Máster en Modelización
e Investigación Matemática,
Estadística y Computación

May 22, 2015
Ejercicios Álgebra Computacional

Programación Científica y Álgebra Computacional

Autor:
Pilar Barbero Iriarte

Profesor:
José María Izquierdo

Contents

1 Ejercicio 1 **2**

2 Ejercicio 2 **5**

3 Ejercicio 3 **7**

4 Ejercicio 4 **10**

1 Ejercicio 1

Determina usando técnicas de bases de Groebner si los siguientes ideales son iguales:

$$\begin{array}{l} I := < y^3 - z^2, xz - y^2, xy - z, x^2 - y > \\ J := < xy - z^2, xz - y^2, xy - z, x^2 - y > \\ K := < xz - y^2, x + y^2 - z - 1, xyz - 1 > \\ L := < y^2 - x^2y, z - xy, y - x^2 > \end{array} \tag{1}$$

Puedes ayudarte del ordenador.

Respuesta:

Por teoría, sabemos que dos ideales son iguales si y sólo si tienen la misma base de Groebner reducida. Calculemos la base asociada a cada ideal según el orden léxicográfico $y > x$,

I. Inicializamos la base $G'_I := \{i_1 := y^3 - z^2, i_2 := xz - y^2, i_3 := xy - z, i_4 := x^2 - y\}$ y calculamos sus $S-$polinomios,

$$\begin{array}{l} S(i_1, i_2) = xz^3 - y^5 \xrightarrow{z^2 i_2} y^5 + z^2 y^2 \xrightarrow{y^2 i_1} 0 \\ S(i_1, i_3) = -x^2z^2 + y^4 \xrightarrow{-xzi_2} y^4 - xy^2z \xrightarrow{yi_1} yz^2 - xy^2z \xrightarrow{-y^2 i_2} yz^2 - y^4 \xrightarrow{-yi_1} 0 \\ S(i_1, i_4) = -x^2z^2 + y^4 \xrightarrow{-xzi_2} -xy^2z + y^4 \xrightarrow{-y^2 i_2} 0 \\ S(i_2, i_3) = -y^3 + z^2 \xrightarrow{-i_1} 0 \\ S(i_2, i_4) = -xy^2 + yz \xrightarrow{-yi_3} 0 \\ S(i_3, i_4) = -xz + y^2 \xrightarrow{-i_2} 0 \end{array} \tag{2}$$

La base es $\boldsymbol{G_I = \{i_1 = y^3 - z^2, i_2 = xz - y^2, i_3 = xy - z, i_4 = x^2 - y\}}$

II. Lo mismo con $G'_J := \{j_1 := xy - z^2, j_2 := i_2, j_3 := i_3, j_4 := i_4\}$

$$\begin{array}{l} S(j_1, j_2) = y^3 - z^3 \\ S(j_1, j_3) = -z^2 + z \\ S(j_1, j_4) = -xz^2 + y^3 \xrightarrow{-zj_2} 0 \end{array} \tag{3}$$

Previamente ya hemos calculado,

$$S(j_2, j_3) = S(i_2, i_3) \to 0, \;\; S(j_2, j_4) = S(i_2, i_4) \to 0, \;\; S(j_3, j_4) = S(i_3, i_4) \to 0 \tag{4}$$

Añadimos $j_5 := y^3 - z^3$ y $j_6 := -z^2 + z$ y calculamos los nuevos $S-$polinomios que nos surgen,

$$\begin{array}{l} S(j_1, j_5) = xz^3 - y^2z^2 \xrightarrow{z^2 j_2} 0 \\ S(j_2, j_5) = xz^4 - y^5 \xrightarrow{z^3 j_2} -y^5 + y^2z^3 \xrightarrow{-y_2 j_5} 0 \\ S(j_3, j_5) = xz^3 - y^2z \xrightarrow{z^2 j_2} -y^2z + z^2y^2 \xrightarrow{-y^2 j_6} 0 \\ S(j_4, j_5) = x^2z^3 - y^4 \xrightarrow{xz^2 j_2} xy^2z^2 - y^4 \xrightarrow{y^2 j_2} 0 \end{array} \tag{5}$$

$$\begin{array}{l} S(j_1, j_6) = -xyz + z^4 \xrightarrow{-zj_1} z^4 - z^3 \xrightarrow{-z^2 j_6} 0 \\ S(j_2, j_6) = -xz + y^2z \xrightarrow{-j_2} zy^2 - y^2 \\ S(j_3, j_6) = -xyz + z^3 \xrightarrow{-zj_1} 0 \\ S(j_4, j_6) = -z^2z + yz \xrightarrow{-xj_2} -xy^2 + yz \xrightarrow{-yj_3} 0 \\ S(j_5, j_6) = -zy^3 + z^5 \xrightarrow{-zj_5} z^5 - z^4 \xrightarrow{-z^3 j_6} 0 \end{array} \tag{6}$$

