

EL SISTEMA DE LORENZ

Ana Fernández Baranda 160450

Francisco González Isás 156292

Pablo Barranco Soto 151528

22 de mayo de 2019



Índice

1. Introducción	3
2. Propiedades del sistema	3
2.1. No lineal	3
3. Comportamiento	3
3.1. Caso 1	5
3.2. Caso 2	6
3.3. Caso 3	6
3.4. Caso 4	7
4. Aplicaciones	8
5. Conclusiones	9
6. Bibliografía	9

1. Introducción

Desde los comienzos de la humanidad, los seres humanos hemos sido fascinados por el cambio. Ya sea que se trate de las fases de la luna, o el paso de las estaciones; nuestra capacidad para reconocer patrones y comprender las partes indispensables que dan origen al cambio nos dotó con la habilidad de hacer predicciones para aprovechar nuestro conocimiento de la naturaleza. Hemos hecho grandes avances en este ámbito, sin embargo, aún hay problemas por resolver como el desarrollo de fenómenos atmosféricos y, particularmente, la predicción de futuros estados a partir de condiciones iniciales bien definidas.

En este documento analizaremos las ideas del meteorólogo y matemático Edward Norton Lorenz sobre rotación de fluidos y dinámicas atmosféricas para realizar predicciones climatológicas. Para lograr este objetivo, nos concentraremos en sus famosas ecuaciones:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x), \\ \dot{y} &= \rho x - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - \beta z.\end{aligned}\tag{1}$$

con σ , ρ , β parámetros reales. [1]

El estudio cuidadoso de estas ecuaciones es un punto de partida para entender los mecanismos detrás de fenómenos atmosféricos como la turbulencia. Esto no es motivo de sorpresa dado que Edward Lorenz derivó este sistema tridimensional como un modelo simplificado de la dinámica convectiva de la atmósfera, es decir, de aquellos procesos de transporte de fluidos en los que el aire caliente y el frío se persiguen mutuamente creando rodillos, y descubrió que este sistema determinístico es extremadamente sensible a las condiciones iniciales. En el documento analizaremos qué sucede al cambiar los valores de los parámetros, así como las condiciones iniciales. Para lograr esto, analizaremos los puntos de equilibrio y su estabilidad a través de una linealización y la matriz Jacobiana asociada al sistema pues por el teorema de Hartman-Grobman, sabemos que el comportamiento local es el mismo. Además, verificaremos nuestros resultados a través de simulaciones numéricas.

2. Propiedades del sistema

2.1. No lineal

Teorema 1. *Decimos que un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma*

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n),\end{aligned}$$

donde $\dot{x}_i \equiv dx_i/dt$, es no lineal si $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es no lineal para alguna i . [1]

Podemos observar que el sistema (1) tiene dos funciones no lineales, ya que se presentan los términos cuadráticos xz en \dot{y} y xy en \dot{z} .

3. Comportamiento

Los puntos de equilibrio del sistema (1) están dados por:

$$(\mathbf{x}_0^*, \mathbf{y}_0^*, \mathbf{z}_0^*) = (0, 0, 0),$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{y}_1^*, \mathbf{z}_1^*) &= (\sqrt{\beta(\rho-1)}, \sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1), \\
(\mathbf{x}_2^*, \mathbf{y}_2^*, \mathbf{z}_2^*) &= (-\sqrt{\beta(\rho-1)}, -\sqrt{\beta(\rho-1)}, \rho-1).
\end{aligned}$$

Así, resulta que tenemos un único punto de equilibrio en el caso que $\rho \leq 1$, y tres puntos de equilibrio en otro caso.

Para analizar su estabilidad, haremos uso del siguiente teorema.

