Mathématiques
Pré-calcul A 120
Programme d'études de la 12e année

Mise en œuvre septembre 2013

Remerciements

Le ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick et du Développement de la petite enfance est sincèrement reconnaissant du soutien apporté par les personnes et groupes suivants dans l'élaboration du *Guide pédagogique « Mathématiques Pré-calcul A 120 pour le Nouveau-Brunswick :*

- le Protocole de l'Ouest et du Nord canadiens de collaboration concernant l'éducation, *Cadre commun des programmes d'études de mathématiques 10–12, janvier* 2008, reproduction (ou adaptation) autorisée, tous droits réservés;

- Ministère de l'éducation de Terre-Neuve et Labrador, Ministère de L'éducation et développement préscolaire de Ile-du-Prince Édouard

- le comité consultatif d'élaboration des programmes de mathématiques de niveau secondaire du N.-B., constitué de Bev Amos, Roddie Dugay, Suzanne Gaskin, Nicole Giberson, Karen Glynn, Beverlee Gonzales, Ron Manuel, Jane Pearson, Elaine Sherrard, Alyssa Sankey (UNB), Mahin Salmani (UNB) et de Maureen Tingley (UNB);

- l'équipe de rédaction du programme de 10e année du Nouveau-Brunswick, constituée Carolyn Campbell, Mary Clarke, Gail Coates, Megan Crosby, Richard Cuming, Geordie Doak, Nancy Everett, Ryan Hachey, Nancy Hodnett, Wendy Hudon, Wendy Johnson, Julie Jones, Andrea Linton, Brad Lynch, Erin MacDougall, Sheridan Mawhinney, Chris McLaughlin, Nick Munn, Yvan Pelletier, Parise Plourde, Tony Smith, Anne Spinney, Glen Spurrell.

- Martha McClure, spécialiste en apprentissage des sciences et des mathématiques 9-12, ministère de l'Éducation du Nouveau-Brunswick;

- les coordonnateurs de mathématiques, les mentors de numérative et les enseignants de mathématiques du Nouveau-Brunswick qui ont offert de précieux conseils durant toutes les phases de l'élaboration et de la mise en œuvre du présent document.

2017

Ministère de l'Éducation et du Développement de la petite enfance

Programmes et services éducatifs

Table des matières

Survol du programme d'études en mathématiques 10–12

CONTEXTE ET FONDEMENT

La vision du programme de mathématiques est de favoriser la formation d'élèves dotés d'une culture mathématique qui sont en mesure de généraliser et d'appliquer les connaissances acquises et qui participent de façon active à la société.

Il est essentiel que le programme d'études de mathématiques reflète la recherche actuelle en matière de formation en mathématiques. Dans ce but, le *Cadre commun des programmes d'études de mathématiques 10–12* du Protocole de l'Ouest et du Nord canadiens a été adopté comme fondement du programme d'études révisé de mathématiques au Nouveau-Brunswick. Le Cadre commun des programmes d'études a été élaboré par les sept ministères de l'Éducation (Alberta, Colombie-Britannique, Manitoba, Territoires du Nord-Ouest, Nunavut, Saskatchewan et Yukon) en collaboration avec des enseignants, des administrateurs, des parents, des représentants du monde des affaires, des enseignants de niveau postsecondaire et d'autres personnes concernées.

Ce cadre détermine les convictions en matière d'apprentissage des mathématiques, les résultats d'apprentissage généraux et spécifiques et les INDICATEURS DE RÉUSSITE sur lesquels se sont accordés les sept provinces et territoires. Ce document repose sur la recherche à la fois nationale et internationale menée par le Protocole de l'Ouest et du Nord canadiens et le National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Le programme d'études du Nouveau-Brunswick met l'accent sur des concepts clés spécifiques chaque année, qui visent une compréhension plus approfondie de l'élève et, par conséquent, une plus grande réussite. En outre, une attention toute particulière est portée sur le sens du nombre et les concepts d'opérations dans les premières années afin de veiller à ce que les élèves acquièrent des bases solides en numératie.

L'objectif du présent document est de communiquer avec clarté à l'ensemble des partenaires éducatifs les attentes élevées en matière de formation en mathématiques pour les élèves. Du fait de l'importance accordée aux concepts clés chaque année, il est nécessaire de prendre le temps de s'assurer de la parfaite maîtrise de ces concepts. Les élèves doivent apprendre les mathématiques par la compréhension et l'acquisition active de nouvelles connaissances à partir de leurs expériences et de leurs connaissances antérieures (NCTM Principles and Standards, 2000).

CONVICTIONS À PROPOS DES ÉLÈVES ET DE L'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES

Le programme de mathématiques du Nouveau-Brunswick repose sur plusieurs postulats ou convictions clés à propos de l'apprentissage des mathématiques émanant des recherches et de l'expérience pratique dans ce domaine. Il s'agit des convictions suivantes :

- l'apprentissage des mathématiques constitue un cheminement actif et constructif;
- les apprenants possèdent chacun leur bagage de connaissances et d'expérience et apprennent au moyen d'approches diverses et à des rythmes différents;
- l'apprentissage est plus susceptible de se produire lorsque la matière est présentée en contexte et au sein d'un milieu favorisant l'exploration, la prise de risques et le raisonnement critique, tout en préconisant les attitudes positives et l'effort soutenu;
- l'apprentissage est plus efficace lorsque les attentes sont clairement définies par l'intermédiaire d'une évaluation et d'une rétroaction continues.

Les élèves sont des apprenants curieux et actifs ayant tous des intérêts, des habiletés et des besoins qui leur sont propres. Chacun arrive à l'école avec son propre bagage de connaissances, son vécu et ses acquis. Un élément clé de la réussite du développement de la numératie est l'établissement de liens avec ces acquis et ce vécu.

Les élèves apprennent quand ils peuvent attribuer une signification à ce qu'ils font et chacun d'entre eux doit construire son propre sens des mathématiques à partir d'une variété de situations d'apprentissage. C'est en allant du plus simple au plus complexe ou du plus concret au plus abstrait que les élèves ont le plus de possibilités de développer leur compréhension des mathématiques. Il existe de nombreuses approches pédagogiques destinées aux enseignants qui doivent composer avec les multiples modes d'apprentissage de leurs élèves ainsi qu'avec les stades de développement respectifs de ceux-ci. Ces approches concourent au développement de concepts mathématiques : quel que soit leur niveau, tous les élèves bénéficieront d'un enseignement prenant appui sur une diversité de matériel, d'outils et de contextes pour développer leurs conceptions personnelles des nouvelles notions de mathématiques qui leur sont proposées. De bonnes discussions entre élèves peuvent aussi engendrer des liens essentiels entre des représentations concrètes, imagées et symboliques des mathématiques. Le milieu d'apprentissage devrait encourager, respecter et intégrer le vécu de tous les élèves, afin que ceux-ci puissent se sentir en mesure de prendre des risques intellectuels, de poser des questions et de formuler des hypothèses.
L'exploration de situations de résolution de problèmes est essentielle à l'acquisition de stratégies personnelles et de littératie mathématique. Les élèves doivent prendre conscience qu'il est tout à fait acceptable de résoudre des problèmes de différentes façons et que les solutions peuvent varier selon la façon dont on comprend le problème.

Objectifs pour doter les élèves d'une culture mathématique

Les principaux objectifs de la formation en mathématiques consistent à préparer les élèves à :
- utiliser les mathématiques en toute confiance afin de résoudre des problèmes;
- communiquer et raisonner mathématiquement;
- reconnaître et valoriser les mathématiques;
- faire des liens entre les mathématiques et leurs applications;
- s'engager dans un apprentissage continu;
- devenir des adultes dotés d'une culture mathématique, qui utiliseront les mathématiques pour contribuer à la société.

Les élèves ayant atteint ces objectifs seront en mesure de :
- comprendre et reconnaître les contributions des mathématiques à titre de science, de philosophie et d'art;
- manifester une attitude positive envers les mathématiques;
- s'investir et persévérer dans des activités et des projets mathématiques;
- contribuer à des discussions mathématiques;
- prendre des risques en effectuant des tâches mathématiques;
- faire preuve de curiosité.

Afin d'aider les élèves à atteindre ces buts, les enseignants sont invités à créer un climat d'apprentissage favorisant la compréhension des concepts par :
- la prise de risques;
- la pensée et la réflexion indépendantes;
- la mise en commun et la communication de connaissances mathématiques;
- la résolution de problèmes par l'intermédiaire de projets individuels et de projets de groupe;
- la recherche d'un approfondissement de la compréhension des mathématiques;
- la reconnaissance de la valeur des mathématiques au fil de l'histoire.

Occasions de réussite

Une attitude positive engendre de profondes répercussions sur l'apprentissage. Les milieux favorisant un sentiment d'appartenance, incitant les élèves à prendre des risques et offrant des occasions de réussite contribuent à faire naître et à entretenir une attitude positive et une bonne confiance en soi chez l'élève. Les élèves faisant preuve d'une attitude positive envers l'apprentissage des mathématiques sont susceptibles d'être plus motivés, mieux disposés à apprendre et à participer aux activités en classe, de persévérer face aux défis et de s'investir dans des pratiques réflexives.

Les enseignants, les élèves et les parents doivent reconnaître la relation manifeste entre les domaines affectif et cognitif et miser sur les aspects affectifs contribuant à cultiver les attitudes positives. Pour réussir, les élèves doivent apprendre à se fixer des objectifs réalisables et à s'autoévaluer au fur et à mesure qu'ils cheminent vers l'atteinte de ceux-ci.

Pour cheminer vers la réussite, de même que pour devenir des apprenants autonomes et responsables, les élèves doivent s'engager dans un processus réflexif continu qui suppose le réexamen et la réévaluation de leurs objectifs personnels.

Diversité des perspectives culturelles

Les élèves sont issus de diverses cultures, ont chacun leur vécu et fréquentent des milieux scolaires situés dans différents cadres : collectivités urbaines, rurales et isolées. Afin de favoriser l'apprentissage dans un contexte de grande diversité des connaissances, des cultures, des styles de communication, des compétences, des attitudes, des expériences et des types d'apprentissage des élèves, l'enseignant doit recourir à une variété de stratégies d'enseignement et d'évaluation en classe.