Añadimos $j_7 := zy^2 - y^2$ a la base y calculamos los $S-$polinomios que surgen,

$$\begin{aligned}
&S(j_1,j_7) = xy^2 - z^3 \xrightarrow{zj_1} 0\\
&S(j_2,j_7) = xy^2 - y^4 \xrightarrow{yj_1} -y^4 + yz^2 \xrightarrow{-yi_5} yz^2 - yz^3 \xrightarrow{yzj_6} 0\\
&S(j_3,j_7) = xy^2 - yz \xrightarrow{yj_3} 0\\
&S(j_4,j_7) = x^2y^2 - y^3z \xrightarrow{xyj_3} xyz - y^3z \xrightarrow{zj_1} -y^3z + z^3 \xrightarrow{-zf_5} z^3 - z^3 \xrightarrow{z^2j_6} 0\\
&S(j_5,j_7) = y^3 + z^4 \xrightarrow{f_5} -z^4 + z^3 \xrightarrow{zf_6} 0\\
&S(j_6,j_7) = y^2z - zy^2 = 0
\end{aligned} \tag{7}$$

La base queda $G'_J := \{xy - z^2, xz - y^2, xy - z, x^2 - y, y^3 - z^3, -z^2 + z, zy^2 - y^2\}$, podemos eliminar el polinomio $xy - z^2$ ya que su $LT(xy - z^2) = xy$ es divisible por el $LT(xy - z) = xy$, quedando,

$\boldsymbol{G_j = \{xz - y^2, xy - z, x^2 - y, y^3 - z^3, -z^2 + z, zy^2 - y^2\}}$

III. $G_K = \{k_1 := xz - y^2, k_2 := x + y^2 - z - 1, k_3 := xyz - 1\}$

$$\begin{aligned}
&S(k_1,k_2) = -y^2z - y^2 + z^2 + z\\
&S(k_1,k_3) = -y^3 + 1
\end{aligned} \tag{8}$$

Añadimos $k_4 := -y^2z - y^2 + z^2 + z$ y $k_5 := -y^3 + 1$ a la base y continuamos.

$$S(k_2,k_3) = y^3z - yz^2 - yz + 1 \xrightarrow{-zk_5} -yz^2 - yz + 1 + z \tag{9}$$

