Ciąg Fibonacciego w naturze i muzyce

inż. Filip Rutkowski, inż. Kasper Seweryn

Czym jest ciąg Fibonacciego?

Ciąg Fibonacciego jest ciągiem liczb, w którym każdy kolejny element jest sumą dwóch poprzednich elementów. Rozpoczyna on się od dwóch jedynek:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89\ldots$$

Ciąg ten został odkryty przez włoskiego matematyka — Leonarda z Pizy, który uchodzi za jednego z najwybitniejszych matematyków swoich czasów.

Definicja dla informatyków :)

```
def fibonacci(n):
  if n < 2:
    return 1

  return fibonacci(n - 1) + fibonacci(n - 2)
```

Zabawa z Fibonaccim

Co się wydarzy gdy podniesiemy liczy z ciągu Fibonacciego do drugiej potęgi?

$$1^2, 1^2, 2^2, 3^2, 5^2, 8^2, 13^2, 21^2, \ldots = 1, 1, 4, 9, 25, 64, 169, 441, \ldots$$

$1 + 1 = 2$	$1 + 1 + 4 = 6$	$= 2 * 3$
$1 + 4 = 5$	$1 + 1 + 4 + 9 = 15$	$= 3 * 5$
$4 + 9 = 13$	$1 + 1 + 4 + 9 + 25 = 40$	$= 5 * 8$
$9 + 25 = 34$	$1 + 1 + 4 + 9 + 25 + 64 = 104$	$= 8 * 13$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

Czym jest złota proporcja?

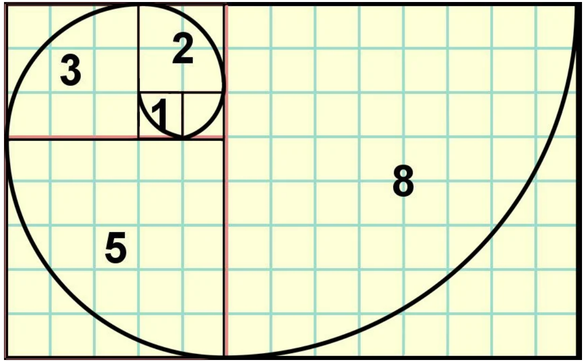
Złota proporcja jako stosunek dwóch liczb ciągu Fibonacciego znajdujących się obok siebie

Gdy zaczniemy dzielić coraz większe, sąsiadujące liczby ciągu Fibonacciego, jej wynik będzie coraz bardziej zbliżał się do:

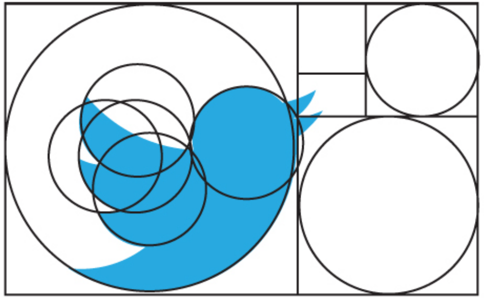
$$\phi \approx 1.618033988749\ldots$$

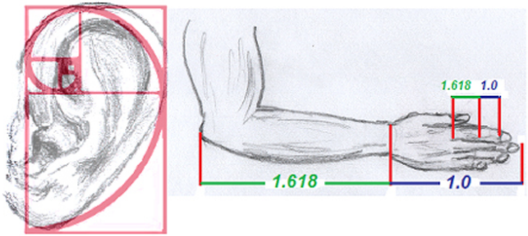
Im większe liczby dzielimy, tym wynik jest dokładniejszy. Istotną kwestią jest to, że zarówno liczby Fibonacciego, jak i złota proporcja, występują bardzo często w otaczającym nas świecie.

Graficzną reprentację ciągu Fibonacciego przedstawia złota spirala. Składa się ona z kwadratów o wymiarach kolejnych liczb ciągu.



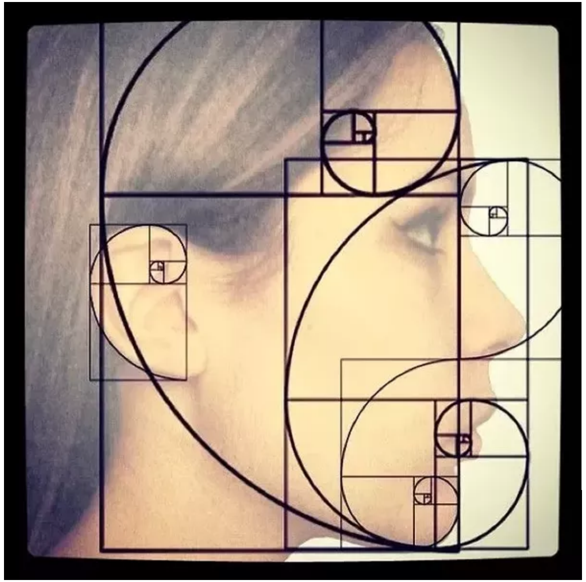
Gdzie znajdziemy ciąg Fibonacciego oraz złotą proporcję?