Par exemple, des études révèlent que les élèves autochtones perçoivent souvent l'environnement au sein duquel ils vivent dans sa globalité et qu'ils apprennent mieux par l'intermédiaire d'une approche holistique. Cela signifie que ces élèves sont à la recherche de liens dans leurs apprentissages et qu'ils apprennent plus efficacement lorsque les mathématiques sont contextualisées, et non enseignées sous forme de composantes distinctes. Traditionnellement, au sein de la culture autochtone, l'apprentissage passe par la participation active et la dimension écrite revêt peu d'importance. L'apprentissage et la compréhension de l'élève passent par la communication orale, de même que par des applications et des expériences pratiques. Il importe que les enseignants comprennent les signaux non verbaux et qu'ils y réagissent afin d'optimiser l'apprentissage et la compréhension mathématique chez l'élève. Les stratégies employées ne sauraient se limiter à l'intégration occasionnelle de sujets et de thèmes propres à une culture ou à une région en particulier, mais doivent tendre vers des objectifs plus élevés en matière d'éducation multiculturelle (Banks et Banks, 1993).

Soulignons que les stratégies éducatives générales destinées à différents styles d'apprentissage au sein d'un groupe culturel ou autre en particulier peuvent ne pas convenir à tous les élèves du groupe en question. Il importe également d'être conscient que les stratégies rendant l'apprentissage plus accessible à un groupe donné s'appliquent également à des élèves ne faisant pas partie du groupe ciblé. L'enseignement axé sur la diversité favorise une meilleure réussite de l'apprentissage des mathématiques chez tous les élèves.

Adaptation aux besoins de tous les apprenants

Non seulement l'enseignement doit-il être adapté aux différences constatées dans le développement des élèves dès leur entrée scolaire et au fil de leur cheminement, mais il doit également être exempt de toute discrimination fondée sur le sexe ou la culture. Idéalement, le cours de mathématiques devrait comporter des occasions d'apprentissage optimales pour chacun des élèves. Au moment de la prise de décisions pédagogiques, il importe de tenir compte de la réalité des différences individuelles.

L'enseignant doit également comprendre les différents styles d'apprentissage des élèves et concevoir des stratégies d'enseignement qui s'y prêtent. Le recours à différents modes d'enseignement est de mise, par exemple, pour les élèves principalement visuels par rapport à ceux que les apprentissages pratiques rejoignent mieux. La conception d'activités pédagogiques correspondant à une diversité de styles d'apprentissage doit également transparaître dans les stratégies d'évaluation.

Liens au sein du programme d'études

Les enseignants doivent tabler sur les diverses occasions qui s'offrent à eux pour intégrer l'apprentissage des mathématiques à celui d'autres matières. Non seulement cette intégration permet-elle de démontrer aux élèves de quelle façon les mathématiques s'utilisent au quotidien, mais elle contribue également à renforcer leur compréhension des concepts mathématiques, en plus de leur donner des occasions de mettre en pratique leurs compétences mathématiques. Il existe de nombreuses possibilités d'intégration des mathématiques à la littératie, aux sciences, aux sciences humaines, à la musique, aux arts et à l'éducation physique.

Conception universelle de l'apprentissage

La définition portant sur l'inclusion de tous les élèves énoncée par le ministère de l'Éducation et du Développement de la petite enfance indique que tout enfant a le droit de s'attendre à ce que ses résultats d'apprentissage, l'enseignement, l'évaluation, les interventions, l'accommodation, les modifications, les appuis, les adaptations, les ressources additionnelles et l'environnement pour l'apprentissage seront conçus afin de respecter le style d'apprentissage et les besoins et les forces de chacun.

La Conception universelle de l'apprentissage (CUA) est un « cadre servant de guide aux pratiques éducatives qui offre de la souplesse dans la façon dont l'information est présentée, la façon dont les élèves réagissent ou démontrent des connaissances et des habiletés et la façon dont ils sont motivés. » Elle permet également « de réduire les embûches à l'enseignement, offre une accommodation appropriée ainsi que des appuis et des défis appropriés tout en maintenant des attentes élevées par rapport à tous les élèves, y compris les élèves faisant face à des difficultés et ceux qui font face à des limites dans leur connaissance de l'anglais (*ou du français, NDR*). » (CAST 2011)

En vue de miser sur les pratiques établies en matière de différenciation, le ministère de l'Éducation et du Développement de la petite enfance soutient la *Conception universelle de l'apprentissage*. Au Nouveau-Brunswick, les programmes d'études sont conçus à la lumière des valeurs de la conception universelle. Les résultats d'apprentissage sont élaborés de façon que les apprenants puissent avoir accès aux apprentissages qu'ils doivent réaliser et les représenter de diverses façons, selon différents modes. Trois principes de base de la conception universelle de l'apprentissage sous-tendent la conception du présent programme. Les enseignants sont invités à les incorporer à la planification et à l'évaluation des apprentissages de leurs apprenants :

- **Multiples moyens de représentation :** offrir aux divers types d'apprenants des options en ce qui a trait à l'acquisition de l'information et des connaissances.
- **Multiples moyens d'action et d'expression :** offrir aux apprenants différentes façons de montrer ce qu'ils savent.
- **Multiples moyens de participation :** cibler les intérêts des apprenants, leur présenter des défis adéquats et accroître leur motivation.

Pour en savoir davantage sur la *conception universelle de l'apprentissage*, veuillez consulter le **site Web de CAST** http://www.udlcenter.org/sites/udlcenter.org/files/Guidelines_JAN2011_3_french.pdf**,** et télécharger le **guide de référence sur la conception universelle de l'apprentissage.**

LA NATURE DES MATHÉMATIQUES

Les mathématiques constituent une façon de tenter de comprendre, d'interpréter et de décrire notre monde. La définition de la nature des mathématiques renferme plusieurs éléments, qui seront présents dans l'ensemble de ce document. Il s'agit notamment du **changement**, de la **constance**, du **sens du nombre**, des **relations**, des **régularités**, du **sens spatial** et de l'**incertitude**.

Changement

Les élèves doivent absolument comprendre que les mathématiques constituent une discipline dynamique et non statique. Ainsi, le fait de reconnaître la présence du changement représente un élément clé de la compréhension et de l'apprentissage des mathématiques. En mathématiques, les élèves se retrouvent devant des modalités de changement et doivent chercher des explications en la matière. Pour faire des prédictions, les élèves doivent décrire et quantifier leurs observations, y rechercher des régularités, ainsi que décrire les quantités qui demeurent invariables et celles qui varient. Par exemple, la suite 4, 6, 8, 10, 12… peut être décrite de différentes façons, notamment :

- compter par bonds de 2, à partir de 4;
- une suite arithmétique avec 4 comme premier terme et une raison arithmétique de 2;
- une fonction linéaire avec un domaine discret.

(Steen, 1990, p. 184)

Les élèves doivent apprendre que la nécessité de décrire et de comprendre de nouveaux éléments engendre de nouveaux concepts de mathématiques, de même que des changements à des concepts déjà acquis. Entiers, décimales, fractions, nombres irrationnels et nombres complexes surgissent lorsque les élèves amorcent l'exploration de nouvelles situations ne pouvant être décrites ni analysées efficacement au moyen d'entiers positifs.

C'est par le jeu mathématique que les élèves constatent le mieux les changements qui surviennent dans leur compréhension des concepts mathématiques.

Constance

La constance peut se décrire de différentes façons, soit en termes de stabilité, de conservation, d'équilibre, d'état stationnaire et de symétrie (AAAS–Benchmarks, 1993, p. 270). D'importantes propriétés en mathématiques et en sciences demeurent inchangées lorsque les conditions extérieures changent. Voici quelques exemples de constance :

- l'aire d'un rectangle demeure la même, quelle que soit la méthode employée pour la déterminer;
- la somme des angles intérieurs de tout triangle est égale à 180°;
- lorsqu'on tire à pile ou face, la probabilité théorique que l'on obtienne « face » est de 0,5.

Pour résoudre certains problèmes de mathématiques, les élèves doivent se concentrer sur les propriétés qui demeurent constantes. La reconnaissance de la constance permet à l'élève de résoudre des problèmes supposant des taux de changement constants, des droites ayant une pente constante, des situations de variation directe ou la somme des angles d'un polygone.

De nombreuses propriétés importantes en mathématiques demeurent inchangées en présence de conditions changeantes. Voici quelques exemples de constance :
• la conservation de l’égalité dans la résolution d’équations;
• la somme des angles intérieurs de tout triangle;
• la probabilité théorique d’un événement.

Pour résoudre certains problèmes de mathématiques, les élèves doivent se concentrer sur les propriétés qui demeurent constantes. La reconnaissance de la constance permet à l’élève de résoudre des problèmes supposant des taux de changement constants, des droites ayant une pente constante, des situations de variation directe.

Sens du nombre

Le sens du nombre, qui peut se définir comme étant une connaissance approfondie des nombres et une souplesse dans leur manipulation, constitue le fondement le plus important de la numératie (ministère de l’Éducation de la Colombie-Britannique, 2000, p. 146). Il est fondamental de continuer de favoriser le sens du nombre afin de permettre l’enrichissement de la compréhension mathématique chez l’élève.

Un véritable sens du nombre transcende les simples aptitudes de calcul, de mémorisation de faits et d’application procédurale des algorithmes en situation. L’élève ayant un bon sens du nombre est apte à juger si une solution est raisonnable, à décrire les relations entre différents types de nombres, à décrire des quantités et à travailler avec différentes représentations d’un même nombre afin d’approfondir sa compréhension conceptuelle des mathématiques.

L’élève acquiert le sens du nombre en établissant des liens entre les nombres et à son vécu, de même qu’en recourant à des repères et à des référents. L’élève acquiert ainsi un raisonnement de calcul fluide, une bonne souplesse dans la manipulation des nombres et une bonne intuition des nombres. L’évolution du sens du nombre dérive habituellement de l’apprentissage plutôt que de l’enseignement direct. Cependant, l’acquisition du sens du nombre chez l’élève peut s’effectuer par l’intermédiaire de tâches mathématiques riches lui permettant d’établir des liens.

Régularités

Les mathématiques traitent de la reconnaissance, de la description et de la manipulation de régularités numériques et non numériques. Tous les domaines mathématiques renferment des régularités et c’est par l’étude de celles-ci que les élèves établissent d’importants liens entre les concepts relevant d’un même domaine et de domaines différents.

Le fait de travailler avec des régularités permet aussi aux élèves d’établir des liens au-delà des mathématiques. La capacité d’analyser les régularités contribue à définir la façon dont les élèves comprennent leur environnement. Les régularités peuvent être représentées de façon concrète, visuelle, auditive ou symbolique. L’élève doit apprendre à passer avec aisance d’une représentation à une autre.

Les élèves doivent apprendre à reconnaître, à déployer, à créer et à utiliser des régularités mathématiques. Cette compréhension des régularités permet aux élèves de formuler des prédictions et de justifier leur raisonnement en situation de résolution de problèmes. Le fait d’apprendre à travailler avec les régularités permet aux élèves de développer leur pensée algébrique, élément fondamental à l'apprentissage des mathématiques plus abstraites.