Añadimos $k_6 := -yz^2 - yz + 1 + z$ a la base y continuamos,

$$\begin{aligned}
&S(k_1,k_4) = y^4 + xy^2 - xz^2 - xz \xrightarrow{y^2k_2} -xz^2 - xz + y^2z + y^2 \xrightarrow{-zk_1} -xz + y^2 \xrightarrow{-k_1} 0\\
&S(k_1,k_5) = -xz + y^5 \xrightarrow{-k_1} y^5 - y^2 \xrightarrow{-y^2k_5} 0\\
&S(k_1,k_6) = xyz - xz - x + y^3z \xrightarrow{k_3} -xz - x + y^3z + 1 \xrightarrow{-k_1} -x + y^3z + 1 - y^2 \xrightarrow{-k_2} y^3z - z \xrightarrow{-zk_5} 0\\
&S(k_2,k_4) = xy^2 - xz^2 - xz - y^4z + y^2z^2 + y^2z \xrightarrow{y^2k_2} -xz^2 - xz - y^4z + y^2z^2 + 2y^2z - y^4 + y^2 \xrightarrow{-zk_1}\\
&\quad -xz - y^4z + y^2z^2 + y^2z - y^4 + y^2 \xrightarrow{-k_1} -y^4z + y^2z^2 + y^2z - y^4 \xrightarrow{y^2k_4} 0\\
&S(k_2,k_5) = -x - y^5 + y^3z + y^3 \xrightarrow{-k_2} -y^5 + y^3z + y^3 + y^2 - z - 1 \xrightarrow{y^2k_5} y^3z + y^3 - z - 1 \xrightarrow{-zk_5} y^3 - z \xrightarrow{-k_5} 0\\
&S(k_2,k_6) = xyz - xz - x - y^3z^2 + yz^3 + yz^2 \xrightarrow{k_3} -y^3z^2 + yz^3 + yz^2 - xz - x + 1 \xrightarrow{-k_1}\\
&\quad -y^3z^2 + yz^3 + yz^2 - x + 1 - y^2 \xrightarrow{-k_2} -y^3z^2 + yz^3 + yz^2 - z \xrightarrow{z^2k_5} yz^3 + yz^2 - z - z^2 \xrightarrow{-zk6} 0\\
&S(k_3,k_4) = xy^2 - xz^2 - xz + y \xrightarrow{y^2k_2} -xz^2 - xz + y - y^4 + y^2z + y^2 \xrightarrow{-zk_1} -xz + y + y^4 + y^2 \xrightarrow{-k_1} y - y^4 \xrightarrow{yk_5} 0\\
&S(k_3,k_5) = -xz + y^2 \xrightarrow{-k_1} 0\\
&S(k_3,k_6) = xyz - xz - x + z \xrightarrow{k_3} -xz - x + z + 1 \xrightarrow{-k_1} -x + z + 1 - y^2 \xrightarrow{-k_2} 0\\
&S(k_4,k_5) = -y^3 + yz^2 + yz - z \xrightarrow{k_5} yz^2 + yz - z - 1 \xrightarrow{-k_6} 0\\
&S(k_4,k_6) = -yz - y + z^3 + z^2\\
&S(k_5,k_6) = -y^2 + z^2
\end{aligned} \tag{10}$$

Como se puede comprobar, deberíamos añadir los $S-$polinomios, $S(k_4, k_6)$ y $S(k_5, k_6)$ a la base y esa base no sería igual a ninguna de las bases de los demás ideales.

IV. $G_L = \{l_1 := y^2 - x^2y, l_2 := z - xy, l_3 := y - x^2\}$

En primer lugar, vamos a eliminar l_1 de la base ya que es divisible por l_3, $G_L = \{l_2 := z - xy, l_3 := y - x^2\}$

$$S(l_2,l_3) = xz - y^2 \tag{11}$$

Añadimos $l_4 := xz - y^2$ a la base G_L,

$$S(l_2, l_4) = z^2 - y^3$$
$$S(l_3, l_4) = -xy^2 + zy \xrightarrow{yl_2} 0 \tag{12}$$

Añadimos $l_5 := -y^3 + z^2$ a la base G_L,

$$\begin{aligned} S(l_2, l_5) &= -xz^2 + y^2 z \xrightarrow{-zl_4} 0 \\ S(l_3, l_5) &= -x^2 z^2 + y^4 \xrightarrow{z^2 l_3} y^4 - yz^2 \xrightarrow{-yl_5} 0 \\ S(l_4, l_5) &= -xz^3 + y^5 \xrightarrow{-z^2 l_4} y^5 - z^2 y^2 \xrightarrow{-y^2 l_5} 0 \end{aligned} \tag{13}$$

La base (reducida) queda $\boldsymbol{G_L = \{xy - z, x^2 - y, xz - y^2, y^3 - z^2\}}$ que coincide con la de G_I por lo que sus ideales son iguales.

Vamos a utilizar el paquete *sympy* que nos proporcina un conjunto de órdenes útiles a la hora de calcular bases de Groeber.

```
In [2]: from sympy import groebner
        import sympy as sp
        from sympy.abc import x,y,z
```

```
In [3]: i1 = y**3  - z**2
        i2 = x*z - y**2
        i3 = x*y - z
        i4 = x**2 - y
```

```
In [4]: j1 = x*y - z**2
        j2 = x*z - y**2
        j3 = x*y - z
        j4 = x**2 - y
```

```
In [5]: k1 = x*z -y**2
        k2 = x+y**2 - z - 1
        k3 = x*y*z - 1
```

```
In [6]: l1 = y**2 - (x**2)*y
        l2 = z- x*y
        l3 = y - x**2
```

```
In [95]: GI = sp.groebner([i1, i2, i3, i4], x, y, z, order='lex', method='buchberger')
         for j in GI.args[0]:
                 print j.args
```

```
Base de GI
(x**2 - y,)
(x*y - z,)
(x*z - y**2,)
(y**3 - z**2,)
```

```
In [96]: GJ = sp.groebner([j1, j2, j3, j4], x, y, z, order='lex', method='buchberger')
         for j in GJ.args[0]:
                 print j.args
```

```
Base de GJ
(x**2 - y,)
(x*y - z,)
(x*z - y**2,)
(y**3 - z,)
(y**2*z - y**2,)
(z**2 - z,)
```

```
In [98]: GK = sp.groebner([k1, k2, k3], x, y, z, order='lex', method='buchberger')
         for j in GK.args[0]:
                 print j.args
```

```
(x + y**2 - z - 1,)
(y**3 - 1,)
(y*z + y - z**3 - z**2,)
(z**4 + z**3 - z - 1,)
```

```
In [97]: GL = sp.groebner([l1, l2, l3], x, y, z, order='lex', method='buchberger')
         for j in GL.args[0]:
                 print j.args
```

```
(x**2 - y,)
(x*y - z,)
(x*z - y**2,)
(y**3 - z**2,)
```

```
In [73]: GI == GL
```

```
Out[73]: True
```

