Punto Interior, Predictor Corrector y Programación Cuadrática

Pablo Barranco & Diego Villegas & José Miguel Carmona

ITAM

Marzo, 2020

Outline

1. Programas
2. Resultados
3. Conclusiones

Versión Preliminar

$$
\begin{aligned}
\text{Minimizar } & (1/2)x^T Qx + c^T x \\
\text{sujeto a } & Ax = b \\
& Fx \geq d
\end{aligned}
$$

Las condiciones necesarias de primer orden para un mínimo local son,

$$
\mathfrak{F}(x, \lambda, \mu, z) = \begin{bmatrix} Qx + A^T\lambda - F^T\mu + c \\ Ax - b \\ -Fx + z + d \\ UZe \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, (\mu, z) \geq 0 \qquad (1)
$$

Condiciones Perturbadas

Las condiciones perturbadas de primer orden con parámetro $\gamma > 0$ son

$$\mathfrak{F}(x, \lambda, \mu, z) = \begin{bmatrix} Qx + A^T\lambda - F^T\mu + c \\ Ax - b \\ -Fx + z + d \\ UZe - \gamma e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, (\mu, z) \geq 0 \qquad (2)$$

donde $U = \text{diag}(\mu), Z = \text{diag}(z)$ y $e = (1, 1, ..., 1)^T \in \mathbb{R}^P$

Por el Teorema de la función implícita se tiene que existe $\gamma^* > 0$ tal que tiene solución única para $\gamma \in (0, \gamma^*)$. La trayectoria central asociada al problema de minimización es:

$$w_\gamma = \begin{bmatrix} x_\gamma \\ \lambda_\gamma \\ \mu_\gamma \\ z_\gamma \end{bmatrix}, \in \mathbb{R}^{n+m+p+p}$$

Tales que w_γ resuelve (2).

Sistema Reducido

Notamos que

$$\lim_{\gamma \to 0} F_\gamma(w_\gamma) = F(x^*, \lambda^*, \mu^*, z^*)$$

Se tiene que la siguiente matriz no-singular

$$\begin{bmatrix} Q & A^T & -F^T & 0 \\ A & 0 & 0 & 0 \\ -F & 0 & 0 & I_p \\ 0 & 0 & Z & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \\ \Delta \mu \\ \Delta z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_\lambda \\ r_\mu \\ r_z \end{bmatrix}$$

Dicho sistema lineal puede reducirse a un sistema lineal de orden $(n+m)$ con la estructura:

$$\begin{bmatrix} \hat{Q} & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{r}_x \\ r_\lambda \end{bmatrix}$$

Programación Cuadrática

Donde

$$\hat{Q} = Q + F^T Z^{-1} U F$$

$$\hat{r_x} = r_x + F^T Z^{-1} (r_z - U r_\mu)$$

$$Z^{-1} = \text{diag}(\frac{1}{z})$$

$$U = \text{diag}(U)$$

El cual resulta ser las condiciones de primer orden del siguiente problema.

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } (1/2)\Delta x^T \hat{Q} \Delta x - \hat{r}_x^T \Delta x \\ &\text{sujeto a } \; A\Delta x = r_\lambda \end{aligned}$$

Predictor-corrector

Sea $w = (x, \lambda, \mu, z)$

1. Sean $w_0 = (x_0, \lambda_0, \mu_0, z_0), \gamma_0 > 0, \gamma \approx 0$ tales que $\mu_0, z_0 > 0$. Hacer $k \longleftarrow 0$, $\gamma_{\text{size}} \longleftarrow \frac{(\mu_0)^T(z_0)}{p}$
2. Mientras $\|F_0(w_k)\| > to$ hacer
   - Resuelva el sistema lineal:

     $$F_0'(w_k)\Delta w_k = -F_0(w_k)$$

     donde el vector solución es $\Delta w_k = (\Delta x_k, \Delta\lambda_k, \Delta\mu_k, \Delta z_k)$ es el paso de predicción.

Predictor-Corrector

- Hacer:

$$\gamma \longleftarrow (z^*)^T(\mu^*)/p$$

$$\gamma \longleftarrow (\gamma/\gamma_{size})^3$$

$$\gamma \longleftarrow \gamma * \gamma_{size}$$

- Resolver el sistema lineal

$$F_0'(w_k)(\Delta w_k)^* = -F_0(w_k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\Delta Z_k \Delta U_k e + \gamma e \end{bmatrix}$$