Relations

Les mathématiques servent à décrire et à expliquer des relations. La recherche de relations au sein des nombres, des ensembles, des figures, des objets, des variables et des concepts fait partie de l'étude des mathématiques. Cette recherche de relations possibles requiert la collecte et l'analyse de données numériques, l'analyse de régularités, de même que la description d'éventuelles relations sous forme visuelle, symbolique, verbale ou écrite.

Sens spatial

Le sens spatial a trait à la représentation et à la manipulation d'objets à trois dimensions et de figures à deux dimensions. Il permet aux élèves de procéder à des raisonnements et à des interprétations portant sur des représentations d'objets tridimensionnels et de figures bidimensionnelles.

Le sens spatial s'acquiert par l'intermédiaire d'expériences diverses réalisées à partir de modèles visuels et concrets. Il constitue un moyen d'interpréter l'environnement physique ainsi que les représentations bidimensionnelles et tridimensionnelles et une façon d'y réfléchir.

Certains problèmes supposent l'établissement de liens entre des nombres et des unités de mesure et les dimensions de certains objets. Le sens spatial permet à l'élève de prédire les effets qu'engendrera une modification de ces dimensions.

Le sens spatial est également essentiel à la compréhension, par l'élève, de la relation entre les équations et les graphiques de fonctions et, ultimement, de la façon dont les équations et les graphiques peuvent être utilisés pour représenter des situations physiques.

Incertitude

En mathématiques, les interprétations de données et les prédictions effectuées à partir de données peuvent manquer de fiabilité.

Certains événements et certaines expériences donnent lieu à des ensembles de données statistiques pouvant servir à faire des prédictions. Il est important de reconnaître que les prédictions (interpolations et extrapolations) reposent sur des régularités comportant un certain degré d'incertitude. La qualité de l'interprétation est directement liée à la qualité des données. Le fait d'être conscient de la présence d'un facteur d'incertitude permet à l'élève d'évaluer la fiabilité des données et de l'interprétation qui en est faite.

La chance renvoie à la prévisibilité d'un résultat donné. Au fur et à mesure que les élèves développent leur compréhension de la probabilité, leur langage mathématique gagne en spécificité et permet de décrire le degré d'incertitude de façon plus précise. Ce langage doit être utilisé de façon efficace et correcte pour transmettre des messages judicieux.

ÉVALUATION

Une évaluation continue et interactive (*évaluation formative*) est essentielle à un enseignement et à un apprentissage efficaces. Des recherches démontrent que l'évaluation formative engendre de nombreuses répercussions positives, souvent très importantes, en matière d'apprentissage, permet de combler les écarts au chapitre de la réussite et renforce la capacité des élèves en ce qui a trait à l'acquisition de nouvelles compétences (Black et William, 1998, OCDE, 2006). La participation de l'élève au processus d'évaluation favorise l'apprentissage. L'évaluation interactive et l'incitation à l'autoévaluation permettent à l'élève de réfléchir sur sa compréhension des concepts et des idées mathématiques et l'amènent à les formuler.

L'évaluation en classe suppose notamment :

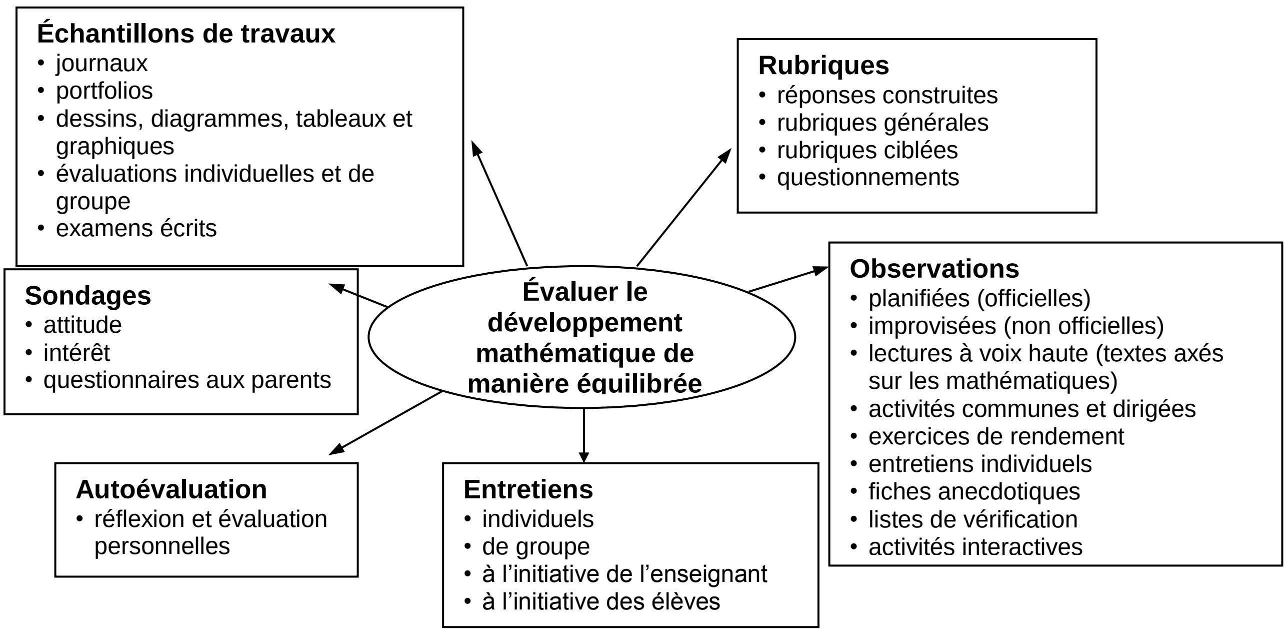
- l'établissement d'objectifs, de cibles et de résultats d'apprentissage clairement définis;
- l'utilisation de références, de rubriques et de modèles visant à clarifier les résultats et à définir les caractéristiques importantes du travail;
- le suivi des progrès par rapport aux résultats attendus et la transmission de rétroactions, au besoin;
- l'incitation à l'autoévaluation;
- des conditions favorisant un environnement de classe où ont lieu des discussions sur l'apprentissage, où les élèves peuvent vérifier leurs idées et leurs résultats et acquérir une compréhension plus approfondie de leur apprentissage (Davies, 2000).

Les pratiques d'évaluation formative constituent un échafaudage pédagogique à partir duquel l'apprentissage peut ensuite être mesuré au moyen d'une évaluation sommative. L'*évaluation sommative*, ou évaluation de l'apprentissage, permet d'effectuer un suivi des progrès de l'élève, d'alimenter les programmes éducatifs et d'orienter la prise de décisions. Ces deux formes d'évaluation sont nécessaires pour guider l'enseignement, favoriser l'apprentissage et renforcer la réussite.

L’évaluation de l’élève doit :

- correspondre aux objectifs du programme d’études;
- utiliser des critères clairs et pertinents;
- inciter l’élève à s’investir dans l’apprentissage des mathématiques durant et après le processus d’évaluation;
- utiliser une grande diversité de stratégies et d’outils d’évaluation;
- engendrer des résultats utiles afin d’alimenter le processus de formation.

(adapté de : NCTM, Mathematics Assessment: A practical handbook, 2001, p.22)



CADRE CONCEPTUEL DES MATHÉMATIQUES 10–12

Le diagramme ci-dessous présente un aperçu de l’influence des processus mathématiques et de la nature même des mathématiques sur les résultats d’apprentissage.

NIVEAU MATIÈRE	10 11 12
La matière varie selon les cours de mathématiques de la 10e à la 12e année. Le cheminement renferme notamment les éléments suivants : • *algèbre* • *mathématiques financières* • *géométrie* • *raisonnement logique* • *projet de recherche mathématique* • *mesure* • *nombre* • *permutations, combinaisons et théorème binomial* • *probabilité* • *relations et fonctions* • *statistique* • *trigonométrie*	**RÉSULTATS D’APPRENTISSAGE GÉNÉRAUX** **RÉSULTATS D’APPRENTISSAGE SPÉCIFIQUES** **INDICATEURS DE RÉUSSITE**

NATURE DES MATHÉMATIQUES

changement
constance
sens du nombre
régularités
relations
sens spatial
incertitude

PROCESSUS MATHÉMATIQUES :
Communication, liens, calcul mental et estimation, résolution de problèmes, raisonnement, technologie, visualisation

LES PROCESSUS MATHÉMATIQUES

L’intégration des éléments fondamentaux suivants au programme éducatif en mathématiques est essentielle afin de permettre aux élèves d’atteindre les objectifs de formation en mathématiques et de les inciter à poursuivre leur apprentissage des mathématiques durant toute leur vie.
Les élèves devront être en mesure :

- de communiquer afin d’apprendre des concepts et d’exprimer leur compréhension des mathématiques (communication : C);
- d’établir des liens entre des idées et d’autres concepts mathématiques, leur vécu quotidien et d’autres disciplines (liens : L);
- de démontrer une habileté en calcul mental et en estimation (calcul mental et estimation : CE);
- d’acquérir et d’appliquer de nouvelles connaissances mathématiques par l’intermédiaire de la résolution de problèmes (résolution de problèmes : RP);
- de développer le raisonnement mathématique (raisonnement : R);

- de choisir et d’utiliser des outils technologiques pour apprendre et résoudre des problèmes (technologie : T)
- d’acquérir des compétences en matière de visualisation afin de faciliter le traitement de l’information, l’établissement de liens et la résolution de problèmes (visualisation : V).

Le programme du Nouveau-Brunswick intègre ces sept processus mathématiques interreliés devant s’incorporer à l’enseignement et à l’apprentissage.

Communication [C]

Les élèves ont besoin d’occasions de lire, d’illustrer, de voir, d’écrire, d’entendre et de discuter de notions mathématiques. Ces occasions leur permettent de créer des liens entre, d’une part, leur propre langue et leurs propres idées et, d’autre part, le langage officiel et les symboles mathématiques.

La communication joue un rôle important dans l’éclaircissement, l’approfondissement et la modification d’idées, de connaissances, d’attitudes et de croyances ayant trait aux mathématiques. Les élèves doivent être incités à employer diverses formes de communication dans le cadre de leur apprentissage des mathématiques. Ils doivent également communiquer leurs apprentissages en la matière à l’aide de la terminologie mathématique.

La communication peut aider les élèves à établir des liens entre des représentations concrètes, imagées, symboliques, verbales, écrites et mentales de concepts mathématiques.