Podemos comprobar que el ideal I y el ideal L poseen la misma base de Groebner reducida, por lo que son iguales.

---

2 Ejercicio 2

Calcula, sin usar el ordenador, mediante el algoritmo de Buchberger una base reducida del ideal $I =< xy + z, x^2 + y^2 >$.

Respuesta:

Defininimos $f_1 := xy + z$ y $f_2 := x^2 + y^2$.

Vamos a aplicar el algoritmo de Buchberger a partir de $\{f_1, f_2\}$. Fijamos el orden lex con $x > y > z$. Comenzamos con la base de Groebner $G' := \{f_1, f_2\}$ y comprobaremos si los $S-$polinomios son reducibles hasta 0.

$$S(f_1, f_2) = x(xy + z) - y(x^2 + y^2) = xz - y^3 \tag{14}$$

Este polinomio ya no es reducible por G', así que lo añadimos a la base $G' := \{f_1, f_2, f_3 := xz - y^3\}$

Ahora $S(f_1, f_2)$ sí que es reducible a 0, ya que hemos añadido $xz - y^3$ a la base, pero quedan otros $S-$polinomios que comprobar,

$$S(f_1, xz - y^3) = z(xy + z) - y(xz - y^3) = y^4 + z^2 \tag{15}$$

Este polinomio no puede ser reducible por ninguno de los demás polinomios de la base ($LT(y^4 + z^2) = y^4$ no es divisibile por ningún LT de la base G'), así que lo añadimos.

$$S(f_2, xz - y^3) = z(x^2 + y^2) - x(xz - y^3) = zy^2 + xy^3 = y^2(xy + z) \xrightarrow{y^2 f_1} 0 \tag{16}$$

Estamos en la situación de que $G' = \{xy + z, x^2 + y^2, f_3 := xz - y^3, f_4 := y^4 + z^2\}$ podría ser nuestra base de Groebner, pero al haber añadido el polinomio $f_4 := y^4 + z^2$, debemos comprobar los demás $S-$polinomios que nos surgen al hacer esta adición.

$$
\begin{aligned}
S(f_1, f_4) &= y^3(xy+z) - x(y^4+z^2) = -xz^2 + y^3z \xrightarrow{zf_3} 0 \\
S(f_2, f_4) &= y^4(x^2+y^2) - x^2(y^4+z^2) = -x^2z^2 + y^6 \xrightarrow{-xzf_3} -xy^3z + y^6 \xrightarrow{-y^2zf_1} y^6 + y^2z^2 \xrightarrow{y^2f_4} 0 \\
S(f_3, f_4) &= y^4(xz-y^3) - xz(y^4+z^2) = -xz^3 - y^7 \xrightarrow{-z^2f_3} -y^7 - z^2y^3 \xrightarrow{-y^3f_4} 0
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Podemos concluir que $G := \{f_1 := xy+z, f_2 := x^2+y^2, f_3 := xz - y^3, f_4 := y^4+z^2\}$ es una base de Groebner.

