Proyecto 1- Análisis Aplicado

Pablo Barranco-151528 Francisco Gonzalez - 156292 Sofía De la Mora - 160062

13 de octubre de 2019

Utilizaremos la función Booth para poner aprueba algoritmos de optmización. La función antes mencionada tiene dos dimensiones, su dominio es el cuadrado donde $x_i \in [-10, 10]$ para $i = 1, 2$. Es una función continua, convexa, diferenciable, unimodal y su regla de correspondencia es

$$f(x) = (x_1 + 2x_2 - 7)^2 + (2x_1 + x_2 - 5)^2$$

Pertenece a la familia de funciones "test"; lo que significa que, es útil para evaluar algoritmos. El presente documento tiene como propóstivo utilizar la función antes mencionada para evaluar el método de Región de Confianza utilizando los métodos del Punto de Cauchy y del Punto Dogleg.

El método de región de confianza permite encontrar el mínimo de una función modelando otra función cuadrática m_k que se asemeja a la orginal cerca de la iteración en la que se encuentre en el momento. El Punto de Cauchy es una estrategia para encontrar las soluciones aproximadas del método antes mencionado, pero es la dirección de máximo descenso. Entonces, esta es una dirección sencilla de construir, pero es lenta a comparación de otros métodos.

Implementamos también el método con el Punto de Dogleg, el cual es bueno si nuestra Hessiana es positiva definida (en este caso se cumple). El método elige una trayectoria en forma de "V"que va primero hacia la dirección de máximo descenso y después a la Dirección de Newton.

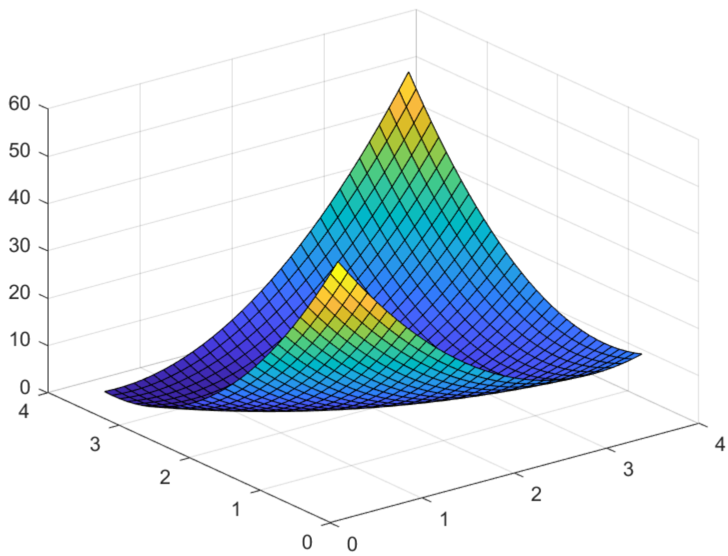

Figura 1: Función Booth

Notemos que el gradiente y la hessiana de la función de booth son

$$g = \begin{pmatrix} 10x + 8y - 34 \\ 8x + 10y - 38 \end{pmatrix}$$
$$B = \begin{pmatrix} 10 & 8 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$$

Es fácil notar que B es una matriz simétrica positiva definida con eigenvalores $\lambda_1 = 18$ y $\lambda_2 = 2$. Por lo que, podemos usar el punto Dogleg apropiadamente.

Encontramos que el punto mínimo de la función Booth es:

$$f(x^*) = 0 \text{ si y sólo si } x^* = (1, 3)$$

Creamos una función en Matlab que encuentre el punto de Cauchy, una para el punto Dogleg y dos funciones para usar estos en una región de confianza. A continuación se presentarán las gráficas y la tabla que muestran los resultados de los códigos realizados para llegar al mínimo antes comentado.

En la siguiente imagen se observa la función Booth con $x_0 = (0.5, 2.1)$, punto inicial cercano a $x^* = (1, 3)$. También se puede apreciar las direcciones de Newton (verde), Cauchy (rojo) y Dogleg (azul). Es claro que Dogleg se acerca más rápido al punto mínimo de la función.