Les nouvelles technologies permettent notamment aux élèves d’élargir leurs démarches de collecte de données et de mise en commun d’idées mathématiques au-delà des murs de la classe.

Résolution de problèmes [RP]

La résolution de problèmes est l’un des processus essentiels et fondamentaux du domaine mathématique. L’apprentissage par la résolution de problèmes doit être au cœur du programme de mathématiques, et ce, à tous les niveaux. Les élèves acquièrent une compréhension véritable des concepts et des procédures mathématiques par la résolution de problèmes dans des contextes ayant un sens pour eux. La résolution de problèmes doit être intégrée à toute la matière et à tous les volets des mathématiques. Lorsque les élèves font face à une nouvelle situation et doivent répondre à des questions comme : *Comment feriez-vous pour…?* ou *Comment pourriez-vous…?*, le processus de résolution de problème est enclenché. Les élèves se donnent leurs propres stratégies de résolution de problèmes en écoutant, en discutant et en faisant l’essai de différentes stratégies.

Pour qu’une activité repose sur la résolution de problèmes, il faut qu’elle amène les élèves à déterminer une façon d’utiliser leurs connaissances acquises afin d’arriver à la solution recherchée. Si on a déjà donné aux élèves des façons de résoudre le problème, il ne s’agit alors plus d’un problème, mais d’un exercice. Les élèves ne doivent pas être en mesure de trouver immédiatement la réponse. Un véritable problème nécessite, de la part des élèves, l'utilisation de leurs connaissances acquises à de nouvelles fins et dans un nouveau contexte. La résolution de problèmes nécessite et favorise l'investissement de l'élève et l'approfondissement de la compréhension des concepts. Les élèves s'investiront dans la résolution de problèmes liés à leur vie, à leur culture, à leurs intérêts, à leur famille ou à l'actualité.

La compréhension des concepts et l'investissement de l'élève sont fondamentaux afin d'amener les élèves à persévérer dans des tâches de résolution de problèmes. Les problèmes mathématiques ne se résument pas à de simples calculs intégrés à une histoire et ne sont pas de nature artificielle. Il s'agit de tâches riches et ouvertes, pouvant comporter différentes solutions ou diverses réponses. Un bon problème devrait permettre à chaque élève de la classe de faire état de ses compétences, de ses connaissances et de sa compréhension. La résolution de problèmes peut être une activité individuelle ou un projet pouvant susciter la participation d'une classe entière (voire d'un groupe plus vaste).

Dans un cours de mathématiques, il existe deux types distincts de résolution de problèmes : la résolution de problèmes contextuels extérieurs aux mathématiques et la résolution de problèmes mathématiques. Un exemple de problème contextuel consisterait à trouver comment optimiser les profits d'une entreprise en tenant compte des contraintes de fabrication, tandis que chercher et élaborer une formule générale afin de résoudre une équation quadratique constituerait un problème mathématique.

La résolution de problèmes peut également être envisagée pour amener les élèves à se livrer à des stratégies de raisonnement inductif et déductif. En s'appropriant le problème, les élèves créeront des conjectures et rechercheront des régularités qu'ils pourront, par la suite, généraliser. Ce volet du processus de résolution de problème suppose souvent un raisonnement inductif. En recourant à des approches visant à résoudre un problème, les élèves migrent souvent vers un raisonnement mathématique de nature déductive. Il est essentiel d'inciter les élèves à s'investir dans les deux types de raisonnement et de leur offrir la possibilité d'envisager les approches et les stratégies employées par d'autres pour résoudre des problèmes semblables.

La résolution de problèmes constitue un puissant outil pédagogique favorisant la recherche de solutions multiples, créatives et novatrices. Le fait de créer un environnement où les élèves recherchent ouvertement et œuvrent à trouver diverses stratégies de résolution de problèmes permet à ceux-ci d'acquérir la capacité d'explorer des solutions de rechange et les rend aptes à prendre, en toute confiance, des risques mathématiques intelligents.

Liens [L]

La mise en contexte et la création de liens avec les expériences des apprenants sont des processus déterminants pour le développement de la compréhension des mathématiques. Lorsque des liens sont effectués entre des idées mathématiques ou entre de telles idées et des phénomènes concrets, les élèves peuvent commencer à percevoir les mathématiques comme étant utiles, pertinentes et intégrées.

L'apprentissage des mathématiques dans certains contextes et la création de liens pertinents pour les apprenants peuvent contribuer à valider les expériences passées et disposer davantage les élèves à participer au processus et à s'y investir activement. Le cerveau recherche et établit sans cesse des liens.

« Comme l'apprenant recherche constamment des liens à divers niveaux, les enseignants doivent orchestrer des expériences permettant à l'élève de tirer une compréhension… Les recherches sur le cerveau démontrent et confirment la nécessité d'expériences multiples, complexes et concrètes aux fins d'un apprentissage et d'un enseignement constructifs. » (Caine et Caine, 1991, p. 5).

Calcul mental et estimation [CE]

Le calcul mental est une combinaison de stratégies cognitives qui favorisent la souplesse de la pensée et le sens du nombre. Il s'agit de calculer dans sa tête sans recourir à des aide-mémoire extérieurs.

Le calcul mental permet à l'élève de trouver des réponses sans papier ni crayon, ce qui favorise l'amélioration de ses aptitudes en calcul par l'acquisition d'efficacité, de précision et de souplesse d'esprit.

« Encore plus importante que la capacité d'exécuter des procédures de calcul ou d'utiliser une calculatrice est l'acquisition de facilités dont les élèves ont besoin — plus que jamais — en estimation et en calcul mental. » (National Council of Teachers of Mathematics, mai 2005).

Les élèves démontrant des aptitudes en calcul mental *« sont libérés de toute dépendance à une calculatrice, acquièrent une confiance dans leur capacité de faire des mathématiques et une souplesse intellectuelle qui leur permet de recourir à de multiples approches en matière de résolution de problèmes. »* (Rubenstein, 2001).

Le calcul mental *« constitue la pierre angulaire de tout procédé d'estimation supposant une variété d'algorithmes différents et de techniques non conventionnelles pour trouver des réponses. »* (Hope, 1988).

L'estimation est une stratégie visant à déterminer des valeurs ou des quantités approximatives, habituellement par l'intermédiaire de points de référence ou de jalons, ou à déterminer le caractère raisonnable de résultats de calculs. Les élèvent doivent savoir quand et comment procéder à des estimations et doivent être en mesure de choisir la stratégie d'estimation à utiliser. L'estimation sert à poser des jugements mathématiques et à élaborer des stratégies utiles et efficaces pour gérer des situations de la vie quotidienne. Les élèves doivent apprendre quelle stratégie employer et comment l'utiliser afin de procéder à une estimation.

Technologie [T]

La technologie peut être utilisée efficacement pour favoriser et faciliter l'apprentissage d'une grande diversité de résultats d'apprentissage en mathématiques. Elle permet aux élèves d'explorer et de créer des modèles, d'examiner des relations, de mettre des hypothèses à l'épreuve et de résoudre des problèmes.

Les calculatrices et les ordinateurs peuvent servir à :
• explorer et à démontrer des régularités et des relations mathématiques;
• organiser et à afficher des données;
• produire et à vérifier des hypothèses inductives;
• extrapoler et à interpoler;
• faciliter les procédures de calcul dans le cadre de la résolution de problèmes;

- mettre davantage l'accent sur la compréhension conceptuelle en réduisant le temps passé à effectuer des procédures répétitives;
- renforcer l'apprentissage de connaissances fondamentales;
- acquérir des procédures personnelles en matière d'opérations mathématiques;
- simuler des situations;
- développer le sens du nombre et le sens spatial.

La technologie favorise un milieu d'apprentissage dans lequel la curiosité croissante des élèves peut engendrer d'importantes découvertes mathématiques à tous les niveaux. L'utilisation de la technologie ne doit pas se substituer à la compréhension mathématique. La technologie doit plutôt constituer une approche, un outil parmi divers autres, visant à favoriser la compréhension mathématique.

Visualisation [V]

La visualisation « met en jeu la capacité de penser au moyen de représentations visuelles et d'images et celle de percevoir, de transformer et de recréer différents aspects du monde spatiovisuel » (Armstrong, 1993, p. 10). Le recours à la visualisation dans l'étude des mathématiques permet à l'élève de comprendre les concepts mathématiques et de créer des liens entre eux.

Les images visuelles et le raisonnement visuel sont d'importantes composantes de la compréhension des nombres, des dimensions et des mesures. L'élève recourt à la visualisation numérique lorsqu'il crée des représentations mentales des nombres. La capacité de créer, d'interpréter et de décrire une représentation visuelle fait partie du sens spatial et du raisonnement spatial. La visualisation spatiale et le raisonnement spatial permettent à l'élève de décrire les relations entre et parmi les objets à trois dimensions et les figures à deux dimensions.

La visualisation des mesures transcende la simple acquisition de compétences spécifiques en matière de mesure. Elle suppose également la capacité de déterminer quand mesurer et quand estimer, de même que la connaissance de plusieurs stratégies d'estimation (Shaw et Cliatt, 1989, p. 150).

La visualisation est favorisée par l'utilisation de matériaux concrets, d'outils technologiques et de diverses représentations visuelles. C'est par la visualisation que l'élève arrive à comprendre concrètement des concepts abstraits. La visualisation constitue un fondement pour l'enrichissement de la compréhension abstraite, de la confiance et de l'aisance.

Raisonnement [R]

Le raisonnement mathématique aide l'élève à réfléchir de façon logique et à trouver un sens aux mathématiques. Les élèves doivent renforcer leur confiance envers leurs capacités de raisonnement et de justification de leur raisonnement mathématique.

Des questions incitant les élèves à la réflexion, à l'analyse et à la synthèse aideront ceux-ci à renforcer leur compréhension des mathématiques. Il est essentiel que tous les élèves aient à répondre à des questions comme les suivantes : *Pourquoi cela est-il vrai ou exact, selon toi?* ou *Qu'arriverait-il si…*

Les expériences mathématiques offrent aux élèves l'occasion de se livrer à des raisonnements inductifs et déductifs. Les élèves recourent à un raisonnement inductif lorsqu'ils explorent et notent des résultats, analysent des observations et font des généralisations à partir des réalités observées, pour ensuite mettre ces généralisations à l'épreuve. Ils ont recours à un raisonnement déductif lorsqu'ils arrivent à de nouvelles conclusions reposant sur l'application de ce qui est déjà connu ou supposé vrai. Les aptitudes de réflexion que l'on acquiert en mettant l'accent sur le raisonnement peuvent servir dans une grande diversité de disciplines et de contextes de la vie quotidienne.

