פעמים.**

ד. להלן התרשים:



ניתן לראות כי כעת, לאחר ממואיזציה, הקונפיגורציה (1,1) **מופיעה 3 פעמים**.

שאלה 3

א. מקרי בסיס:

<u>n=0</u>: במקרה כזה had(0)=(0). ניתן לראות ישנה שורה אחת, שהיא העליונה, ולכן לא דורשת שיהיה בה מספר זהה של אפסים ואחדות.

<u>n=1</u>: במקרה כזה $had(1) = \begin{pmatrix} had(0) & had(0) \\ had(0) & \overline{had(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. אנו רואים כי בשורה התחתונה אכן יש מספר שווה של אפסים ואחדות. בשורה העליונה אנו לא דורשים זאת. לכן זה מתקיים.

<u>צעד האינדוקציה</u>: נניח נכונות עבור n-1 ונוכיח עבור n. כלומר, במטריצת had(n-1) יש בכל שורה (מלבד העליונה), מספר זהה של אפסים ואחדות.

נסתכל על had(n). לפי הגדרה, $had(n) = \begin{pmatrix} had(n-1) & had(n-1) \\ had(n-1) & \overline{had(n-1)} \end{pmatrix}$. נשים לב שבחלק העליון של had(n), מתקיים לפי הנחת האינדוקציה כי כל השורות כוללות מספר זהה של אפסים ואחדות, מלבד השורה העליונה. לכן החלק העליון מתאים למה שברצוננו להוכיח.

$\overline{had(n-1)}$, מחליפה את ערכי ה-0 וה-1 של מטריצת $had(n-1)$. עם זאת, לפי הנחת האינדוקציה, בכל השורות (מלבד הראשונה) של $had(n-1)$ יש מספר זהה של אפסים ואחדות, לכן לאחר ההחלפה, באותן שורות של $\overline{had(n-1)}$ יהיה גם מספר זהה של אפסים ואחדות.

כלומר, בחלק התחתון של had(n), מתקיים שבכל השורות מלבד העליונה יש מספר זהה של אפסים ואחדות. עם זאת, לצורך ההוכחה אנו צריכים להראות שגם בשורה העליונה של החלק התחתון יש מספר זהה של אפסים ואחדות. נראה זאת.

נסמן ב-k את מספר האחדות בשורה העליונה של מטריצת $had(n-1)$, לכן מספר האפסים בשורה זאת יהיה n-k. $\overline{had(n-1)}$ מחליפה את האחדות באפסים ולהיפך, ולכן יהיו בה n-k אחדות, ו-k אפסים. בסה"כ בשורה העליונה של החלק התחתון של had(n) יהיו n אחדות ו-n אפסים, כלומר מספר זהה.

לכן, הצלחנו להוכיח כי במטריצת had(n), כל השורות מלבד העליונה כוללות מספר זהה של אפסים ואחדות.

ג. נראה כי זמן הריצה של הפונקציה הוא $O(n^2)$. ראשית, נשים לב כי הפונקציה מבצעת בסה"כ n קריאות רקורסיביות.

בכל קריאה רקורסיבית, הפונקציה קוראת לאותה פונקציה, אך על מטריצת Hadammard מסדר נמוך יותר. בין אם מדובר במטריצה הרגילה או בבינארית ה-"הופכית" לה, נקבע לפי מיקום האיבר במטריצה המקורית (כלומר לפי j ו-i). לפיכך נערכת השוואה בין ערך זה לבין הערך של חצי מגודל השורה, או חצי מגודל העמודה: 2^{n-1}. חישוב זה נעשה בסיבוכיות של O(n) (כפי שנכתב בהוראות השאלה). נניח כי השוואה בין מספרים וחיסור קל (כפי שמופיעים בקוד) נעשים בסיבוכיות זמן קבועה.

אם כך, בכל קריאה רקורסיבית מתבצעות פעולה באורך n+C. ישנן n קריאות רקורסיביות ולכן בסה"כ מתבצעות הפעולות: $n(n+C)=n^2+Cn=O(n^2)$. לכן סיבוכיות זמן הריצה של הפונקציה היא $O(n^2)$.

שאלה 5

נסתכל על פעולות הכפל שניתנו לנו בתחילת השאלה. נשים לב כי עבור כפל של מספר א' בעל 3 ביטים למספר ב' בעל 4 ביטים, נעשות 19 פעולות: 12 פעולות כפל, ו-7 פעולות חיבור.

