# Содержание

# 1 Цель работы

1. Экспериментальная проверка равноускоренности движения тележки по наклонной плоскости.

2. Определение величины ускорения свободного падения $g$.

# 2 Введение

Как известно, при поступательном равноускоренном движении тела вдоль оси $O$ зависимость проекции его скорости $v_x$ от времени $t$ определяется выражением:

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t \tag{1}$$

где $v_{0x}$- проекция скорости на ось $O$ в момент времени $t = 0$, $a_x$ – ускорение тела. Зависимость координаты тела $x$ от времени $t$ имеет вид:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} \tag{2}$$

Здесь $x_0$ – начальная координата. Если начальная скорость тела равна нулю, то из (2) следует:

$$x_2 - x_1 = \frac{a}{2}(t_2^2 - t_1^2) \tag{3}$$

Таким образом, существует линейная зависимость между пе- ремещением $\Delta x = x_2 - x_1$ и полуразностью квадратов значений времени $\frac{t_2^2 - t_1^2}{2}$ Коэффициент пропорциональности этой зависимости равен ускорению тела. Если экспериментальный график этой зависимости будет представлять собой прямую линию, то это будет доказательством движения с постоянным ускорением. В качестве объекта совершающего равнопеременное поступательное движение рассмотрим тележку, скользящую по наклонной плоскости (см. рис.(1). Второй закон Ньютона, описывающий ее движение, имеет вид:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} \tag{4}$$

где $\vec{a}$ – ускорение тележки, $\vec{N}$ – сила реакции опоры, а сила трения, возникающая при скольжения, по модулю равна произведению коэффициента трения на силу нормальной реакции: $F = \mu N$. Проекции уравнения (4) на координатные оси:

$$\begin{cases} O_y : N - mg\cos\alpha \\ O_x : ma = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha \end{cases} \tag{5}$$

где $\alpha$ – угол между наклонной плоскостью и горизонталью. Из (5) следует выражение для модуля ускорения:

$$a = g\sin\alpha - \mu\cos\alpha \tag{6}$$

Поскольку в лабораторной установке коэффициент трения $\mu$и угол $\alpha$ достаточно малы, то

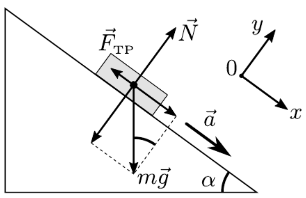


Рис. 1: Векторная диаграмма сил, действующих на тело,расположенное на наклонной плоскости

$cos\alpha$ в формуле(6) можно заменить единицей. С учетом этого выражение для ускорения будет иметь вид:

$$a = g(\sin\alpha - \mu) \tag{7}$$

Таким образом, теоретическая зависимость ускорения $a$ от $\sin\alpha$ является линейной и угловой коэффициент этой зависимо- сти равен ускорению свободного падения $g$.

## 3 Измерительные приборы

Таблица 1: Измерительные приборы

| **Наименование** | **Предел измерений** | **Цена деления** | **Класс точности** | $\Delta_и$ |
|---|---|---|---|---|
| Линейка на рельсе | $1,3$ *м* | 1 *см/дел* | — | 5 *мм* |
| Линейка на угольнике | 250 *мм* | 1 *мм/дел* | — | $0,5$ *мм* |
| ПКЦ-3 в режиме секундомера | 100 *с* | $0,1$ *с* | — | $0,1$ *с* |

## 4 Результаты прямых измерений

Настоящий протокол с измерений с подписью приводится как Приложение 1 (один лист, заполненный от руки с двух сторон).

Таблица 2

| $x$, *м* | $x'$, *м* | $h_0$, *мм* | $h'_0$, *мм* |
|---|---|---|---|
| $0,22 \pm 0,005$ | $1,0 \pm 0,005$ | $196 \pm 0,5$ | $194 \pm 0,5$ |

Таблица 3: Результаты прямых измерений (Задание 1)

| № | Измеренные величины | | | | Рассчитанные величины | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$, *м* | $x_2$, *м* | $t_1, c$ | $t_2, c$ | $x_2 - x_1$, *м* | $\frac{t_2^2 - t_1^2}{2}, c^2$ |
| 1 | $0,15 \pm 0,005$ | $0,40 \pm 0,005$ | $1,3 \pm 0,1$ | $2,6 \pm 0,1$ | $0,25 \pm 0,005$ | $2,54 \pm 0,005$ |
| 2 | $0,15 \pm 0,005$ | $0,50 \pm 0,005$ | $1,2 \pm 0,1$ | $2,9 \pm 0,1$ | $0,35 \pm 0,005$ | $3,49 \pm 0,005$ |
| 3 | $0,15 \pm 0,005$ | $0,70 \pm 0,005$ | $1,3 \pm 0,1$ | $3,6 \pm 0,1$ | $0,55 \pm 0,005$ | $5,64 \pm 0,005$ |
| 4 | $0,15 \pm 0,005$ | $0,90 \pm 0,005$ | $1,3 \pm 0,1$ | $4,1 \pm 0,1$ | $0,75 \pm 0,005$ | $7,56 \pm 0,005$ |
| 5 | $0,15 \pm 0,005$ | $1,10 \pm 0,005$ | $1,2 \pm 0,1$ | $4,6 \pm 0,1$ | $0,95 \pm 0,005$ | $9,86 \pm 0,005$ |