  El vector $(\Delta w_k)^*$ es el paso de corrección

- Determine $\alpha_k \in (0, 1]$ tal que

$$z_k + \alpha_k(\Delta z_k)^* > 0, \mu_k + \alpha_k(\Delta \mu_k)^2 > 0$$

Predictor-Corrector

- Actualizar

$$w_k + 1 = w_k + \alpha_k(\Delta w_k)^*$$

- $k \longleftarrow k + 1$ e ir al paso 2

AFIRO; n =51 , m = 27

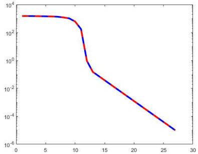

Figure: 27, 2.00823e+05 , 0.093

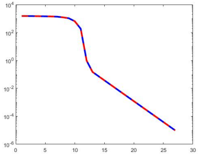

Figure: 27, 2.00823e+05, 0.1875

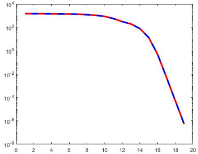

Figure: 19, 2.00823e+05 , 0.234

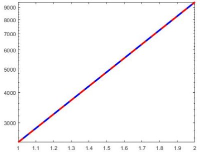

Figure: 2, 5.88076e+05, 0.0312

CAPRI n = 496, m = 271

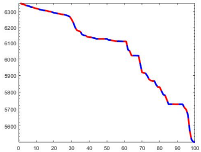

Figure: 100, 1.0288401e+07, 23.59

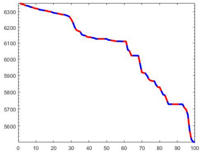

Figure: 100, 1.0288401e+07, 23.59

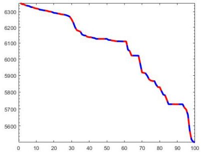

Figure: 100, 1.0275946e+07, 47.60

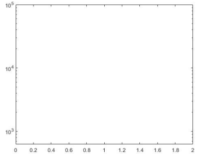

Figure: 1, 1.0275946e+07, 41.81

SC105 n = 163, m = 105

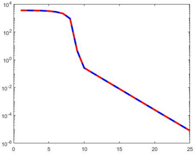

Figure: 25, 1.77199e+05 ,0.95

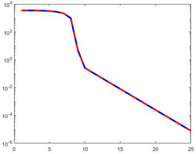

Figure: 25, 1.77199e+05 ,1.98

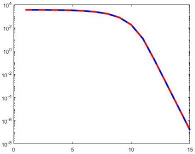

Figure: 15, 1.77199e+05 ,0.73

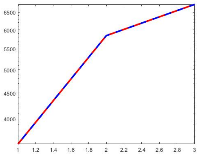

Figure: 3, 3.127691e+06 ,0.23

BOEING1, n=726, m=351

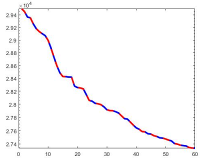

Figure: 100, 1.796279e+08, 55.23

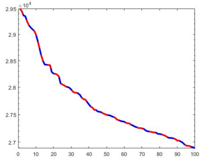

Figure: 100, 1.796344e+08, 121.04

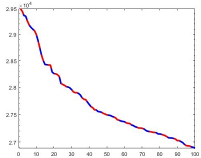

Figure: 100, 1.809962e+08, 100.17

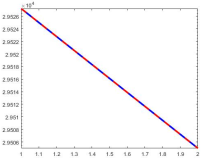

Figure: 2, 2.1796719e+08, 1.89

GROW7 n = 301, m = 140

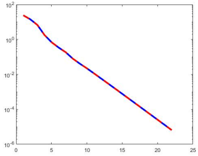

Figure: 24, -88.360 ,1.93

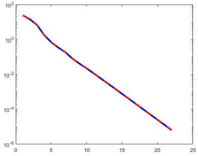

Figure: 22, -88.360 ,3.17

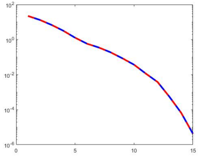

Figure: 15, -88.3601 ,1.89

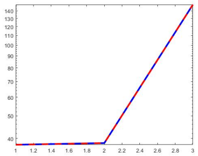

Figure: 3, -51.8622 ,0.26

SCTAP1 n = 330, m = 55

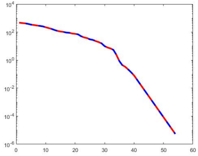

Figure: 54, 1.4453e+04, 23.84

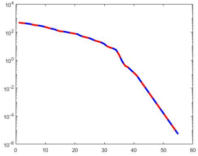

Figure: 55, 1.4453e+04, 49.03

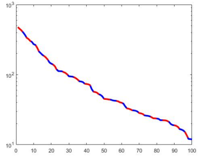

Figure: 55, 1.4453e+04, 78.68

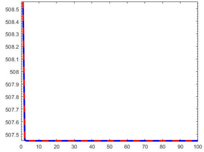

Figure: 100, 2.0390e+04, 62.21

Conclusiones

AFIRO:
El valor óptimo 2.00823e+05 se obtuvo en las opciones 1,2 y 3. En la opción 4, la matriz reducida en la segunda iteración era singular numéricamente, por lo que se dejo de iterar y no encontró el valor óptimo. La opción 3 tuvo el mínimo de iteraciones, 19, mientras que la opción 1 fue el que menos tardó en converger.

CAPRI:
Ninguna de las opciones converge en 100 iteraciones, que fue el máximo permitido, y todas llegan a un valor similar. La opción 4 encuentra que la matriz reducida es singular numéricamente por lo que se cancela el proceso de iteración.
Probablemente se llegaría al óptimo al que llega quadprog.m si permitimos un número mayor de iteraciones.

Conclusiones

SC105:
En las primeras tres opciones se llega al valor óptimo y coincide con el quadprog.m. En la opción 4 nuevamente encuentra la matriz reducida que es singular numéricamente, por lo que se deja el proceso iterativo desde la tercera iteración.
La opción 3 nuevamente tuvo el mínimo de iteraciones con 15, así como el tiempo mínimo.

BOEING1:
Ninguna de las opciones converge en 100 iteraciones, que fue el máximo permitido, y todas llegan a un valor similar. La opción 4 encuentra que la matriz reducida es singular numéricamente por lo que se cancela el proceso en la segunda iteración.

Conclusiones

GROW7:
Las priemras 3 opciones llegan al mismo valor óptimo, que coincide con el quadprog.m. La opción 4 en la tercera iteración encuentra que la matriz reducida es singular por lo que se cancela el proceso de iteración.
La opción 3 tuvo el mínimo de iteraciones, 15, mientras que la opción 1 fue el que menos tardó en converger.

SCTAP1:
Ninguna de las opciones converge en 100 iteraciones, que fue el máximo permitido, y todas llegan a un valor similar. La opción 4 encuentra que la matriz reducida es singular numéricamente por lo que se cancela el proceso de iteración.