Hjemmeopgave 2

af Peter Bay Bastian, s113119

Danmarks Tekniske Universitet
Institut for Informatik og Matematisk Modellering
02105 Algoritmer og Datastrukturer 1
Inge Li Gørtz
14. marts 2012

Opgave 1

Algoritme 1

Jeg ser først på følgende algoritme:

Algorithm 1 Løkke1(n)

```
1: for i = 1 to n do
2:     for j = 1 to n + 1 − i do
3:         print i + j
4:     end for
5: end for
```

Da linje 3 er den eneste linje, som ikke er en kontrolstruktur, er det den eneste jeg ser på. Jeg kan opskrive matematisk hvor mange gange linje 3 kører:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1-i} 1 \tag{1}$$

Den ydre summering repræsenterer den ydre løkke og den indre summering den indre løkke. Vi ved, at følgende gælder:

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

Det kan jeg benytte til, at finde værdien af den indre summering:

$$\sum_{j=1}^{n+1-i} 1 = n + 1 - i$$

Resultatet af det kan jeg da indsætte i (1):

$$\sum_{i=1}^{n} (n + 1 - i) \tag{2}$$

Vi ved yderligere, at følgende gælder:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{i=1}^{n} n = n^2$$

Det kan jeg benytte til, at finde værdien af (2):

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i) &= n^2+n-\frac{n(n+1)}{2} \\ &= n^2+n-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n \\ &= \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\end{aligned} \tag{3}$$

Det er kun det første led, der er relevant her. Ud fra dette kan jeg opskrive:

$$\text{Løkke1}\,(n) = \Theta\left(n^2\right)$$

Algoritme 2

Jeg ser nu på følgende algoritme:

Algorithm 2 Løkke2(n)

```
1: i = 1
2: while i < n do
3:     for j = 1 to n do
4:         i = i + 1
5:     end for
6:     i = i · 2
7: end while
```

Man kunne i princippet lige så godt skrive linje 4 som $i = i + n$, da i bliver forøget med 1 n gange.

Betingelsen for while-løkken på linje 2 bliver allerede brudt ved første iteration, da $i = i + n$ medfører, at $i = 1 + n$ (da $i = 1$ gælder ved løkkens start), hvilket selvfølgelig medfører, at $i > n$. Derved gælder $i < n$ ikke længere.

Altså køres linje 1 og 6 kun én gang. Linje 4 køres n gange. Det giver os:

$$\text{Løkke2}\,(n) = n + 3$$

Ud fra det kan jeg opskrive følgende:

$$\text{Løkke2}\,(n) = O(n)$$

Dette gælder, da der findes en konstant c således, at $c \cdot n > n$ altid gælder. Denne konstant c kunne f.eks. være 2.

$$\text{Løkke2}\,(n) = \Omega(n)$$

Dette gælder, da der findes en konstant c således, at $c \cdot n < n$ altid gælder. Denne konstant c kunne f.eks. være $\frac{1}{2}$. Jeg kan nu konkludere følgende:

$$\text{Løkke2}\,(n) = \Theta(n)$$