Таблица 4: Результаты прямых измерений (Задание 2)

| Nпл | $h$, *мм* | $h'$, *мм* | № | $t_1, c$ | $t_2, c$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 187 | 193 | 1 | $1,2$ | $4,5$ |
| | | | 2 | $1,3$ | $4,6$ |
| | | | 3 | $1,2$ | $4,5$ |
| | | | 4 | $1,3$ | $4,6$ |
| | | | 5 | $1,4$ | $4,7$ |
| 2 | 178 | 193 | 1 | $0,9$ | $3,2$ |
| | | | 2 | $0,9$ | $3,2$ |
| | | | 3 | $0,8$ | $3,1$ |
| | | | 4 | $0,9$ | $3,2$ |
| | | | 5 | $0,9$ | $3,2$ |
| 3 | 169 | 193 | 1 | $0,7$ | $2,6$ |
| | | | 2 | $0,7$ | $2,6$ |
| | | | 3 | $0,7$ | $2,5$ |
| | | | 4 | $0,7$ | $2,5$ |
| | | | 5 | $0,7$ | $2,5$ |
| 4 | 160 | 192 | 1 | $0,7$ | $2,2$ |
| | | | 2 | $0,6$ | $2,1$ |
| | | | 3 | $0,7$ | $2,1$ |
| | | | 4 | $0,7$ | $2,2$ |
| | | | 5 | $0,7$ | $2,2$ |
| 5 | 151 | 192 | 1 | $0,7$ | $2,0$ |
| | | | 2 | $0,7$ | $2,0$ |
| | | | 3 | $0,7$ | $2,0$ |
| | | | 4 | $0,7$ | $2,0$ |
| | | | 5 | $0,7$ | $2,0$ |

# 5 Обработка результатов измерений

## 5.1 Задание 1

1. Величины $Y = x_2 - x_1$ и $Z = \frac{t_2^2 - t_1^2}{2}$ и их погрешности записаны в Табл. 3 .

2. График теоритической зависимости $Y = aZ$ с угловым коэффициентом равным ускорению приведён в Приложении 2 как График 1.

3. Вычислим коэффициент $a$ его среднеквадратическое отклонение (СКО) $\sigma_{\langle a \rangle}$ :

$$\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} Z_i Y_i}{\sum\limits_{i=1}^{N} Z_i^2}; \quad \sigma_{\langle a \rangle} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{N} (Y_i - aZ_i)^2}{(N-1)\sum\limits_{i=1}^{N} Z_i^2}} \tag{8}$$

где $N$– количество экспериментальных точек, в данной серии измерений $N$= 5. Угловой коэффициент $a = 0,1$ и $\sigma_{\langle a\rangle} = 2,73 \cdot 10^{-3}$
Абсолютную погрешность коэффициента $a$ для доверительной вероятности $\alpha = 0,95$ вычислим по формуле:

$$\Delta_a = t_{\alpha,N-1} \cdot \sigma_a, \tag{9}$$

где - $t_{\alpha,N-1}$ коэффициент Стьюдента для доверительной вероятности $\alpha$ и количества измерений N. $t_{\alpha,N-1} = 2,78$ соотстевственно $\Delta_a = 7,59 \cdot 10^{-3}$. Вычислим относительную погрешность ускорения по формуле:

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta_a}{a} \cdot 100\% \tag{10}$$

$\varepsilon_a = 7,59$

4. Зависимость $Y(Z) = aZ$ построена на Графике 1.

### 5.1.1 Вывод

Так как зависимость $Y(Z) = aZ$ линейна, то движение тележки равноускоренное.

## 5.2 Задание 2

1. Для каждой серии измерений из Таблицы 4 вычислим значение синуса угла наклона рельса к горизонту по формуле:

$$\sin\alpha = \frac{(h_0 - h) - (h'_0 - h')}{x' - x} \tag{11}$$

2. Вычислим средние значения времени $t_1$ и $t_2$ каждой серии и их погрешности по формулам:

$$\langle t\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i \tag{12}$$

СКО:

$$\sigma_{\langle t\rangle} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}(t_i - \langle t\rangle)^2}{N(N-1)}} \tag{13}$$

Случайная погрешность:

$$\Delta_{\langle t\rangle} = t_{\alpha,N} \cdot \sigma_{\langle t\rangle} \tag{14}$$

Абсолютная погрешность:

$$\Delta_t = \sqrt{\Delta^2_{\langle t\rangle} + \left(\frac{2}{3} \cdot \Delta_{\text{и}}\right)^2} \tag{15}$$