Résultats d'apprentissage transdisciplinaires

Les diplômes des écoles publiques du Canada atlantique pourront démontrer leurs connaissances, leurs habilites et leurs attitudes dons les apprentissages essentiels suivants. Ces apprentissages son appuyés par les résultats décrits dons ce document de programme.

Expression artistique
Les diplômes seront en mesure de porter un jugement critique sur diverses formes d'art et de s'exprimer par les arts.

Civisme
Les diplômés seront en mesure d'évaluer, dans un contexte local et mondial, l'interdépendance sociale, culturelle, économique et environnementale

Communication
Les diplômés seront en mesure d'utiliser les modes d'écoute, de visualisation, de parler, de lire et d'écrire du (des) langage (s) ainsi que les concepts et symboles mathématiques et scientifiques afin penser, d'apprendre et de communiquer efficacement.

Développement personnel
Les diplômés seront en masure de poursuivre leur apprentissage et de mener une mode de vie actif et saine.

Résolution de problèmes
Les diplômés seront capable d'utiliser les stratégies et les méthodes nécessaires a la résolution une grande variété de problèmes, y compris ceux qui exigent des concepts linguistiques, mathématiques et scientifiques.

Compétence technologique
Les diplômés seront en mesure d'utiliser diverses technologies, de faire preuve d'une compréhension des applications technologiques, et d'appliquer les technologies appropriées a la resolution de problèmes.

VOIES ET SUJETS D'ÉTUDE

Le *Cadre commun des programmes d'études de mathématiques 10–12*, sur lequel s'appuie le programme de mathématiques 10–12 du Nouveau-Brunswick, renferme des voies et des sujets d'étude plutôt que des domaines, comme dans le cas du *Cadre commun des programmes en mathématiques M–9*. Au Nouveau-Brunswick, tous les élèves de 10^{e} année suivent un programme commun, constitué de deux cours : *La géométrie, la mesure et les finances 10* et *Le nombre, les relations et les fonctions 10*. À compter de la 11^{e} année, trois voies sont offertes, soit : *Mathématiques pour les finances et le milieu de travail*, *Fondements mathématiques* et *Mathématiques pré-calcul*.

Dans chacun des sujets d'étude, les élèves devront acquérir une compréhension des concepts de base et un ensemble de compétences qui leur seront utiles quel que soit le cours qu'ils auront choisi. Les élèves ont la possibilité de changer de voie, au besoin, selon leurs intérêts et dans le but de disposer du plus grand nombre d'options possible. Les sujets abordés dans une voie donnée prennent appui sur les connaissances antérieures et s'accompagnent d'une évolution allant d'une compréhension élémentaire à une compréhension conceptuelle plus élaborée.

Objectifs des voies

Les objectifs des trois voies consistent à permettre à l'élève d'acquérir la compréhension, les attitudes, les connaissances et les compétences nécessaires à la poursuite de ses études dans un programme postsecondaire particulier ou à son intégration au sein du marché du travail. Les trois voies permettent aux élèves d'acquérir une compréhension mathématique et de développer une démarche de pensée critique. C'est le choix des sujets d'étude par l'intermédiaire desquels s'acquièrent ces compétences et cette connaissance qui varie d'une voie à une autre. Au moment de choisir une voie, l'élève doit tenir compte de ses champs d'intérêt actuels et futurs. L'élève, les parents et les enseignants sont invités à vérifier les exigences d'admission des divers programmes d'études postsecondaires, qui varient d'un établissement à l'autre et d'une année à l'autre.

Contenu des voies

Chacune des voies a été conçue afin de permettre à l'élève d'acquérir les connaissances mathématiques, la rigueur et les aptitudes de pensée critique ciblées pour des programmes d'études postsecondaires données, de même que pour l'intégration directe sur le marché du travail.

Le contenu des voies repose sur le *Protocole de l'Ouest et du Nord canadiens (PONC) – Consultation d'établissements d'enseignement postsecondaire et du monde des affaires et de l'industrie concernant leurs exigences en mathématiques de niveau secondaire : Rapport final* et sur des consultations effectuées auprès des enseignants de Mathématiques.

Mathématiques pour les finances et le milieu de travail

Cette voie a été conçue pour permettre à l'élève d'acquérir les connaissances mathématiques et la démarche de pensée critique ciblées pour son accession à la majorité des programmes de formation professionnelle et au marché du travail. On y étudie notamment l'algèbre, les mathématiques financières, la géométrie, la mesure, le nombre, la statistique et la probabilité.

Fondements mathématiques

Cette voie vise à permettre à l'élève d'acquérir les connaissances mathématiques et la démarche de pensée critique ciblées pour son accession à des programmes d'études postsecondaires ne nécessitant pas l'étude du calcul différentiel et intégral. On y étudie notamment les mathématiques financières, la géométrie, la mesure, le nombre, le raisonnement logique, les relations et les fonctions, la statistique et la probabilité.

Mathématiques pré-calcul

Cette voie a été conçue afin de permettre à l'élève d'acquérir les connaissances mathématiques et la démarche de pensée critique ciblées pour son accession à des programmes d'études postsecondaires nécessitant l'étude du calcul différentiel et intégral. On y étudie notamment l'algèbre et le nombre, la mesure, les relations et les fonctions, la trigonométrie, les permutations, les combinaisons et le théorème binomial.

Résultats d'apprentissage et INDICATEURS DE RÉUSSITE

Le programme d'études du Nouveau-Brunswick est formulé en termes de résultats d'apprentissage généraux, de résultats d'apprentissage spécifiques et *INDICATEURS DE RÉUSSITE*

Les **résultats d'apprentissage généraux** (RAG) sont des énoncés d'ordre général des principaux apprentissages attendus des élèves dans chacune des voies et des volets de celle-ci. Le résultat d'apprentissage général lié à chacune des voies et à chacun de ses volets demeure le même dans l'ensemble de la voie.

Les **résultats d'apprentissage spécifiques** (RAS) sont des énoncés ciblant les connaissances, les compétences et la compréhension que doit avoir acquises l'élève à la fin d'un cours donné.

Les **INDICATEURS DE RÉUSSITE** constituent des exemples de façons dont les élèves peuvent démontrer leur atteinte des objectifs d'un résultat d'apprentissage spécifique. L'étendue des exemples fournis traduit la portée du résultat d'apprentissage spécifique correspondant. Dans les résultats spécifiques, l'expression « y compris » signifie que tous les éléments énumérés doivent être pris en considération afin d'atteindre pleinement le résultat d'apprentissage visé. L'expression « tel/telle que » indique que les éléments qui suivent sont proposés à titre explicatif et ne constituent pas des exigences liées à l'atteinte du résultat d'apprentissage. Le terme « et » employé dans un indicateur de réussite indique que les deux éléments visés doivent être abordés aux fins de l'atteinte du résultat d'apprentissage ciblé. Il n'est cependant pas nécessaire qu'ils soient abordés simultanément, ni dans la même question.

But pédagogique

Chacune des voies du *Cadre commun des programmes d'études de mathématiques 10–12* est organisée par sujet d'étude. Les élèves doivent œuvrer à établir des liens entre les concepts propres à un sujet donné et d'un sujet à l'autre afin d'enrichir leurs expériences d'apprentissage en mathématiques. La planification des activités d'enseignement et d'évaluation doit tenir compte des éléments suivants :

- Les processus mathématiques accompagnant un résultat d'apprentissage donné sont destinés à aider l'enseignant à choisir des approches pédagogiques efficaces pour l'enseignement et l'apprentissage du résultat d'apprentissage visé.
- Les sept processus mathématiques doivent faire partie intégrante des approches d'enseignement et d'apprentissage et doivent appuyer l'intention des résultats d'apprentissage.
- Dans la mesure du possible, on veillera à utiliser des contextes significatifs dans les exemples, les problèmes et les projets.
- L'enseignement doit passer du simple au complexe et du concret à l'abstrait.
- La planification de l'évaluation doit traduire un équilibre entre l'évaluation au service de l'apprentissage, l'évaluation en tant qu'apprentissage et l'évaluation des apprentissages.

Le développement de la compréhension des concepts et des procédures mathématiques devrait être au centre de l'apprentissage des élèves. La compréhension des concepts et celle des procédures chez l'élève doivent être en lien direct.

Voies et cours

Le diagramme ci-dessous résume les voies et les cours offerts.

Mathématiques M–9

10^{e} année

- *obligation de réussir 2 cours de 90 h*
- *peuvent être suivis durant le même semestre ou dans n'importe quel ordre*

La géométrie, la mesure et les finances 10

Le nombre, les relations et les fonctions 10

11^{e} année

- *3 cours de 90 h offerts en 3 voies*
- *obligation de suivre* ***soit*** *« Mathématiques pour les finances et le milieu de travail 11 »,* ***soit*** *« Fondements Mathématiques 11 »*
- *l'élève doit avoir réussi le (les) cours préalable(s) de 10^{e} année avant d'amorcer un cours de 11^{e} année*

Mathématiques pour les finances et le milieu de travail 110

Préalable :
La géométrie, la mesure et les finances 10

Fondements mathématiques 110

Préalables :
La géométrie, la mesure et les finances 10
ET Le nombre, les relations et les fonctions 10

Mathématiques pré-calcul 110

Cours associé ou préalable :
Fondements mathématiques 110

12^{e} année

- *4 cours de 90 h offerts en 3 voies*
- *l'élève doit d'abord avoir réussi le cours préalable de 11^{e} ou de 12^{e} année avant d'amorcer le cours désiré*

Mathématiques pour les finances et le milieu de travail 120

Préalable : Mathématiques pour les finances et le milieu de travail 110 OU Fondements mathématiques 110

Fondements mathématiques 120

Préalable : Fondements mathématiques 110

Mathématiques pré-calcul A 120

Préalable : Mathématiques pré-calcul 110

Mathématiques pré-calcul B 120

Cours associé ou préalable :
Mathématiques pré-calcul 12A

Mathématiques calcul 120

Préalable : Mathématiques pré-calcul A 120 ET Mathématiques pré-calcul B 120

RESUMÉ

Le Cadre conceptuel des mathématiques 10–12 renferme une description de la nature des mathématiques, des processus mathématiques, des voies et des sujets d'étude, de même que du rôle des résultats d'apprentissage et des INDICATEURS DE RÉUSSITE liés aux mathématiques 10–12. Les activités réalisées dans le cadre des cours de mathématiques doivent faire appel à une approche de résolution de problèmes intégrant les processus mathématiques et amenant l'élève à une compréhension de la nature des mathématiques.