Teorema 2. (Hartman-Grobman) Sea E un subconjunto abierto de \mathbb{R}^n que contiene al origen. Sea $f \in C^1(E)$ y ϕ_t el flujo del sistema no lineal. Suponga que $f(0) = 0$ y que la matriz $A = Df(0)$ no tiene un eigenvalor con parte real cero. Entonces existe un homeomorfismo H de un conjunto abierto U que contiene al origen sobre un conjunto abierto V que también contiene al origen, tal que para cada $x_0 \in U$, existe un intervalo abierto $I_0 \subset \mathbb{R}$ que contiene al cero, tal que para toda $x_0 \in U$ y $t \in I_0$

$$H \circ \phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0)$$

Es decir, H mapea trayectorias del sistema no lineal que están cerca del origen sobre trayectorias cercanas al origen y preserva la parametrización del tiempo.[2]

Gracias a este teorema, podemos utilizar la matriz Jacobiana del sistema para conocer la estabilidad de los puntos de equilibrio, es la siguiente:

$$J(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ \rho - \mathbf{z} & -1 & -\mathbf{x} \\ \mathbf{y} & \mathbf{x} & -\beta \end{pmatrix}.$$

El polinomio característico de esta matriz es el siguiente:

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})(\lambda) = -\lambda^3 - (1 + \beta + \sigma)\lambda^2 + (\rho\sigma - \beta - \sigma - \sigma\beta - \mathbf{x}^2 - \mathbf{z}\sigma)\lambda + (\beta\rho\sigma - \beta\rho\mathbf{z} - \sigma\beta - \sigma\mathbf{x}\mathbf{y} - \sigma\mathbf{x}^2).$$

En particular,

$$p(\mathbf{x}_0^*, \mathbf{y}_0^*, \mathbf{z}_0^*)(\lambda) = -\lambda^3 - (\beta + 1 + \sigma)\lambda^2 + (\rho\sigma - \beta - \sigma - \sigma\beta)\lambda + (\beta\rho\sigma - \sigma\beta).$$

Además,

$$p(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{y}_1^*, \mathbf{z}_1^*)(\lambda) = p(\mathbf{x}_2^*, \mathbf{y}_2^*, \mathbf{z}_2^*)(\lambda)$$

lo que implica que la estabilidad de $(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{y}_1^*, \mathbf{z}_1^*)$ y $(\mathbf{x}_2^*, \mathbf{y}_2^*, \mathbf{z}_2^*)$ es la misma.

Las raíces de estos polinomios son difíciles de determinar en general, por lo tanto, asignaremos valores particulares a los parámetros y estudiaremos el comportamiento de las ecuaciones en cada caso.

Para analizar el comportamiento de las ecuaciones, haremos uso del siguiente teorema.

Teorema 3. Sean $\dot{X} = f(X)$, $X \in \mathbb{R}^n$ un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, $X^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(X^*) = \vec{0}$, y $J(X)$ la matriz Jacobiana de $f(X)$. Tenemos que:

- Si todos los valores propios de $J(X^*)$ tienen parte real negativa, entonces X^* es estable.
- Si al menos un valor propio de $J(X^*)$ tiene parte real negativa, entonces X^* es inestable.
- En otro caso, si al menos un valor propio de $J(X^*)$ es igual a cero, y los demás valores propios son negativos, no se puede concluir nada sobre la estabilidad de X^* . [3]

3.1. Caso 1

En este caso tomamos los parámetros usuales, es decir,

$$\begin{aligned}\sigma &= 10, \\ \rho &= 28, \\ \beta &= \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{y}_1^*, \mathbf{z}_1^*) &= (6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27), \\ (\mathbf{x}_2^*, \mathbf{y}_2^*, \mathbf{z}_2^*) &= (-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27).\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}p(\mathbf{x}_0^*, \mathbf{y}_0^*, \mathbf{z}_0^*)(\lambda) &= -\lambda^3 - \frac{41}{3}\lambda^2 - \frac{722}{3}\lambda + 720, \\ p(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{y}_1^*, \mathbf{z}_1^*)(\lambda) &= p(\mathbf{x}_2^*, \mathbf{y}_2^*, \mathbf{z}_2^*)(\lambda) = -\lambda^3 - \frac{41}{3}\lambda^2 - \frac{304}{3}\lambda - 1440,\end{aligned}$$

Las raíces de los polinomios son

0. $\lambda_0 \approx 2.5526$, $\lambda_1 \approx -8.110 - 12.707i$, $\lambda_2 \approx -8.110 + 12.707i$;
1. $\lambda_0 \approx -8.4050$, $\lambda_1 \approx -2.6308 - 7.0843i$, $\lambda_2 \approx -2.6308 + 7.0843i$,

respectivamente.

Por lo tanto, $(0, 0, 0)$ es un punto de equilibrio inestable, y $(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$, $(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$ son estables.