Es reducida, ya que $\forall g \in G$, $LC(g) = 1$ y además, $LT(g)$ no es dividido por ningún otro $LT(g')$ con $g' \in G \setminus \{g\}$

Podemos comprobarlo gracias a la función *groebner* que nos proporciona el paquete de funciones *Sympy*.

```
In [75]: f1=x*y + z
         f2=x**2 + y**2
         G=sp.groebner([f1,f2], x, y, z, order='lex', method='buchberger')
         print G.args[0][0].args, G.args[0][1].args, G.args[0][2].args, G.args[0][3].args

(x**2 + y**2,) (x*y + z,) (x*z - y**3,) (y**4 + z**2,)
```

Determina también sin usar el ordenador si la clase $[x+1]$ es invertible en $k[x,y,z]/I$

Respuesta:

Observemos que si $[x+1]$ es invertible entonces $(x+1)f + (xy+z)g + (x^2+y^2)h = 1$, así que vamos a calcular el ideal de \$ < x+1, xy +z, $x^{2+y}2$ > \$

Definimos $f_1 := x+1, f_2 := xy+z, f_3 := x^2+y^2$, y calculamos su correspondiente base de Groebner. Volvemos a aplicar el algoritmo de Buchberger a esta base $G' := \{f_1, f_2, f_3\}$. Empezamos a calcular los $S-$polinomios,

$$
S(f_1, f_2) = y - z \tag{18}
$$

Como $LT(y-z)$ no es divisible por ningún $LT(g)$ para g polinomio en nuestra base, añadimos $f_4 := y-z$ a la base de Groebner, quedándonos así $G' = \{f_1, f_2, f_3, f_4 := y-z\}$.

Como hemos añadido f_4 a la nueva base, debemos comprobar los nuevos $S-$polinomios que genera.

$$
\begin{aligned}
S(f_1, f_4) &= xz + y \xrightarrow{zf_1} y - z \xrightarrow{f_4} 0 \\
S(f_2, f_4) &= xz + z \xrightarrow{zf_1} 0 \\
S(f_3, f_4) &= x^2z + y^3 \xrightarrow{zf_3} y^3 - y^2z \xrightarrow{y^2f_4} 0
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Continuamos el proceso con los $S-$polinomios anteriores,

$$
S(f_1, f_3) = x - y^2 \xrightarrow{f_1} -y^2 - 1 \xrightarrow{-yf_4} -yz - 1 \xrightarrow{-zf_4} -z^2 - 1 \tag{20}
$$

Como $LT(z^2) - 1$ no es divisible por ningún $LT(g)$ para g polinomio en nuestra base, añadimos $f_5 := -z^2 - 1$ a la base $G' := \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 := -z^2 - 1\}$. Al añadirlo, debemos comprobar los $S-$polinomios que se nos generan,

$$
\begin{aligned}
S(f_1, f_5) &= x - z^2 \xrightarrow{f_1} -z^2 - 1 \xrightarrow{f_5} 0 \\
S(f_2, f_5) &= xy - z^3 \xrightarrow{f_2} -z^3 - z \xrightarrow{zf_5} 0 \\
S(f_3, f_5) &= x^2 - y^2z^2 \xrightarrow{f_3} y^2(-z^2 - 1) \xrightarrow{f_5} 0 \\
S(f_4, f_5) &= y + z^3 \xrightarrow{f_4} z^3 + z \xrightarrow{f_5} 0
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Continuamos el proceso con la demás combinaciones que nos quedan con la base $G' = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\}$

$$S(f_2, f_3) = S(xy+z, x^2+y^2) = \cdots = xz-y^3 \xrightarrow{zf_1} -y^3-z \xrightarrow{-y^2f_4} -y^2z-z \xrightarrow{-yzf_4} -z^2y-z \xrightarrow{-z^2f_4} -z^3-z \xrightarrow{zf_5} 0 \tag{22}$$

La base de Groebner del ideal $< x+1, xy+z, x^2+y^2 >$ es,

$$G = \{f_1 = x+1, f_2 = xy+z, f_3 = x^2+y^2, f_4 = y-z, f_5 = -z^2-1\}$$

Comprobamos las dos condiciones para que sea reducida,

- $\forall g \in G, LC(g) = 1$ así que cambiamos el signo a f_5.
- $LT(f_1) = LT(x+1) = x$ divide a $LT(f_2) = LT(xy+z) = xy$ y a $LT(f_3) = LT(x^2+y^2) = x^2$, por lo que es posible expulsar a f_2 y f_3 de la base, y conseguimos la base reducida.

$$G = \{f_1 = x+1, f_4 = y-z, f_5 = z^2+1\}$$

Comprobamos...