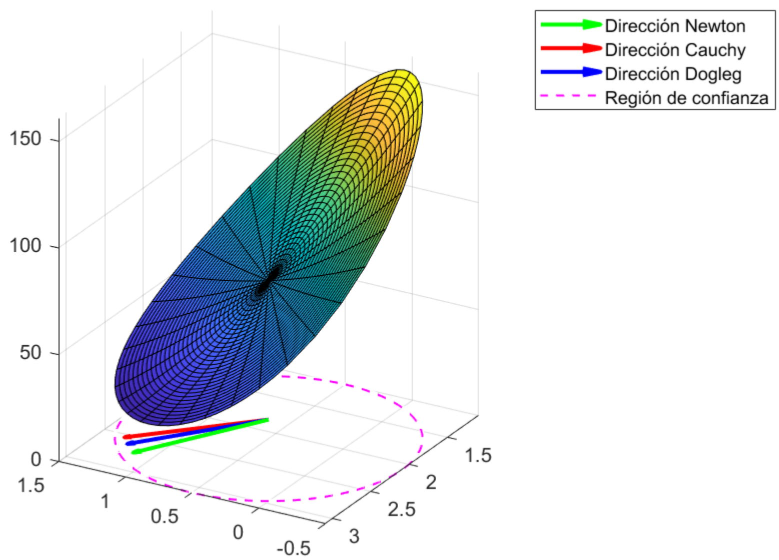

Figura 2: Direcciones y función de Booth

Ahora queremos un punto inicial que cumpla $\|x_0 - x^*\|_2 > \Delta_{max}$ y B_k no positiva definida, pero como la función es convexa globalmente, elegimos una distancia mayor que $3\Delta_{max}$, pues nuestra Hessiana es constante y resulta ser positiva definida para toda x. En este caso nuesta $x_0 = (5, 5.5)$ para que se cumpla lo anterior.

La siguiente tabla compara el método de Región de Confianza con el Punto de Cauchy con el método de Región de Confianza con el Punto Dogleg con respecto a las iteraciones que les toma a cada uno. La última columna mide cuál es el error al final de todas las iteraciones para cada método utilizando que $x^* = (1, 3)$.

Método	Iteraciones	Error
pCauchy	13	3.5611e-07
pDogleg	4	4.0638e-10

Figura 3: Tabla de comparaciones

Queremos ver el camino seguido por las iteraciones para llegar a la solución final; por lo que, los podemos vizualizar con las siguiente gráficas de los conjuntos de nivel de la función, donde es claro que, como vimos antes, las iteraciones que toma el método con el punto Dogleg son menos que las que toma con el punto de Cauchy. El final del camino es el mismo para ambos métodos; sin embargo, el Punto de Dogleg optimiza el recorrido al llegar directamente al punto mínimo.

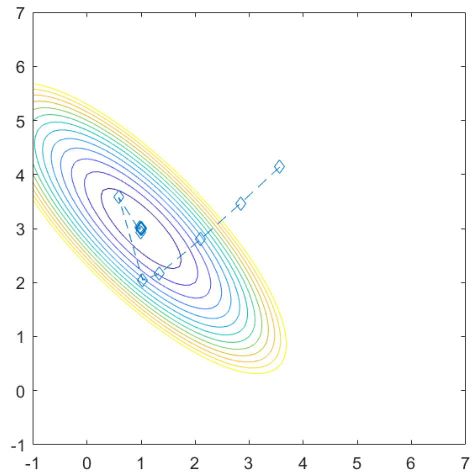

Figura 4: Camino iteraciones con el Punto de Cauchy

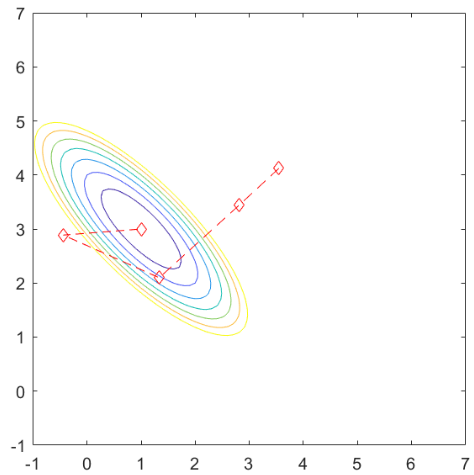

Figura 5: Camino iteraciones con el Punto de Dogleg

La función Booth fue útil para percatarnos de la capacidad de los algoritmos de región de confianza que encuentran el mínimo de dicha función. Por una parte, a el algoritmo con el Punto de Cauchy le tomó más iteraciones que al que usa el Punto Dogleg, lo cual es teoricamente correcto. Además, el algoritmo de región de confianza que utiliza al Punto Dogleg tiene un error considerablemente menor al que utiliza el Punto de Cauchy. Es decir, el algoritmo con Dogleg se acerca más y más rápido a la solución real comparado con el algoritmo con Cauchy.