FORME DU PROGRAMME D'ÉTUDES

Ce guide présente le programme de mathématiques par niveau, afin que l'enseignant puisse disposer d'un aperçu de la portée des résultats d'apprentissage que doivent atteindre les élèves durant l'année. Les enseignants sont toutefois invités à examiner ce qui précède et ce qui suit, afin de mieux comprendre comment les apprentissages de l'élève à un niveau donné s'inscrivent dans un plus vaste ensemble d'acquisitions de concepts et de compétences.

L'ordre dans lequel figurent les éléments n'a pas pour objectif de déterminer ni de prescrire la séquence dans laquelle ils doivent être présentés en classe. Il vise plutôt à assortir les résultats d'apprentissage propres aux résultats d'apprentissage généraux (RAG) dont ils relèvent.

L'en-tête de chaque page présente le résultat d'apprentissage général (RAG) et le résultat d'apprentissage spécifique (RAS). Vient ensuite l'essentiel pour le processus mathématique, suivi d'une section intitulée Portée et séquence, ayant pour but de relier le résultat d'apprentissage propre aux résultats d'apprentissage de l'année précédente et de l'année suivante. Chaque RAS est assorti des rubriques suivantes : Explications détaillées, INDICATEURS DE RÉUSSITE, Stratégies pédagogiques suggérées et Questions et activités d'enseignement et d'évaluation suggérées. Les *questions d'orientation* apparaissant sous chacune des sections gagnent à être prises en considération.

RAG : le résultat d'apprentissage général
RAS : le résultat d'apprentissage spécifique

Le processus mathématique

[C] Communication	**[RP]** Résolution de problèmes	**[L]** Liens	**[CE]** Calcul mental et estimation
[T] Technologie	**[V]** Visualisation	**[R]** Raisonnement	

Portée et séquence

Fondements mathématiques 110 Mathématiques pré-calcul 110	Mathématiques pré-calcul A 120	Mathématiques pré-calcul B 120

Explications détaillées

Cette section décrit le portrait d'ensemble des apprentissages à réaliser et les liens qu'ont ces derniers avec le travail fait au cours des années précédentes

Questions d'orientation :
- *Qu'est-ce que je veux que mes élèves apprennent?*
- *Qu'est-ce que je veux que mes élèves comprennent et soient capables de faire?*

INDICATEURS DE RENDEMENT

Décrivent les indicateurs observables de l'atteinte ou de la non-atteinte des résultats spécifiques chez les élèves

***Questions d'orientation* :**
- *Quelles preuves devrai-je rechercher pour vérifier si les apprentissages se sont faits?*
- *Que doivent démontrer les élèves pour prouver leur compréhension des concepts et des compétences mathématiques?*

RAG : le résultat d'apprentissage général
RAS : le résultat d'apprentissage spécifique

Stratégies pédagogiques suggérées

Approche et stratégies d'ordre général suggérées aux fins de l'enseignement de ce résultat

Questions d'orientation
- *Quelles expériences et occasions d'apprentissage dois-je offrir pour favoriser l'apprentissage des résultats visés et permettre aux élèves de démontrer ce qu'ils ont appris?*
- *Quelles ressources et stratégies d'apprentissage dois-je employer?*
- *Comment répondrai-je aux divers besoins de mes élèves en matière d'apprentissage?*

Questions (Q) et activités (A) d'enseignement et d'évaluation suggérées

Certaines suggestions d'activités particulières et certaines questions pouvant servir à l'enseignement et à l'évaluation

Questions d'orientation
- *Quelles sont les méthodes et les activités les plus appropriées pour évaluer les apprentissages des élèves?*
- *Comment aligner mes stratégies d'évaluation avec mes stratégies d'enseignement?*

Questions d'orientation
- *Quelles conclusions peut-on tirer des renseignements liés à l'évaluation?*
- *Quelle a été l'efficacité des approches pédagogiques?*
- *Quelles sont les prochaines étapes en matière d'enseignement?*

Mathématiques Pré-calcul A 120

Résultats d'apprentissage spécifiques

RAS **RF1 : Démontrer une compréhension de l'effet des translations verticales et horizontales sur le graphique de fonctions et sur leurs équations respectives. [C, L, R, V]**

[C] Communication **[CE]** Calcul mental et estimation **[L]** Liens **[R]** Raisonnement
[RP] Résolution de problèmes **[T]** Technologie **[V]** Visualisation

Les relations et les fonctions

RF1 : Démontrer une compréhension de l'effet des translations verticales et horizontales sur le graphique de fonctions et sur leurs équations respectives.

Portée et séquence des résultats

Pré-calcul 110	Pré-calcul A 120	Pré-calcul B 120
RF2 : Représenter graphiquement et analyser des fonctions valeur absolue (limitées aux fonctions linéaires et quadratiques) pour résoudre des problèmes. **RF3 :** Analyser les fonctions quadratiques de la forme $y = a(x-p)^2 + q$ et déterminer le sommet, le domaine et l'image, la direction de l'ouverture, l'axe de symétrie et les coordonnées à l'origine. **RF4 :** Analyser des fonctions quadratiques de la forme $y = ax^2 + bx + c$ pour déterminer les caractéristiques du graphique correspondant, y compris le sommet, le domaine et l'image, la direction de l'ouverture, l'axe de symétrie, les coordonnées à l'origine, pour résoudre des problèmes.	**RF1 :** Démontrer une compréhension de l'effet des translations verticales et horizontales sur le graphique de fonctions et sur leurs équations respectives.	**RF4:** Représenter graphiquement et analyser des fonctions polynomiales (limitées aux fonctions polynomiales de degré ≤ 5). **RF8 :** Monter une boîte à outils pour les fonctions qui compare divers types de fonctions ainsi que la composition de ces fonctions.

EXPLICATIONS DÉTAILLÉES

Les élèves ont analysé les fonctions quadratiques de la forme $y = a(x-p)^2 + q$ dans *Mathématiques pré-calcul 110* et de la forme $y = ax^2 + bx + c$ dans *Fondements mathématiques 110*. Ce résultat d'apprentissage explore les effets des translations horizontales et verticales sur d'autres types de fonctions par l'exploration de l'effet des facteurs h et k sur le graphique de la fonction $y = f(x-h) + k$. Les élèves devraient utiliser p et h, puis q et k de façon interchangeable.

La valeur de h indique l'amplitude de la **translation horizontale** de $f(x)$. Lorsque $h > 0$, la fonction se déplace vers la droite, et lorsque $h < 0$, la fonction se déplace vers la gauche.

La valeur de k indique l'amplitude de la **translation verticale** de $f(x)$. Lorsque $k > 0$, la fonction se déplace vers le haut, et lorsque $k < 0$, la fonction se déplace vers le bas.

RAS **RF1 : Démontrer une compréhension de l'effet des translations verticales et horizontales sur le graphique de fonctions et sur leurs équations respectives. [C, L, R, V]**

INDICATEURS DE RÉUSSITE

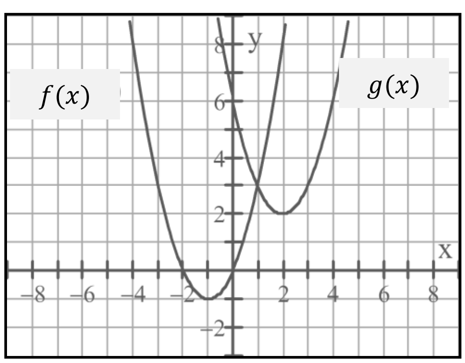
- Comparer les graphiques d'un ensemble de fonctions de la forme $y = f(x) + k$ au graphique de $y = f(x)$ et formuler, à l'aide du au raisonnement inductif, une règle générale quant à l'effet de k.
- Comparer les graphiques d'un ensemble de fonctions de la forme $y = f(x - h)$ au graphique de $y = f(x)$ et formuler, à l'aide duau raisonnement inductif, une règle générale quant à l'effet de h.
- Comparer les graphiques d'un ensemble de fonctions de la forme $y = f(x - h) + k$ au graphique de $y = f(x)$ et formuler, à l'aide duau raisonnement inductif, une règle générale quant aux effets de h et de k.
- Esquisser le graphique de $= f(x) + k$, de $y = f(x - h)$ ou de $y = f(x - h) + k$ pour des valeurs données de h et de k à partir d'une esquisse de la fonction $y = f(x)$ où l'équation de $y = f(x)$ n'est pas donnée.
- Représenter, sous la forme d'une équation, une fonction dont le graphique est une translation verticale et/ou horizontale du graphique de la fonction $y = f(x)$.

Stratégies pédagogiques suggérées

- Diriger les élèves vers des sites Web comme http://www.purplemath.com/modules/fcntrans.htm pour obtenir des leçons supplémentaires sur la transformation de fonctions.
- Employer la technologie pour explorer les effets de h et de k sur le graphique d'une fonction donnée, $y = f(x - h) + k$, pour élaborer une règle quant à l'effet de h et de k. Répéter avec une multitude de fonctions différentes, telles que :
  $y = x^2$ $\quad y = x^2 - 5$ $\quad y = (x - 5)^2$ $\quad y = (x + 1)^2 + 4$
  $y = |x|$ $\quad y = |x + 6|$ $\quad y = |x| - 4$ $\quad y = |x + 3| - 5$

Questions (Q) et activités (Act) d'enseignement et d'évaluation suggérées

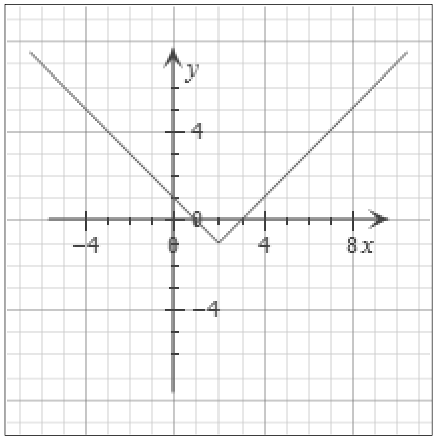
Q Utilise le graphique suivant pour déterminer les translations appliquées à la fonction $y = f(x)$ pour obtenir le graphique $y = g(x)$.