Gráficamente podemos verificar estos resultados en 1 pues las soluciones se mueven alrededor de los puntos de equilibrio estables.

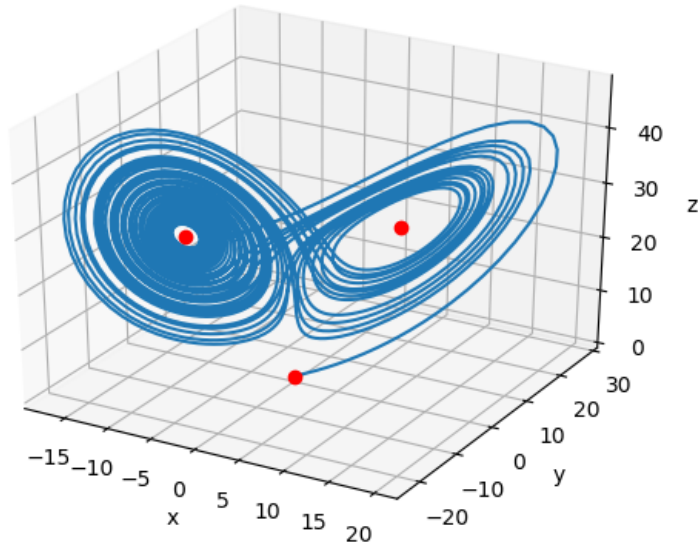


Figura 1: Ecuaciones de Lorenz y sus puntos de equilibrio con punto inicial $(1, 1, 1)$

3.2. Caso 2

En este caso consideramos los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned}\sigma &= 2, \\ \rho &= 2, \\ \beta &= 1.\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{y}_1^*, \mathbf{z}_1^*) &= (1, 1, 1), \\ (\mathbf{x}_2^*, \mathbf{y}_2^*, \mathbf{z}_2^*) &= (-1, -1, 1).\end{aligned}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}p(\mathbf{x}_0^*, \mathbf{y}_0^*, \mathbf{z}_0^*)(\lambda) &= -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 1\lambda + 2, \\ p(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{y}_1^*, \mathbf{z}_1^*)(\lambda) &= p(\mathbf{x}_2^*, \mathbf{y}_2^*, \mathbf{z}_2^*)(\lambda) = -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 4\lambda - 4.\end{aligned}$$

Las raíces de los polinomios son

0. $\lambda_0 = -1$, $\lambda_1 \approx -3.5616$, $\lambda_2 \approx 0.56155$;
1. $\lambda_0 \approx -3.1304$, $\lambda_1 \approx -0.43480 - 1.04343i$, $\lambda_2 \approx -0.43480 + 1.04343i$,

respectivamente.

Por lo tanto, $(0, 0, 0)$ es un punto de equilibrio inestable, y $(1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1)$ son estables. Gráficamente podemos verificar estos resultados en 2 y 3, pues las soluciones convergen a alguno de los puntos de equilibrio estables, dependiendo del punto inicial.

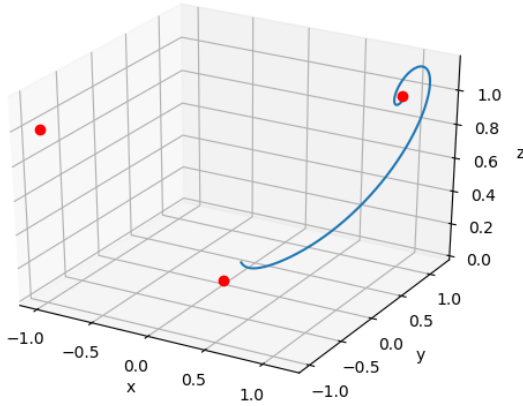


Figura 2: Punto inicial $(1, 1, 1)$

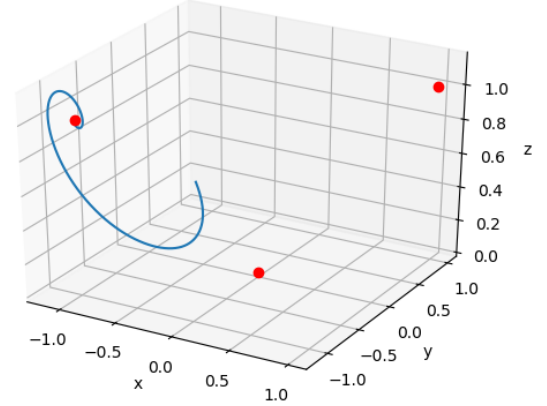


Figura 3: Punto inicial $(-0.5, -0.1, 0.5)$

3.3. Caso 3

Consideramos el caso en que existe un único punto de equilibrio, con los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned}\sigma &= 10, \\ \rho &= \frac{1}{2}, \\ \beta &= \frac{8}{3}.\end{aligned}$$

