Proyecto
Optimización Numérica
Método de Punto Interior Predictor Corrector
Programación Cuadrática

1 Introducción

Considere el problema

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & (1/2)x^TQx^T + c^Tx \\ \text{sujeto a} & Ax = b \\ & Fx \geq d, \end{array} \tag{1}$$

donde $Q \in \mathbb{R}^{nxn}$ es simétrica y positiva definida, $A \in \mathbb{R}^{mxn}$ tal que $m \leq n$ y $rango(A) = m$, $F \in \mathbb{R}^{pxn}$, $c, \ x \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $d \in \mathbb{R}^p$.

Sea $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, \ Fx - d \geq 0 \}$ el conjunto factible de (1).

Suponemos que $\Omega^o = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, \ Fx - d > 0 \} \neq \emptyset$.

Las condiciones necesarias de primer orden para un mínimo local de (1) son,

$$\mathbb{F}(x, \lambda, \ \mu, \ z) = \begin{pmatrix} Qx + A^T\lambda - F^T\mu + c \\ Ax - b \\ -Fx + z + d \\ UZe \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\mu, \ z) \geq 0, \tag{2}$$

Las condiciones perturbadas de primer orden con parámetro $\gamma > 0$ son

$$\mathbb{F}_\gamma(x, \lambda, \ \mu, \ z) = \begin{pmatrix} Qx + A^T\lambda - F^T\mu + c \\ Ax - b \\ -Fx + z + d \\ UZe - \gamma e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\mu, \ z) > 0, \tag{3}$$

donde $U = diag(\mu), \ Z = diag(z)$ y $e = (1, \ 1, \ ..., \ 1)^T \in \mathbb{R}^p$.

2 Método Predictor-Corrector

Sea $w = (x,\ \lambda,\ \mu,\ z)$:

---

1. Sean $w_0 = (x_0,\ \lambda_0,\ \mu_0,\ z_0)$, $\gamma_0 > 0,\ \gamma \approx 0$ tales que $\mu_0,\ z_0 > 0$. Hacer $k \leftarrow 0,\ \ \gamma_{size} \leftarrow (\mu_0)^T(z_0)/p$..
2. Mientras $\|F_0(w_k)\|_2 > tol$ hacer
   (a) Resuelva el sistema lineal:
   $$F'{}_0(w_k)\Delta w_k = -F_0(w_k)$$
   donde el vector solución es $\Delta w_k = (\Delta x_k,\ \Delta\lambda_k,\ \Delta\mu_k,\ \Delta z_k)$ es el paso de predicción
   (b) Determine $\alpha_k \in (0,\ 1]$ tal que
   $$z^* = z_k + \alpha_k \Delta z_k > 0,\ ,\ \mu^* = \mu_k + \alpha_k \Delta\mu_k > 0$$
   (c) Hacer $\gamma \leftarrow (z^*)^T(\mu^*)/p$
   $\gamma \leftarrow (\gamma/\gamma_{size})^3$
   $\gamma \leftarrow \gamma * \gamma_{size}$
   (d) Resolver el sistema lineal
   $$F'{}_0(w_k)(\Delta w_k)^* = -F_0(w_k) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\Delta Z_k \Delta U_k e + \gamma e \end{pmatrix}.$$
   El vector $(\Delta w_k)^*$ es el paso de corrección.
   (e) Determine $\alpha_k \in (0,\ 1]$ tal que
   $$z_k + \alpha_k(\Delta z_k)^* > 0,\ ,\ \mu_k + \alpha_k(\Delta\mu_k)^2 > 0$$
   (f) Actualizar
   $$w_{k+1} = w_k + \alpha_k(\Delta w_k)^*.$$
   (g) $k \leftarrow k + 1$ e ir al paso 2.

---

3 El Sistema Lineal

En el paso predictor, Δw_k, y en el paso corrector, $(\Delta w_k)^*$, se debe resolver un sistema lineal de la forma:

$$\begin{pmatrix} Q & A^T & -F^T & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 \\ -F & 0 & 0 & I_p \\ 0 & 0 & Z & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\lambda \\ \Delta\mu \\ \Delta z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_\lambda \\ r_\mu \\ r_z \end{pmatrix}, \tag{4}$$

cuya matriz es rala (tiene muchas entradas igual a cero).