In [74]:
```
f1=x+1
f2=x*y + z
f3=x**2 + y**2
G=sp.groebner([f1,f2,f3], x, y, z, order='lex', method='buchberger')
print G.args[0][0].args, G.args[0][1].args, G.args[0][2].args
```

```
(x + 1,) (y - z,) (z**2 + 1,)
```

---

3 Ejercicio 3

Calcula el abanico de Groebner del ideal $< x^2-y^3, x^3-y^2+x >$.

Respuesta:

Calculamos primero las bases de groebner asociadas a este ideal, para cada orden distinto.

In [93]:
```
g1 = x**2 - y**3
g2 = x**3 - y**2 + x

G1 = sp.groebner([g1,g2], x, y, order='lex', method='buchberger') # Orden lex x > y
print "Base de G1"
for j in G1.args[0]:
        print j.args

G2 = sp.groebner([g1,g2], y, x, order='lex', method='buchberger') # Orden lex y > x
print "Base de G2"
for j in G2.args[0]:
        print j.args

G3 = sp.groebner([g1,g2], x, y, order='grevlex', method='buchberger') # Orden grevlex x > y
print "Base de G3"
for j in G3.args[0]:
        print j.args
```

```
G4 = sp.groebner([g1,g2], y, x, order='grevlex', method='buchberger') # Orden grevlex y > x
print "Base de G4"
for j in G4.args[0]:
        print j.args

G5 = sp.groebner([g1,g2], x, y, order='grlex', method='buchberger') # Orden grlex x > y
print "Base de G5"
for j in G5.args[0]:
        print j.args

G6 = sp.groebner([g1,g2], y, x, order='grlex', method='buchberger') # Orden grlex y > x
print "Base de G6"
for j in G6.args[0]:
        print j.args
```

```
Base de G1
(x + y**7 + y**4 - y**2,)
(y**9 + 2*y**6 - y**4 + y**3,)
Base de G2
(-x**3 - x + y**2,)
(x**7 + 2*x**5 + x**3 - x**2 + x*y,)
(x**8 + 3*x**6 + 3*x**4 - x**3 + x**2,)
Base de G3
(x**3 + x - y**2,)
(-x**2 + y**3,)
Base de G4
(-x**2 + y**3,)
(x**3 + x - y**2,)
Base de G5
(x**3 + x - y**2,)
(-x**2 + y**3,)
Base de G6
(-x**2 + y**3,)
(x**3 + x - y**2,)
```

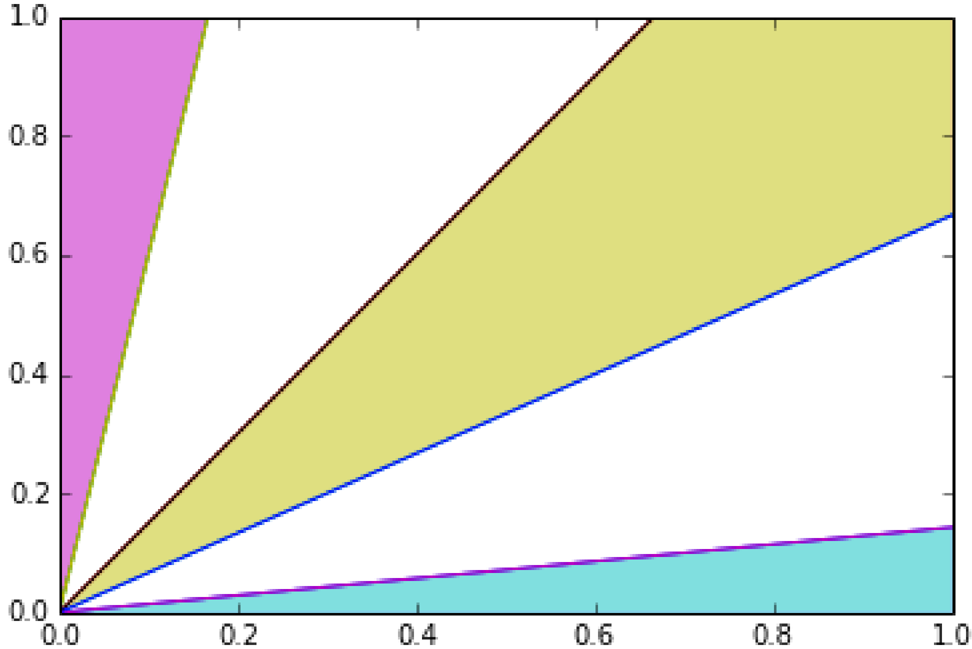
Calculemos sus correspondientes conos:

- $C_{G_1} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} | a \geq 7b\}$
- $C_{G_2} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} | b \geq 6a\}$
- $C_{G_3} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} | 3a \geq 2b, 3b \geq 2a\}$
- $C_{G_4} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} | 3b \geq 2a, 3a \geq 2b\}$
- $C_{G_5} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} | 3a \geq 2b, 3b \geq 2a\}$
- $C_{G_6} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} | 3b \geq 2a, 3a \geq 2b\}$

A simple vista podemos observar que los conos $C_{G_4}, C_{G_5}, C_{G_6}$ son iguales al cono C_{G_3},

```
In [13]: from fillplots import plot_regions, annotate_regions
         %matplotlib inline
         plotter = plot_regions([
             [(lambda x: x/7, True),  ], #CG_1
             [(lambda x: 6*x, False), ], #CG_2
             [(lambda x: 3*x/2, True), (lambda x: 2*x/3, False)],
         ],xlim=(0, 1), ylim=(0, 1))

         plotter.plot()
```



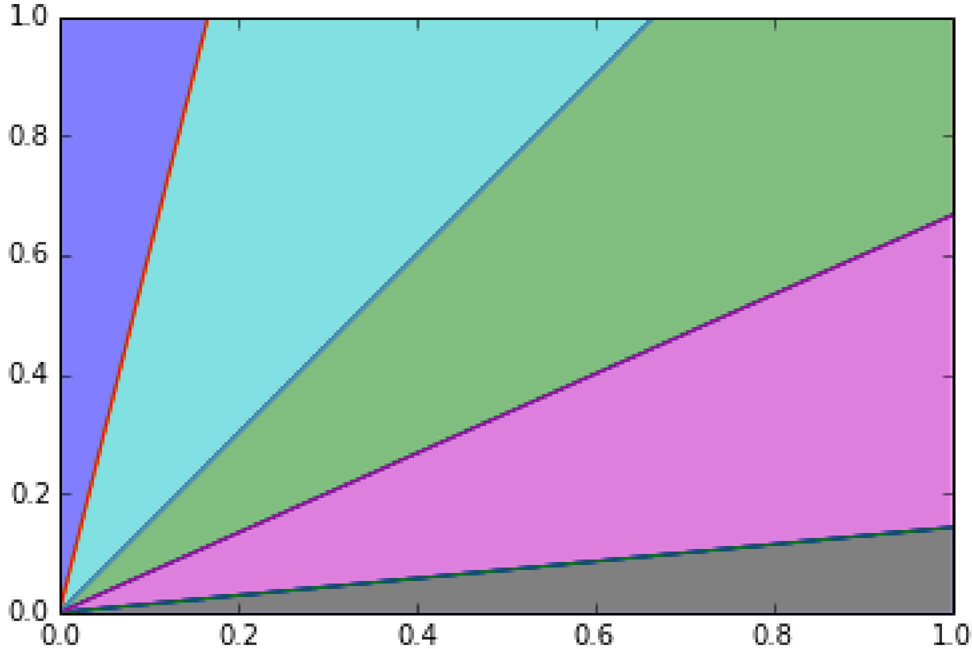
Nos quedan dos zonas sin cubrir, así que tomaremos vectores en ella y obtendremos los órdenes asociados a éstas,

Tomaremos los vectores $\omega_0 = (4,1)$ y $\omega_1 = (1,4)$, y obtenemos las matrices $M_{w_0} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $M_{w_0} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Los conos asociados a estos órdenes son,

- $C_{G_7} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} | a \leq 7b, 3b \leq 2a\}$
- $C_{G_8} = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2_{\geq 0} | b \leq 6a, 3a \leq 2b\}$

```
In [14]: plotter1 = plot_regions([
             [(lambda x: x/7, True),  ],
             [(lambda x: 6*x, False), ],
             [(lambda x: 3*x/2, True), (lambda x: 2*x/3, False)],
             [(lambda x: 3*x/2, False), (lambda x: 6*x, True)],
             [(lambda x: 2*x/3, True), (lambda x: x/7, False)],
         ],xlim=(0, 1), ylim=(0, 1))

         plotter.plot()
```



4 Ejercicio 4

¿Puede escribirse $4x^4y^2 + 4y^6 - 2x^4 - 4x^2y^2 - 6y^4 + 2x^2 + 4y^2 - 1$ de la forma $h(x^2 + y^2 + 1, x^2 - y^2)$ para algún polinomio $h \in \mathbb{Q}[x, y]$?