Réponse : translation horizontale $(+3)$ vers la droite 3, translation verticale $(+3)$ vers le haut

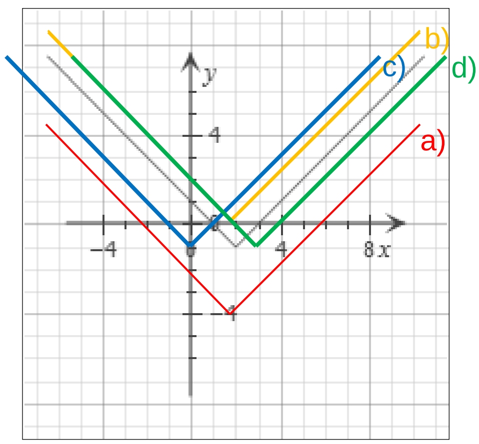
RAS **RF1 : Démontrer une compréhension de l'effet des translations verticales et horizontales sur le graphique de fonctions et sur leurs équations respectives. [C, L, R, V]**

Q Sur les repères ci-après, utilise le graphique de $y = f(x)$ pour esquisser le graphique de chacune des translations ci-dessous :



a) $y = f(x) - 3$ b) $y = f(x) + 1$ c) $y = f(x + 2)$ d) $y = f(x - 1)$

Réponses : *a)* *b)* *c)* *d)*



RAS **RF2 : Démontrer une compréhension des effets des compressions et des étirements horizontaux et verticaux sur les graphiques de fonctions et sur leurs équations respectives [C, L, R, V]**

[C] Communication **[CE]** Calcul mental et estimation **[L]** Liens **[R]** Raisonnement
[RP] Résolution de problèmes **[T]** Technologie **[V]** Visualisation

RF2 : Démontrer une compréhension des effets des compressions et des étirements horizontaux et verticaux sur les graphiques de fonctions et sur leurs équations respectives.

Portée et séquence des résultats

Pré-calcul 110	Pré-calcul A 120	Pré-calcul B 120
RF2 : Représenter graphiquement et analyser des fonctions valeur absolue (limitées aux fonctions linéaires et quadratiques) pour résoudre des problèmes. **RF3 :** Analyser les fonctions quadratiques de la forme $y = a(x-p)^2 + q$ et déterminer le sommet, le domaine et l'image, la direction de l'ouverture, l'axe de symétrie et les coordonnées à l'origine. **RF4 :** Analyser des fonctions quadratiques de la forme $y = ax^2 + bx + c$ pour déterminer les caractéristiques du graphique correspondant, y compris le sommet, le domaine et l'image, la direction de l'ouverture, l'axe de symétrie, les coordonnées à l'origine, pour résoudre des problèmes.	**RF2 :** Démontrer une compréhension des effets des compressions et des étirements horizontaux et verticaux sur les graphiques de fonctions et sur leurs équations respectives.	**RF4 :** Représenter graphiquement et analyser des fonctions polynomiales (limitées aux fonctions polynomiales de degré ≤ 5). **RF8 :** Monter une boîte à outils pour les fonctions qui compare divers types de fonctions ainsi que la composition de ces fonctions.

EXPLICATIONS DÉTAILLÉES

Pour ce résultat d'apprentissage, les élèves exploreront les effets de a et de b sur le graphique de la fonction $y = af(bx)$.

La valeur de a indique l'amplitude de **l'étirement vertical** de $f(x)$ par rapport à l'axe des x par un facteur de a. L'inverse de la valeur de b indique l'amplitude de **l'étirement horizontal** de $f(x)$ par rapport à l'axe des y par un facteur de $\frac{1}{b}$.

Si les élèves n'ont pas terminé les résultats sur les fonctions trigonométriques au préalable, l'étirement horizontal sera un nouveau concept pour eux. Les étirements horizontaux sont difficiles à voir à moins qu'une fonction ne compte une période ou un domaine restreint. Dans certains cas, un étirement horizontal peut être perçu comme un étirement vertical. Par exemple, si $y = (2x)^2$ et est à moitié moins large, il peut être perçu comme $y = 4x^2$ qui semble quatre fois plus haut.

INDICATEURS DE RÉUSSITE

- Comparer les graphiques d'un ensemble de fonctions de la forme $y = af(x)$ au graphique de $y = f(x)$ et formuler, à l'aide du raisonnement inductif, une règle générale quant à l'effet de *a*.
- Comparer les graphiques d'un ensemble de fonctions de la forme $y = f(bx)$ au graphique de $y = f(x)$ et formuler, à l'aide du raisonnement inductif une règle générale, quant à l'effet de *b*.

RAS **RF2 : Démontrer une compréhension des effets des compressions et des étirements horizontaux et verticaux sur les graphiques de fonctions et sur leurs équations respectives [C, L, R, V]**

- Comparer les graphiques d'un ensemble de fonctions de la forme $y = af(bx)$ au graphique de $y = f(x)$ et formuler, à l'aide du raisonnement inductif, une règle générale quant aux effets de *a* et de *b*.
- Esquisser le graphique de $y = af(x)$, de $y = f(bx)$ ou de $y = af(bx)$ pour des valeurs données de *a* et de *b* à partir d'une esquisse de la fonction $y = f(x)$, où l'équation de $y = f(x)$ n'est pas donnée.
- Représenter, sous la forme d'une équation, une fonction étant donné le graphique représentant une compression ou un étirement vertical et/ou horizontal du graphique de la fonction $y = f(x)$.

<u>Stratégies pédagogiques suggérées</u>

- Diriger les élèves vers des sites Web comme http://www.purplemath.com/modules/fcntrans2.htm pour obtenir des leçons supplémentaires sur la transformation de fonctions.

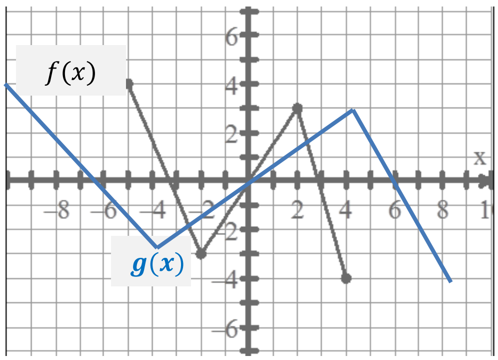
- Employer la technologie pour explorer l'effet de différentes valeurs de a et de b sur le graphique d'une fonction donnée, $y = af(bx)$, puis élaborer une règle quant à l'effet de a et de b. Répéter avec diverses fonctions, telles que :

$f(x) = \lvert x\rvert$	$f(x) = 3\lvert x\rvert$	$f(x) = \frac{1}{2}\lvert x\rvert$	$f(x) = 5x^2$
$f(x) = \left(\frac{1}{3}x\right)^2$	$f(x) = \left\lvert\frac{1}{4}x\right\rvert$	$f(x) = 2x^2$	$f(x) = 5\lvert 2x\rvert$
$f(x) = \frac{1}{4}\lvert 3x\rvert$	$f(x) = \frac{1}{2}\left\lvert\frac{1}{3}x\right\rvert$		

RAS **RF2 : Démontrer une compréhension des effets des compressions et des étirements horizontaux et verticaux sur les graphiques de fonctions et sur leurs équations respectives [C, L, R, V]**

Questions (Q) et activités (Act) d'enseignement et d'évaluation suggérées

Q Pour le graphique suivant de $y = f(x)$, esquisse et nomme le graphique de $y = g(x)$ qui montre un étirement horizontal de 2.



Réponse : indiquée en bleu dans le graphique

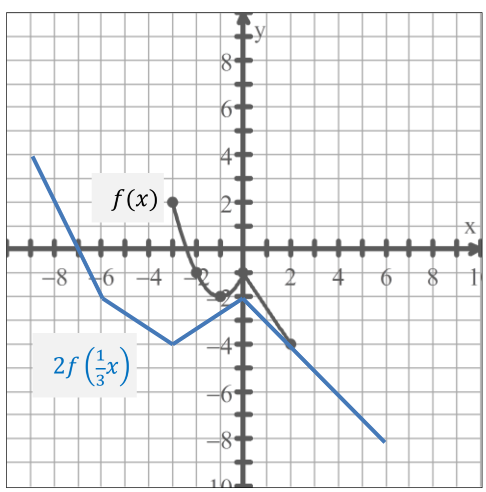
$f(x)$

x	y
-5	4
-2	-3
2	3
4	-4

$g(x)$

x	y
-10	4
-4	-3
4	3
8	-4

Q À partir du graphique $y = f(x)$ ci-après, esquisse le graphique de $y = 2f\left(\frac{1}{3}x\right)$.



Réponse : indiquée en bleu dans le graphique $(x, y) \longrightarrow (3x, 2y)$

$f(x)$

x	y
-3	2
-2	-1
-1	-2
0	-1
2	-4

$2f\left(\frac{1}{3}x\right)$

x	y
-9	4
-6	-2
-3	-4
0	-2
6	-8

RAS **RF3 : Appliquer des translations et des compressions ou des étirements aux graphiques de fonctions et à leurs équations respectives. [C, L, R, V]**

[C] Communication **[CE]** Calcul mental et estimation **[L]** Liens **[R]** Raisonnement
[RP] Résolution de problèmes **[T]** Technologie **[V]** Visualisation

RF3 : Appliquer des translations et des compressions ou des étirements aux graphiques de fonctions et à leurs équations respectives.

Portée et séquence des résultats

Pré-calcul 110	Pré-calcul A 120	Pré-calcul B 120
RF2 : Représenter graphiquement et analyser des fonctions valeur absolue (limitées aux fonctions linéaires et quadratiques) pour résoudre des problèmes. **RF3 :** Analyser les fonctions quadratiques de la forme $y = a(x - p)^2 + q$ et déterminer le sommet, le domaine et l'image, la direction de l'ouverture, l'axe de symétrie et les coordonnées à l'origine. **RF4 :** Analyser des fonctions quadratiques de la forme $y = ax^2 + bx + c$ pour déterminer les caractéristiques du graphique correspondant, y compris le sommet, le domaine et l'image, la direction de l'ouverture, l'axe de symétrie, les coordonnées à l'origine, pour résoudre des problèmes.	**RF3 :** Appliquer des translations et des compressions ou des étirements aux graphiques de fonctions et à leurs équations respectives.	**RF4 :** Représenter graphiquement et analyser des fonctions polynomiales (limitées aux fonctions polynomiales de degré ≤ 5). **RF8 :** Monter une boîte à outils pour les fonctions qui compare divers types de fonctions ainsi que la composition de ces fonctions.

EXPLICATIONS DÉTAILLÉES

Ce résultat met l'accent sur l'utilisation de la notation $y = af\big(b(x-h)\big) + k$ pour esquisser les graphiques de translations et d'étirements de fonctions.

Dans certains cas, le facteur d'étirement horizontal b doit d'abord être mis en facteurs à partir du binôme avant d'indiquer la translation horizontale.

Par exemple :
$y = \frac{1}{2}f(3x-6) - 3 = \frac{1}{2}f\big(3(x-2)\big) - 3$
Translation horizontale $(-h)$: $+2$
Translation verticale $(+k)$: -3
Étirement horizontal $\left(\frac{1}{b}\right)$: $\frac{1}{3}$
Étirement vertical (a) : $\frac{1}{2}$

Lorsque les élèves esquissent des graphiques de fonctions avec des translations et des étirements ou en font l'analyse, ils devront commencer par appliquer ou considérer **l'étirement d'abord** et la translation ensuite. Il faudra aussi examiner les points invariants.