3. Вычислим значение ускорения и его погрешность для каждой серии измерений по формулам:

$$\langle a\rangle = \frac{2(x_2 - x_1)}{\langle t_2\rangle^2 - \langle t_1\rangle^2} \tag{16}$$

$$\Delta_a = \langle a\rangle \cdot \sqrt{\frac{(\Delta_{x\text{и}2})^2 + (\Delta_{x\text{и}1})^2}{(x_2 - x_1)^2} + 4 \cdot \frac{(\langle t_1\rangle \Delta_{t_1})^2 + (\langle t_2\rangle \Delta_{t_2})^2}{(\langle t_2\rangle^2 - \langle t_1\rangle^2)^2}} \tag{17}$$

где $\Delta_{x\text{и}1}$ и $\Delta_{x\text{и}2}$ – приборные погрешности измерения координат и $x_1$ и $x_2$; $\Delta_{t_1}$ и $\Delta_{t_2}$– абсолютные погрешности значений времен $t_1$ и $t_2$.

4. Результаты расчетов для ускорения внесены в таблицу.

Таблица 5: Результаты расчетов (Задание 2)

| Nпл | $\sin\alpha$ | $\langle t_1\rangle \pm \Delta t_1$, $c$ | $\langle t_2\rangle \pm \Delta t_2$, $c$ | $\langle a\rangle \pm \Delta a$, $\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,010 | $1,3 \pm 0,130$ | $4,6 \pm 0,130$ | $0.098 \pm 0.028$ |
| 2 | 0,022 | $0,9 \pm 0,087$ | $3,2 \pm 0,087$ | $0.201 \pm 0,038$ |
| 3 | 0,033 | $0,7 \pm 0,067$ | $2,5 \pm 0,107$ | $0.330 \pm 0,075$ |
| 4 | 0,044 | $0,7 \pm 0,087$ | $2,2 \pm 0,107$ | $0.437 \pm 0,102$ |
| 5 | 0,055 | $0,7 \pm 0,067$ | $2,0 \pm 0,067$ | $0.541 \pm 0,082$ |

5. Теоритическая зависимость $a$ от $\sin\alpha$ имеет линейный характер: $a = A + B\sin\alpha$, где $A = -\mu g$, $B = g$ (следует из (7)). Вычислим $g$ методом наименьших квадратов (МНК). Найдем среднее значение синуса и ускорения:

$$\langle\sin\alpha\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sin\alpha_i; \quad \langle a\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}a_i \tag{18}$$

$\langle\sin\alpha\rangle = 0,033$; $\langle a\rangle = 0,321$ Найдём коэффициенты линейной зависимости по следующим формулам:

$$B = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N}(\sin\alpha_i - \langle\sin\alpha\rangle)(a_i - \langle a\rangle)}{\sum\limits_{i=1}^{N}(\sin\alpha_i - \langle\sin\alpha_i\rangle)^2}; \quad A = \langle a\rangle - B\langle\sin\alpha\rangle \tag{19}$$

$B = 10,012$ $\quad A = -0,009$
Рассчитаем параметры $d_i$ и $D$ по формулам:

$$d_i = a_i - (A + B\sin\alpha_i), \tag{19}$$

$$D = \sum_{i=1}^{N}(\sin\alpha_i - \langle\sin\alpha_i\rangle)^2 \tag{20}$$

Вычислим СКО коэффициента $B$:

$$\sigma_B = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{N}d_i^2}{D(N-2)}} \tag{21}$$

$\sigma_B = 0.261$ Определим абсолютную погрешность коэффициента $B$ для доверительной вероятности $\alpha = 0,95$ по формуле:

$$\Delta B = t_{\alpha,N-2}\cdot\sigma_B \tag{22}$$

$\Delta B = 1.122$
Рассчитаем относительную погрешность коэффициента $B$:

$$\varepsilon_B = \frac{\Delta B}{B}\cdot 100\% \tag{23}$$

$\varepsilon_B = 11,207$

6. Найдем абсолютную и относительную погрешность полеченного g от его табличного значения по формулам:
$$\Delta g = g_{\text{эксп}} - g_{\text{табл}} \tag{24}$$
$$\varepsilon_g = \frac{\Delta g}{g_{\text{табл}}} \tag{25}$$
$\Delta g = 0,205 \quad \varepsilon_g = 2,090$

7. $\Delta g = |g_{\text{эксп}} - g_{\text{табл}}|$

#### 5.2.1 Вывод

Получено g, близкое по значению к табличному с учётом погрешности

Зависимости $a(\sin\alpha) = a$ и $a = A + B\sin\alpha$ приведены на Графике 2 в Приложении 2

## 6 Результаты лабораторной работы

1. Графики приведены в Приложении 2.

2. Доверительный интервала для ускорения, полученный в первом задании, с относительной погрешностью:
$$\Delta_a = 7,59 \cdot 10^{-3}; \quad \varepsilon_a = 7,59$$

3. Значение ускорения свободного падения с абсолютной и относительной погрешностями:
$$g = 10,012; \quad \Delta g = 1,122; \quad \varepsilon_g = 11,207$$

4. Абсолютное и относительное отклонение измеренного ускорения свободного падения от его табличного значения:
$$\Delta g = 0,205 \quad \varepsilon_g = 2,090$$