Hjemmeopgave 2

af Peter Bay Bastian, s113119

Danmarks Tekniske Universitet
Institut for Informatik og Matematisk Modellering
02105 Algoritmer og Datastrukturer 1
Inge Li Gørtz
14. marts 2012

Opgave 1

Algoritme 1

Jeg ser først på følgende algoritme:

Algorithm 1 Løkke1(n)

1: **for** $i = 1$ to n **do**
2:     **for** $j = 1$ to $n + 1 - i$ **do**
3:         **print** $i + j$
4:     **end for**
5: **end for**

Da linje 3 er den eneste linje, som ikke er en kontrolstruktur, er det den eneste jeg ser på. Jeg kan opskrive matematisk hvor mange gange linje 3 kører:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n+1-i} 1 \tag{1}$$

Den ydre summering repræsenterer den ydre løkke og den indre summering den indre løkke. Vi ved, at følgende gælder:

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

Det kan jeg benytte til, at finde værdien af den indre summering:

$$\sum_{j=1}^{n+1-i} 1 = n + 1 - i$$

Resultatet af det kan jeg da indsætte i (1):

$$\sum_{i=1}^{n} (n + 1 - i) \tag{2}$$

Vi ved yderligere, at følgende gælder:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} n = n^2$$

Det kan jeg benytte til, at finde værdien af (2):

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}(n+1-i) &= n^2+n-\frac{n(n+1)}{2}\\ &= n^2+n-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\\ &= \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n\end{aligned} \tag{3}$$

Det er kun det første led, der er relevant her. Ud fra dette kan jeg opskrive:

$$\text{Løkke1}\,(n) = O\left(n^2\right)$$

Det gælder, da der findes en konstant c således, at $c\ n^2$ før eller siden vil blive større end $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$. Bestemmer konstanten c:

$$\begin{aligned}c\ \cdot\ n^2 > \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad c > \frac{\frac{1}{2}n^2}{n^2}+\frac{\frac{1}{2}n}{n^2}\\ &\Rightarrow \quad c > \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\end{aligned}$$

Jeg ser på et tilfælde, hvor $c\ n$ bliver større end $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$ ved $n=1$:

$$c > \frac{1}{2}+\frac{1}{2\ \cdot\ 1} \quad \Rightarrow \quad c > 1$$

Efterprøver med $c=2$ ved $n=1$

$$2\ \cdot\ 1^2 > \frac{1}{2}+\frac{1}{2\ \cdot\ 1}$$

Jeg kan også opskrive følgende ud fra (3):

$$\text{Løkke1}\,(n) = \Omega\left(n^2\right)$$

Det gælder, da der findes en konstant c således, at $c\ n^2$ før eller siden vil blive mindre end $\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$. Bestemmer konstanten c:

$$\begin{aligned}c\ \cdot\ n^2 < \frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2} \quad &\Rightarrow \quad c < \frac{\frac{1}{2}n^2}{n^2}+\frac{\frac{1}{2}n}{n^2}\\ &\Rightarrow \quad c < \frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\end{aligned}$$

Algoritme 2

Jeg ser nu på følgende algoritme:

Algorithm 2 Løkke2(n)

```
i = 1
while i < n do
    for j = 1 to n do
        i = i + 1
    end for
    i = i · 2
end while
```