El polinomio característico resulta

$$p(\mathbf{x}_0^*, \mathbf{y}_0^*, \mathbf{z}_0^*)(\lambda) = -\lambda^3 - \frac{41}{3}\lambda^2 - \frac{103}{3}\lambda - \frac{40}{3}.$$

Las raíces de este polinomio son

$$0. \lambda_0 \approx -2.6667, \lambda_1 \approx -10.525, \lambda_2 \approx -0.47506.$$

Por lo tanto, $(0, 0, 0)$ es un punto de equilibrio estable.

Gráficamente podemos verificar este resultado en 4, pues las soluciones convergen al punto de equilibrio estable.

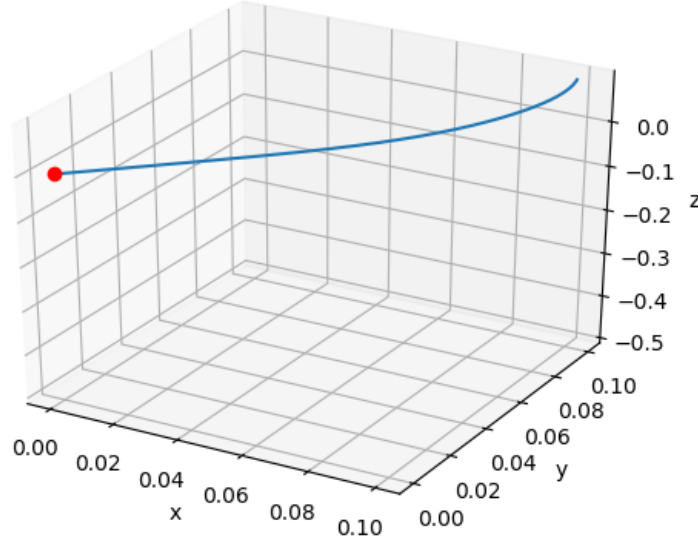


Figura 4: Ecuaciones de Lorenz y sus puntos de equilibrio con punto inicial $(0.1, 0.1, 0.1)$

3.4. Caso 4

En este caso tenemos que:

$$\begin{aligned} \sigma &= 10, \\ \rho &= 14, \\ \beta &= \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_1^*, \mathbf{y}_1^*, \mathbf{z}_1^*) &= \left(\frac{2\sqrt{78}}{3}, \frac{2\sqrt{78}}{3}, 13 \right), \\ (\mathbf{x}_2^*, \mathbf{y}_2^*, \mathbf{z}_2^*) &= \left(-\frac{2\sqrt{78}}{3}, -\frac{2\sqrt{78}}{3}, 13 \right). \end{aligned}$$

Por lo que,

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_0^*, \mathbf{y}_0^*, \mathbf{z}_0^*)(\lambda) &= -\lambda^3 - \frac{41}{3}\lambda^2 + \frac{302}{3}\lambda + \frac{1040}{3}, \\ p(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{y}_1^*, \mathbf{z}_1^*)(\lambda) &= p(\mathbf{x}_2^*, \mathbf{y}_2^*, \mathbf{z}_2^*)(\lambda) = -\lambda^3 - \frac{41}{3}\lambda^2 - \frac{111}{3}\lambda - \frac{2496}{3}. \end{aligned}$$

Las raíces de los polinomios son

0. $\lambda_0 \approx -2.6667$, $\lambda_1 \approx -18.159$, $\lambda_2 \approx 7.1590$;

1. $\lambda_0 \approx -14.830$, $\lambda_1 \approx -6.2808$, $\lambda_2 \approx -7.4438$,

respectivamente. Por lo tanto, $(0, 0, 0)$ es un punto de equilibrio inestable, y $(1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1)$ son estables.