Pregunta 1. Calcule el número de entradas igual a cero en la matriz del sistema lineal.

Pregunta 2. Muestre que el sistema lineal (4) puede reducirse a un sistema lineal de orden $(n+m)$ con la estructura:

$$\begin{pmatrix} \hat{Q} & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{r}_x \\ r_\lambda \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Pregunta 3. Pruebe que el sistema lineal (5) son las condiciones necesarias de primer orden del problema cuadrático

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & \frac{1}{2}\Delta x^T \hat{Q} \Delta x - \hat{r}_x^T \Delta x \\ \text{Sujeto a} & A\Delta x = r_\lambda \end{array} \tag{6}$$

De donde los pasos predictor y corrector son calculados resolviendo un sistema lineal de la forma (5).

4 Programación

Escriba una función en MATLAB de la forma

function $[x,\ \lambda,\ \mu,\ z,\ iter] = qpintpointpc(Q, A, F, c, d)$
% Resuelve el problema cuadrático por el método de puntos interiores

% con el esquema de preedicción y corrección.
% **No se resuelve el sistema lineal con la matriz completa**.
% Número máximo de iteraciones permitidas es, $maxiter = 100$.
% La variable de salida,$iter$, es el número de iteraciones que usa el método.
% Se inicia con $iter = 0$ y se incrementa en uno en cada itercaión.
% Se detiene el método cuando $\|F_0(w_k)\|_2 \leq 10^{-5}$ o $k = maxiter$.
%
% El punto inicial : $x \in \mathbb{R}^n$ satisface que $Ax = b$.
% $\lambda = 0$, $\mu = z = (1,\ ...,\ 1)^T \in \mathbb{R}^p$.

5 Funciones de Prueba

Los Problemas de Netlib:

$$\begin{array}{ll} \text{Minimizar} & (1/2)x^TQx^T + c^Tx \\ \text{sujeto a} & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{array}$$

Los datos, $A \in \mathbb{R}^{mxn},\ c \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m$, están en los archivos $**.mat$.

En todos los casos se define

$$Q = I_n.$$

Se verifica que $rango(A) = m$.

El programa regresa los siguientes valores:

Problema	n	m	iter	$f(x^*)$
AFIRO	51	27	38	$2.0082e+05$
CAPRI	496	271	138*	$9.3979e+07$
SC105	163	105	50*	$1.7720e+05$
BOEING1	726	351	150	NOCONV
GROW7	301	140	36	-88.3601
SCTAP1	660	330	47*	$1.4453e+04$

El problema de BOEING1 no converge, de hecho no se obtienen puntos factibles. Algunos problemas, CAPRI, SC105 y SCTAP1, tienen matrices mal condicionadas en las últimas iteraciones, esto se muestra con un * en el número de iteraciones. Los problemas AFIRO y GROW7 se comportan bien. En todos los casos el vector inicial, x, satisface que $A * x = b$.

El programa **quadprog.m** en Matlab obtiene los siguientes valores:

Problema	n	m	iter	$f(x^*)$
AFIRO	51	27	11	$2.0082e+05$
CAPRI	496	271	34	$9.3979e+07$
SC105	163	105	9	$1.7720e+05$
BOEING1	726	351	28	NOCONV
GROW7	301	140	9	-88.3601
SCTAP1	660	330	12	$1.4453e+04$

Matlab usa un método de predicción-corrección en cada iteración, además de que genera el punto inicial.

6 Entregar

Equipos de a lo más tres estudiantes.
Enviar los siguientes programas

1. **qpintpointpc.m**, programa de puntos interiores.
2. **AFIRO.mat, CAPRI.mat, SC105.mat, BOEING1.mat, GROW7.mat, SCTAP1.mat**.
3. Un script file para cada instancias, por ejemplo para AFIRO, el script será, **SOLAFIRO.m**. Debe mostrar en la pantalla el número de iteraciones que se realizaron y la norma de las condiciones suficientes de primer orden en el punto final.

Empaquetar los programas, **proy1.zip** o **proy1.rar** y enviar a la dirección: **zeferino@itam.mx**

Fecha: **Viernes 6 de marzo de 2020 en hora de clase. Habrá exposición por equipos.**