Respuesta:

Podemos calcular la base de Groebner asociada al ideal $< x^2 + y^2 + 1, x^2 - y^2 >$ y veremos si el polinomio $4x^4y^2 + 4y^6 - 2x^4 - 4x^2y^2 - 6y^4 + 2x^2 + 4y^2 - 1$ es reducible por esta base.
$f_1 := x^2 + y^2 + 1$, $f_2 := x^2 - y^2$, inicializamos $G' := \{f_1, f_2\}$

$$S(f_1, f_2) = \frac{x^2}{x^2}(x^2 + y^2 + 1) - \frac{x^2}{x^2}(x^2 - y^2) = 2y^2 + 1 \tag{23}$$

Añadimos a nuestra base $f_3 := 2y^2 + 1$ ya que su $LT(f_3) = 2y^2$ no es divisible por ningún otro $LT(g)$ para $g \in G'$.
Seguimos calculando $S-$polinomios de la nueva base $G'' := \{f_1, f_2, f_3\}$

$$\begin{aligned} S(f_1, f_3) &= \tfrac{2x^2y^2}{x^2}(x^2 + y^2 + 1) - \tfrac{2x^2y^2}{2y^2}(2y^2 + 1) = -x^2 + 2y^4 + 2y^2 \xrightarrow{f_2} 2y^4 + y^2 \xrightarrow{y^2 f_3} 0 \\ S(f_2, f_3) &= \tfrac{2x^2y^2}{x^2}(x^2 - y^2) - \tfrac{2x^2y^2}{2y^2}(2y^2 + 1) = -x^2 - 2y^4 \xrightarrow{-f_2} -2y^4 - y^2 \xrightarrow{-y^2 f_3} 0 \end{aligned} \tag{24}$$

La base nos queda $G'' := \{x^2 + y^2 + 1, x^2 - y^2, 2y^2 + 1\}$. La podemos reducir ya que $LT(f_1)$ divide a $LT(f_2)$, sumamos los dos polinomios, $f_1 + f_2 = x^2 + y^2 + 1 + x^2 - y^2 = 2x^2 + 1$.
Así $G := \{2x^2 + 1, 2y^2 + 1\}$.
Comprobamos utilizando *sympy*:

In [15]:
```
from sympy import groebner
import sympy as sp
from sympy.abc import x,y,z

a1=x**2+y**2+1
a2=x**2 - y**2
f=4*(x**4)*(y**2)  + 4*y**6 - 2*x**4 - 4*(x**2)*(y**2) - 6*(y**4) + 2*x**2 + 4*y**2 - 1
G = sp.groebner([a1,a2])
G
```

Out[15]:
```
GroebnerBasis([2*x**2 + 1, 2*y**2 + 1], x, y, domain='ZZ', order='lex')
```

Procedemos a reducir el polinomio a través de los polinomios de la base de Groebner, $f_1 := 2x^2+1$, $f_2 := 2y^2+1$,

$$
\begin{aligned}
&4x^4y^2+4y^6-2x^4-4x^2y^2-6y^4+2x^2+4y^2-1 \xrightarrow{2x^2y^2f_1} 4y^6-2x^4-6x^2y^2-6y^4+2x^2+4y^2-1 \xrightarrow{2y^4f_2}\\
&-2x^4-6x^2y^2-8y^4+2x^2+4y^2-1 \xrightarrow{-x^2f_1} -6x^2y^2-8y^4+3x^2+4y^2-1 \xrightarrow{-3f_1} -8y^4+3x^2+7y^2-1 \xrightarrow{-4y^2f_2}\\
&3x^2+11y^2-1 \xrightarrow{3/2f_1} 11y^2-\tfrac{5}{2} \xrightarrow{11/2f_2} -8
\end{aligned} \tag{25}
$$

O, utilizando la orden de *sympy* de *reduce* obtenemos el mismo resto:

In [16]:
```
G.reduce(f)
```

Out[16]:
```
([2*x**2*y**2 - x**2 - 3*y**2 + 3/2, 2*y**4 - 4*y**2 + 11/2], -8)
```

Por lo que concluimos que no es reducible, así que **no** existe un $h \in \mathbb{Q}[x,y]$ que cumpla nuestra condición.