Gráficamente podemos verificar estos resultados en 5 pues las soluciones convergen a alguno de los puntos de equilibrio estables, dependiendo del punto inicial.

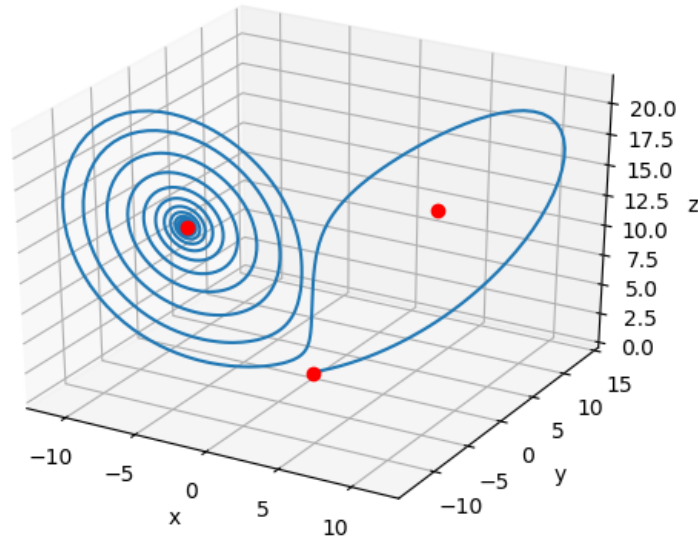


Figura 5: Ecuaciones de Lorenz y sus puntos de equilibrio con punto inicial $(1, 1, 1)$

4. Aplicaciones

Después de que Edward Lorenz planteara su sistema de ecuaciones tridimensional en 1963 y este fallara en realizar predicciones climáticas, se podría pensar que este intento académico no tendría trascendencia en el ámbito aplicado.

Sin embargo, a partir de 1990, se comenzó a emplear las ecuaciones de Lorenz para casos prácticos. Una de sus aplicaciones se encuentra en la comunicación. Para la transmisión y recepción de mensajes secretos resulta que implementar el sistema es muy útil pues por lo general, al mandar un mensaje secreto, se codifica de alguna manera particular para que únicamente el receptor del mensaje pueda decodificarlo de manera correcta.

Kevin Cuomo y Alan Oppenheim (1992,1993) fueron precursores para encontrar una aplicación a este problema en particular[1]. La idea es muy sencilla: al transmitir el mensaje simultáneamente se enmascara la frecuencia distorcionándola con el sistema de Lorenz. Cualquier otra persona que reciba la frecuencia podrá pensar que es ruido sin sentido, pero el receptor, de alguna manera, tiene la forma precisa para lograr extraer el mensaje.

A esta implementación, se le conoce como caos sincronizado. Fue Kevin Cuomo quien implementó las ecuaciones de Lorenz para hacer la demostración de que esto es posible en un circuito eléctrico.

5. Conclusiones

Al analizar los resultados de este trabajo, podemos concluir que el comportamiento de las soluciones del sistema de Lorenz depende mucho de los valores de los parámetros, así como del punto inicial considerado. En ciertos casos, las soluciones convergen a alguno de los puntos de equilibrio, mientras que en otros se mueven alrededor de estos. En nuestros casos, siempre hay por lo menos un punto de equilibrio estable, por lo que se podría suponer que este siempre existe. En general, vimos que cuando existe un único punto de equilibrio, este es estable, y, al tener tres, dos son estables y el origen se vuelve inestable, lo que podría indicar una bifurcación de tipo tenedor para $\rho = 1$. Sin herramientas numéricas, resulta muy difícil determinar cómo se van a comportar las soluciones del sistema con ciertos parámetros, y de qué manera afecta un cambio en ellos.

6. Bibliografía

Referencias

- [1] Strogatz, S. H. (1994). Nonlinear Dynamics and Chaos: with Applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering.
- [2] Perko, L. (2014). Differential equations and dynamical systems: With 241 illustrations. New York: Springer.
- [3] Eberly, D. (2003). Stability Analysis for Systems of Differential Equations. Geometric Tools. Disponible en: <https://www.geometrictools.com/Documentation/StabilityAnalysis.pdf>