Project Euler Problem 17

1. 問題(和訳)

(原文: https://projecteuler.net/problem=17)
数字を英単語で表した時、単語に含まれる文字数を数えることを考える。
例えば 1 なら one なので 3 文字。
では、1 から 1000(one thousand)までの数字を書き下したとき、使われている文字数の総数はいくらだろうか？
ちなみに 1 から 5(five)までの場合、3+3+5+4+4=19 となる。
ただし、文字数を数えるときの条件として、スペースやハイフンは数えない。また 3 桁の場合 and を使うものとする(イギリス式)。つまり 342 は three hundred and forty-two で 23 文字と数える。

2. 解き方

全て手書きして数えればこの問題が解けることはわかっているので、出来るだけ効率的に解くことを考える。

問題を考えるときのポイントは以下の通り。

- 規則性を発見する(ただし例外に注意する)。
- 小さいサイズで問題を解いて、その答えを記録しておく。
- 計算済みの結果があればそれを利用する。

3. 実際に解いてみよう

まず 2 つの数列を用意する。

$A[n]$: n を英単語で表したときの文字数

$\mathrm{S[n]} = \sum_{i=1}^{n} A[i]$:1 から n までを英単語で表した時の文字数の総数

0〜9

手で数える。0(zero)は 0 としておくと後で便利。

$\mathrm{A}[0] = 0$

$\mathrm{A}[1] = 3$（one）

$\mathrm{A}[2] = 3$（two）

$\mathrm{A}[3] = 5$（three）

$\mathrm{A}[4] = 4$（four）

$\mathrm{A}[5] = 4$（five）

$\mathrm{A}[6] = 3$（six）

$\mathrm{A}[7] = 5$（seven）

$\mathrm{A}[8] = 5$（eight）

$\mathrm{A}[9] = 4$（nine）

この時点で和を求めておくと、$\mathrm{S}[9] = 36$となる。

10〜19

一の位に「teen」をつける規則性があるが、例外が多いため手で数えた方が早い。

$\mathrm{A}[10] = 3$（ten）

$\mathrm{A}[11] = 6$（eleven）

$\mathrm{A}[12] = 6$（twelve）

$\mathrm{A}[13] = 8$（thirteen）

$\mathrm{A}[14] = 8$（fourteen）

$\mathrm{A}[15] = 7$（fifteen）

$\mathrm{A}[16] = 7$（sixteen）

$\mathrm{A}[17] = 9$（seventeen）

$\mathrm{A}[18] = 8$（eighteen）

$\mathrm{A}[19] = 8$（nineteen）

$$\mathrm{S}[19] = \mathrm{S}[9] + \sum_{i=10}^{19} \mathrm{A}[i] = 36 + 70 = 106$$

20～99

ここでは規則性が使える。まず$\mathrm{A}[10\mathrm{n}]\ (2 \le \mathrm{n} \le 9)$について数えると、

$\mathrm{A}[20] = 6$（twenty）

$\mathrm{A}[30] = 6$（thirty）

$\mathrm{A}[40] = 5$（forty）

$\mathrm{A}[50] = 5$（fifty）

$\mathrm{A}[60] = 5$（sixty）

$\mathrm{A}[70] = 7$（seventy）

$\mathrm{A}[80] = 6$（eighty）

$\mathrm{A}[90] = 6$（ninety）

さらに、

$$\mathrm{A}[10\mathrm{m} + \mathrm{n}] = A[10m] + A[n]\ (2 \le \mathrm{m} \le 9, 0 \le \mathrm{n} \le 9)$$

が成り立つ(ここで$\mathrm{A}[\mathrm{n}]$が使える)。

これを用いると

$$\begin{aligned} \mathrm{S}[99] &= \mathrm{S}[19] + \sum_{\mathrm{m}=2}^{9} \sum_{n=0}^{9} \mathrm{A}[10m + n] \\ &= \mathrm{S}[19] + 10 \times \sum_{\mathrm{m}=2}^{9} \mathrm{A}[10m] + 8 \times \sum_{n=0}^{9} \mathrm{A}[n] \\ &= 854 \end{aligned}$$

ここで $\sum_{m=2}^{9} \mathrm{A}[10m] = 46, \sum_{n=0}^{9} \mathrm{A}[n] = \mathrm{S}[9]$ を用いた。

100～999

三桁の数○△□は(○=0 を無視すると)

△□=0 のとき　(○の英単語) hundred

それ以外　(○の英単語) hundred and (△□の英単語)

と表されることから

$$\mathrm{A}[100m + n] = \mathrm{A}[m] + 7(1 \le m \le 9, n = 0)$$

$$\mathrm{A}[100m + n] = \mathrm{A}[m] + \mathrm{A}[n] + 10(1 \le m \le 9, 1 \le n \le 99)$$

と表すことができる。したがって、

$$\begin{aligned} \mathrm{S}[999] &= \mathrm{S}[99] + \sum_{m=1}^{9} \sum_{n=0}^{99} \mathrm{A}[100m + n] \\ &= \mathrm{S}[99] + \sum_{m=1}^{9} (\mathrm{A}[m] + 7) + \sum_{m=1}^{9} \sum_{n=1}^{99} (\mathrm{A}[m] + \mathrm{A}[n] + 10) \\ &= \mathrm{S}[99] + \mathrm{S}[9] + 63 + 99 \times \mathrm{S}[9] + 9 \times \mathrm{S}[99] + 9 \times 99 \times 10 \\ &= 21113 \end{aligned}$$

1~1000

最後に$A[1000] = 11$（one thousand)より、

$$S[1000] = S[999] + 11$$
$$= 21124$$

となり、これが求める答えである。

4. 条件を変えて解く

本問題では 1 から 1000 までを解くことが目的であったが、例えば 1 から 10 の n 乗までの和とするとどうだろうか、また、上限を決めて任意の正の整数 n を与えたときに、S[n]を求めるにはどうすればよいだろうか。