נכליל ונאמר כי באופן כללי, עבור 2 מספרים בעלי a ו-b ביטים, תיעשנה לפחות a*b פעולות כפל (בין כל ביט וביט), ועוד מספר משתנה של פעולות חיבור הכרחיות. לכן, נוכל לומר שהסיבוכיות של הכפל בין שני המספרים תהיה O(ab).

נפתח עוד טענת עזר שתהיה חשובה להמשך הפתרון. עבור מספר בעל k ביטים (הגדול מ-1), במקרה הגרוע ביותר סיבוכית (בו כל הביטים הם 1), העלאה שלו בריבוע תיתן מספר בעל 2*k ביטים (וזה האורך המקסימלי).

נוכיח זאת באינדוקציה. ניתן מקרה בסיס בו k=2, ואז k*k=11*11=1001, אכן קיבלנו מספר בן 2*k=4 ביטים.

<u>צעד</u>: נניח נכונות עבור k ונוכיח עבור k+1. המספר שלנו הוא 111....111, כלומר k+1 אחדים. נכפיל אותו בעצמו. עבור מכפלה של k הביטים הימניים של המספר ב-k הביטים הימניים נקבל מספר בעל k ביטים (מהנחת האינדוקציה). כעת נכפיל את האחד השמאלי ביותר. ראשית, נכפיל אותו באחד השני משמאל, ונקבל 1, שימוקם (בסכימת המספרים) (k+k-1)+1=2k מספרים אחרי האפס. נחזור על הפעולה הזאת עבור ה-1 השמאלי ביותר של המספר התחתון, ונקבל בחלק של הסכימה שיהיה 1 שימוקם 2k+1 מספרים אחרי האפס ("נקודה עשרונית"). נשאר לנו לעשות את ההכפלה של ה-1 השמאלי ביותר בשמאלי ביותר של עצמו, ונקבל 1 שימוקם 2k+1 מספרים אחרי האפס. נזכור כי בסכימה יש לנו 1 נוסף כזה, ולכן כאשר נחבר אותם נקבל 1 שימוקם 2k+2 מספרים אחרי האפס. כלומר, במספר שנקבל יהיו 2k+2 ביטים. אז הוכחנו את טענת העזר.

כעת נסתכל על הקוד ונתייחס למקרה הגרוע ביותר. נשים לב כי מספר האיטרציות תהיינה כמספר הביטים של b. זאת משום שכל איטרציה מקטינים את b בביט אחד (ע"י הפעולה b=b//2, כפי שנאמר בשאלה). לכן, לפי נתוני השאלה, תהיינה m איטרציות.

ישנם 2 "מסלולים" שמביאים לפעולות כפל:

א. הראשון אינו תלוי בתנאי והוא קורה כל איטרציה, והוא a=a*a. ידוע לנו כי a הוא בעל n ביטים. נסתכל על האירציות הראשונות בכדי להדגים את החוקיות. באיטרציה הראשונה, מכיוון שהאורך של a הוא n ביטים ומתבצעת פעולת כפל, הסיבוכיות של הפעולה תהיה $O(n^2)$ (כפי שנאמר למעלה). ה-a החדש יהיה במקרה הגרוע ביותר באורך 2n (כפי שהראנו למעלה). באיטרציה השני הסיבוכיות של הפעולה תהיה $O(4n^2)$, וה-a החדש יהיה עד 4n ביטים. באיטרציה השלישית הסיבוכיות של הפעולה תהיה $O(16n^2)$ וה-a החדש יהיה עד 8n ביטים.
כלומר, באיטרציה ה-k הסיבוכיות של פעולת הכפל תהיה $O(2^{2(k-1)})$, וה-a החדש יהיה $2^m n$.
לאחר האיטרציה ה-m (בסיום זמן הריצה), נראה כי כלל הפעולות שייעשו ב'מסלול' הזה הן הסכום: $O(n^2)+O(4n^2)+O(16n^2)+\ldots+O(2^{2m-2}n^2)$.

ב. ה'מסלול' השני הוא משפט התנאי (מופעל כאשר b הוא מספר אי-זוגי). במקרה הגרוע ביותר, נניח כי התנאי מופעל בכל איטרציה. נבחן את חוקיות הפעולה ונראה כי בכל מקרה היא בסיבוכיות נמוכה יותר מה'מסלול' הראשון. באיטרציה הראשונה, מכפילים a*1 (לעומת a*a במסלול הראשון) בשנייה, res=a, ואילו a מתעדכן וכעת הוא a^2 ומתבצעת המכפלה a^2*a (לעומת a^2*a^2 במסלול הראשון), בשלישית $res=a^3$ ואילו a מתעדכן וכעת הוא a^4 ומתבצעת המכפלה a^3*a^4 (לעומת a^4*a^4 במסלול הראשון). בסה"כ בכל איטרציה מתבצעת המכפלה $a^{k-1}*a^k$ שהיא 'נמוכה יותר' סיבוכית מאשר a^k*a^k.