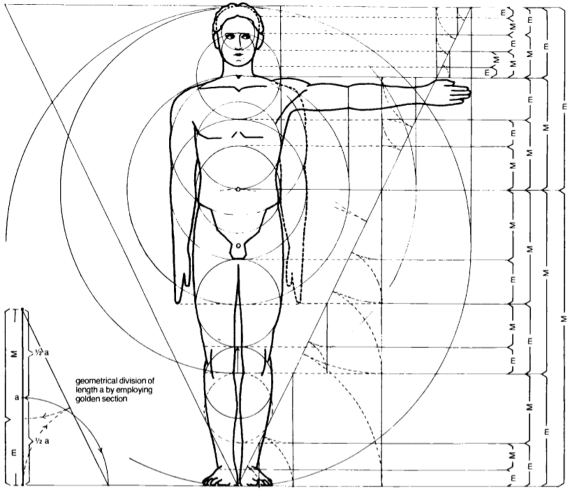


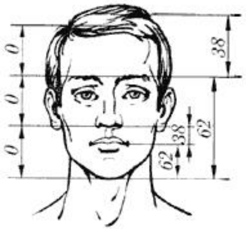


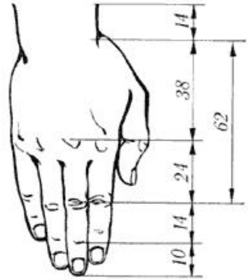
Złota proporcja w anatomii

Złotą proporcję można zauważyć także w anatomii człowieka. Nie u każdego człowieka proporcje muszą być one idealnie zachowane, ale na pewno są bardzo zbliżone.







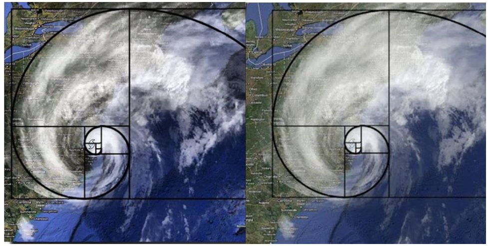


Porozmawiajmy o ananasach! 🍍 🍍 🍍

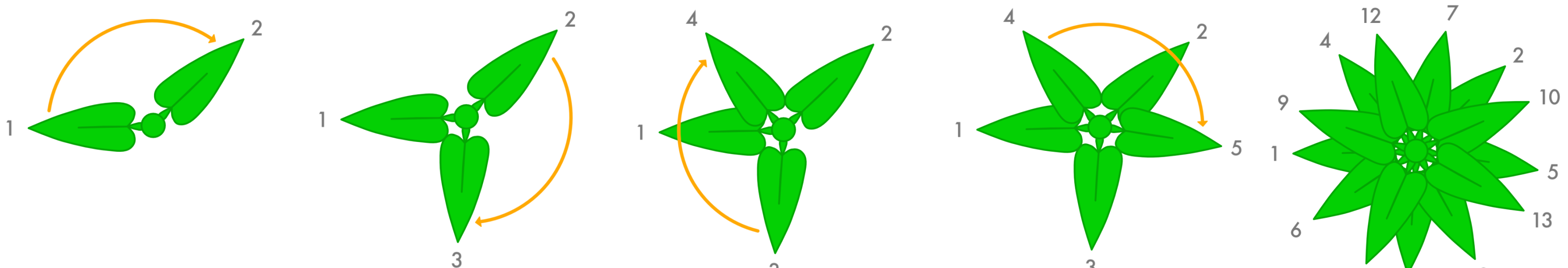
Ciąg Fibonacciego i złota proporcja w naturze

Złoty podział występuje w:

- Kształtach spiralnych galatktyk
- Formujących się huraganach



- Ułożeniu gałęzi na pniu roślin i w nerwów liści (https://www.nature.com/articles/s41598-018-31763-1#Fig3)
- Ulistnieniu roślin - każdy kolejny liść rośnie co $360(1 - \frac{1}{\phi})^\circ \approx 137.5^\circ$



Ciąg Fibonacciego i złota proporcja w muzyce

Kolejną bardzo ciekawą informacją jest to, że ciąg Fibonacciego można stosować także w muzyce. Kompozytorzy już dawno temu odkryli, że umiejętne wykorzystanie danych z ciągu, może ułatwić stworzenie kompozycji na bardzo wysokim poziomie. Jednym z najbardziej znanych przykładów jest tutaj Canon D-dur Johanna Pachelbela, na któym bazuje wiele znanych współczesnych utworów, jak na przykład "No Women, No cry" Boba Marleya, albo "Let It Be" zespołu "The Beatles".

Ciąg Fibonacciego i złota proporcja w muzyce

Ciąg Fibonacciego i złota proporcja w muzyce

TOOL — Lateralus

Black
Then
White are
All I see
In my infancy
Red and yellow then came to be
Reaching out to me
Lets me see

https://youtu.be/Y7JG63IuaWs?t=94

Matematyka vs Informatyka

Interaktywny przykład

```
const PHI = 1.618033988749, SQRT5_I = 1 / Math.sqrt(5)

const fib1 = (n: number) => SQRT5_I * (
  PHI ** n - (-PHI) ** (-n)
}

const fib2 = (n: number, nums = [1, 1]) => {
  if (n == 0) return 0
  if (n < 2) return 1
  for (let count = 0; count < n - 2; ++count) {
    [nums[0], nums[1]] = [nums[1], nums[0] + nums[1]]
  }
  return nums[1]
}
```

$$fib_1(1) = 1$$

$$fib_2(1) = 1$$

Dziękujemy!