לכן, בבואנו לחשב את הסיבוכיות של הפונקציה, נחשב רק את פעולות המסלול הראשון (הסיבוכיות העליונה יותר):

$O(n^2)+O(4n^2)+O(16n^2)+\ldots+O(2^{2m-2}n^2)=O(2^{2m}n^2)=O(4^m n^2)$.

שאלה 6

ב. בקוד שכתבתי: הסיבוכיות היא אקספוננציאלית, כלומר מעריכית. נראה זאת ע"י מציאת חסם מלמטה, כך שהסיבוכיות היא $O(3^n)$. נסתכל על המקרה הגרוע ביותר, בו כל אות שונה ממשנה (במילה השנייה). אז נצטרך לבחון 3 מקרים כל פעם:

1. האות הוחלפה באות אחרת במילה השנייה, ואז נעבור על המחרוזות החל מהתו הבא

2. האות הושמטה מהמחרוזת השנייה, ואז נבדוק את המחרוזת הראשונה מהאות הבאה, ואת המחרוזת השנייה מאותה האות בה עצרנו

3. במחרוזת השנייה הוספה אות לפני האות שנעצרנו בה, לכן נחפש על מקרה בו האות של המחרוזת השנייה 'התווספה' לפני האות שעצרנו בה במחרוזת הראשונה (ואז ייתכן למשל שכל ההמשך יהיה זהה)

נשים לב שבאות הראשונה יהיו לנו 3 קריאות רקורסיביות. במקרה הגרוע ביותר, של המשך חוסר התאמה (כלומר האות הראשונה במחרוזת הראשונה החדשה תהיה שונה מהאות הראשונה במחרוזת השנייה החדשה), יהיו לנו 3 קריאות רקורסיביות נוספות לכל קריאה ראשונית, כלומר בסה"כ ברמה השנייה יהיו 9 בנים.

נמשיך כך, ונראה כי ברמה ה-k של עץ הרקורסיה יהיו 3^k בנים לרקורסיה, כלומר בסך הכל ברמה ה-n יהיו 3^n בנים. בהנחה שבכל צומת ('בן'), הסיבוכיות היא לפחות בזמן קבוע, נוכל לתת את החסם התחתון לסיבוכיות שהוא $O(3^n)$, לכן הסיבוכיות היא אקספוננציאלית.

ד. סיבוכיות הקוד לאחר הוספת הממואיזציה תהיה $O(n^3)$. נסביר זאת. נשים לב כי בכל בדיקה נוספת שאנו עושים, בסופו של דבר תהיינה בדיקות שיחזרו על עצמן. למשל, בשתי האפשרויות הראשונות (שהוסברו למעלה), אנו נבצע בדיקה נוספת על אותה המחרוזת הראשונה. כשאנו מוסיפים איבר למחרוזת הראשונה, נשים לב שלאחר מספר פעולות אנחנו נחזור שוב על אותן הבדיקות שנבצע על המחרוזת הראשונה (למשל כאלה שהוזכרו כבר).

לכן, כשאנו משתמשים בממואיזציה, אנחנו חוזרים פחות על פעולות, ולאחר שנעבור על אופציה אחת מבין השלוש (בסיבוכיות של $O(n)$ בסך הכל כולל סלייסינג), נגלה שעשינו בדיקות ששמורות כעת במילון שלנו. נציין כי עבור על אופציה, נעשה פעולות בסיבוכיות של $O(n^2)$: n עבור n ריצות רקורסיביות רלוונטיות, ועבור כל ריצה כזאת סלייסינג בסיבוכיות של $O(n)$, סך הכל $O(n^2)$. לכמות הפעולות של שאר האופציות נתייחס כאלל כמות קבועה – למשל m פעולות (אנחנו לא מריצים את כל הרקורסיה עוד פעם באופציות האלה). כלומר עבור כל איבר במחרוזת הראשונה עליו אנחנו רצים באופן רקורסיבי, אנחנו מבצעים $O(n^2+m)$ פעולות. למחרוזת יש n איברים, אז נסכום ונקבל בסה"כ $O(n\cdot(n^2+m)) = O(n^3+n^2m) = O(n^3)$. נציין כי סיבוכיות זאת היא בממוצע, מפני שעבור כל ריצה ישנה בדיקה במילון שעלותה היא $O(1)$ בממוצע.