Lorsque les élèves analysent un graphique et un graphique transformé, ils doivent choisir des points situés sur les deux axes pour déterminer les translations horizontale et verticale.

Pour déterminer les facteurs d'étirement respectifs, les élèves compareront la distance entre des points clés à l'horizontale et à la verticale.

RAS **RF3 : Appliquer des translations et des compressions ou des étirements aux graphiques de fonctions et à leurs équations respectives. [C, L, R, V]**

INDICATEURS DE RÉUSSITE

- Esquisser le graphique de la fonction $y = af\big(b(x-h)\big) + k$ pour des valeurs données de a, b, h et k, à partir du graphique donné de la fonction *y* = *f* (*x*), où l'équation de *y* = *f* (*x*) n'est pas donnée.

- Représenter, sous la forme d'une équation, une fonction à partir du graphique représentant une translation, une compression et/ou un étirement du graphique de la fonction $y = f(x)$.

Stratégies pédagogiques suggérées

- Pour des exercices supplémentaires et des explications plus poussées, diriger les élèves vers des sites Web comme :
  http://www.purplemath.com/modules/fcntrans2.htm
  http://www.mathsisfun.com/sets/function-transformations.html
  http://cims.nyu.edu/~kiryl/Precalculus/Section_2.5-Transformations%20of%20Functions/Transformations%20of%20Functions.pdf

- Employer la technologie pour explorer les effets de a, de b, de h et de k sur le graphique d'une function donnée, $y = af\big(b(x-h)\big) + k$, pour élaborer une règle quant à l'effet de a et de b. Pour quelques fonctions différentes, comme celles indiquées ci-après, demander aux élèves de déterminer $f(x), a, b, h$ et k. Leur demander ensuite d'esquisser le graphique de la fonction donnée et le graphique de $y = f(x)$ sur le même ensemble d'axes.

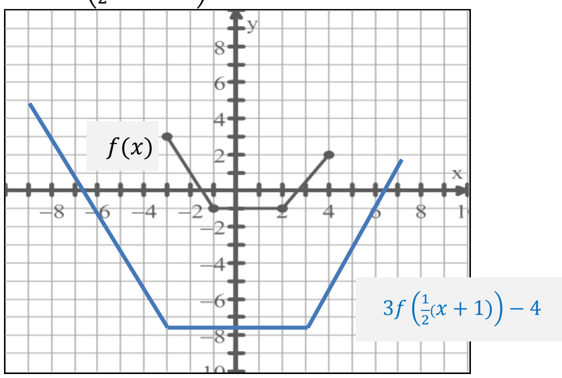
- $y = \left|\frac{1}{4}(x+2)\right| - 1$ $\quad$ $y = 5|3x| + 4$ $\quad$ $y = \frac{1}{2}|x-1|$
- $y = 2(x+3)^2$ $\quad$ $y = \left(\frac{1}{3}x\right)^2 + 5$ $\quad$ $y = \left(\frac{1}{2}(x-4)\right)^2 - 2$

RAS **RF3 : Appliquer des translations et des compressions ou des étirements aux graphiques de fonctions et à leurs équations respectives. [C, L, R, V]**

Questions (Q) et activités (Act) d'enseignement et d'évaluation suggérées

Q Utilise le graphique de $y = f(x)$ ci-après pour esquisser le graphique

de $y = 3f\left(\frac{1}{2}(x+1)\right) - 4$.



Réponse : indiquée en bleu dans le graphique $(x, y) \longrightarrow (2x - 1, 3y - 4)$

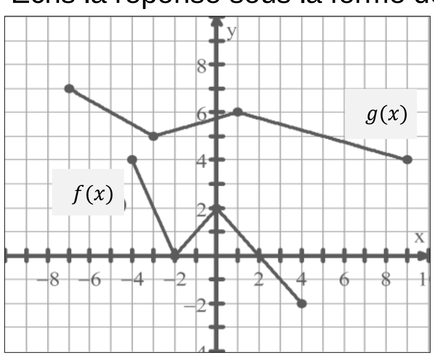
$f(x)$

x	y
-3	3
-1	-1
2	-1
4	2

$3f\left(\frac{1}{2}(x+1)\right) - 4$

x	y
-7	5
-3	-7
3	-7
7	2

Q Détermine quelles transformations ont été apportées à $f(x)$ pour obtenir le graphique $g(x)$. Écris la réponse sous la forme de $y = af\big(b(x-h)\big) + k$.



Réponse : $(x, y) \longrightarrow (2x + 1, \frac{1}{2}y + 5)$

$f(x)$

x	y
-4	4
-2	0
0	2
4	-2

$g(x) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}(x-1)\right) + 5$

x	y
-7	7
-3	5
1	6
9	4

RAS **RF4 : Démontrer une compréhension des effets de réflexions sur les graphiques de fonctions et leurs équations respectives, y compris des réflexions par rapport à l'axe des *x*, à l'axe des *y*, ou à la droite *y* = *x*.** [C, L, R, V]

[C] Communication **[CE]** Calcul mental et estimation **[L]** Liens **[R]** Raisonnement
[RP] Résolution de problèmes **[T]** Technologie **[V]** Visualisation

RF4 : Démontrer une compréhension des effets de réflexions sur les graphiques de fonctions et leurs équations respectives, y compris des réflexions par rapport à l'axe des x, à l'axe des y, ou à la droite y = x.

Portée et séquence des résultats

Pré-calcul 110	Pré-calcul A 120	Pré-calcul B 120
RF2 : Représenter graphiquement et analyser des fonctions valeur absolue (limitées aux fonctions linéaires et quadratiques) pour résoudre des problèmes. **RF3 :** Analyser les fonctions quadratiques de la forme $y = a(x-p)^2 + q$ et déterminer le sommet, le domaine et l'image, la direction de l'ouverture, l'axe de symétrie et les coordonnées à l'origine. **RF4 :** Analyser des fonctions quadratiques de la forme $y = ax^2 + bx + c$ pour déterminer les caractéristiques du graphique correspondant, y compris le sommet, le domaine et l'image, la direction de l'ouverture, l'axe de symétrie, les coordonnées à l'origine, pour résoudre des problèmes.	**RF4 :** Démontrer une compréhension des effets de réflexions sur les graphiques de fonctions et leurs équations respectives, y compris des réflexions par rapport à l'axe des *x*, à l'axe des *y*, ou à la droite *y* = *x*.	**RF8 :** Monter une boîte à outils pour les fonctions qui compare divers types de fonctions ainsi que la composition de ces fonctions.

EXPLICATIONS DÉTAILLÉES

Ce résultat met l'accent sur l'exploration des réflexions (rabattements) par rapport à l'axe des x, à l'axe des y, et à la droite $y = x$.

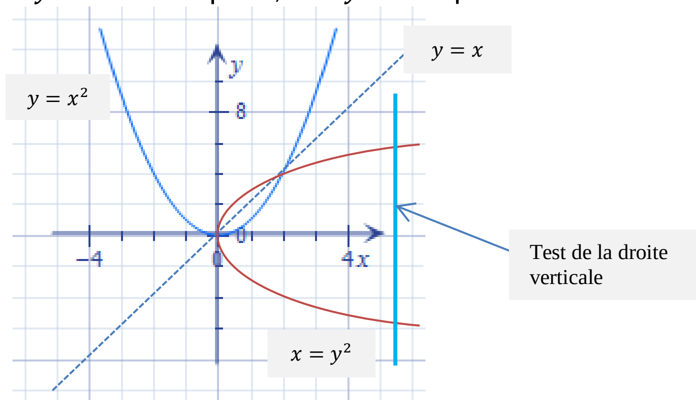
Les élèves devraient analyser la relation générale entre les coordonnées d'une paire ordonnée et celles de sa réflexion donnée pour formuler les règles suivantes :

- Une réflexion par rapport à l'axe des x sera représentée par $y = -f(x)$, étant donné que les valeurs de y seront les inverses additifs l'un de l'autre.
- Une réflexion par rapport à l'axe des y sera représentée par $y = f(-x)$, étant donné que les valeurs de x seront les inverses additifs l'un de l'autre.
- Une réflexion par rapport à la droite $y = x$ sera représentée par $x = f(y)$, étant donné que les valeurs x et y seront inversées. Il s'agit de la fonction réciproque, une notion qui sera approfondie dans le prochain résultat. En principe, la notation $x = f(y)$ exige l'esquisse d'un nouvel ensemble d'axes, comptant les valeurs x sur l'axe vertical et les valeurs y sur l'axe horizontal. Il est possible d'éliminer en partie cette confusion en présentant la notation f^{-1} dès que possible.

La réflexion d'une fonction n'est pas toujours une fonction. Pour demeurer une fonction, une valeur x peut uniquement correspondre à une valeur y. Il est possible de vérifier rapidement en traçant une ligne droite verticale sur le graphique pour déterminer si la ligne passe par plus d'un point du graphique (test de la droite verticale). On a présenté ce concept aux élèves en dixième année lors de l'initiation aux fonctions.

RAS **RF4 : Démontrer une compréhension des effets de réflexions sur les graphiques de fonctions et leurs équations respectives, y compris des réflexions par rapport à l'axe des *x*, à l'axe des *y*, ou à la droite *y* = *x*.** [C, L, R, V]

Par exemple, faire la réflexion du graphique de $y = x^2$ par rapport à la droite $y = x$ donnera le graphique de $x = y^2$. Une ligne verticale tracée n'importe où sur le graphique passe par deux points, ce qui indique que chaque valeur x correspond à deux valeurs y. Par conséquent, $x = y^2$ n'est pas une fonction.



Si le domaine de $y = x^2$ est limité aux valeurs x qui sont supérieures ou égales à zéro, sa réciproque sera une fonction pour laquelle chaque valeur x correspond à une seule valeur y.

Dans le présent résultat, le test de la droite verticale est élargi afin de comprendre le **test de la droite horizontale**, dans lequel on trace une ligne horizontale sur la fonction initiale et, si la droite passe par plus d'un point, la réciproque de la fonction échouera au test de la droite verticale et ne sera pas une fonction.

Il est bon de présenter aux élèves des transformations multiples appliquées à une seule fonction. Lors de l'exécution des esquisses, l'ordre d'application de ces transformations multiples est important. Il faut d'abord appliquer la **réflexion**, puis l'**étirement** et enfin la **translation**. De même, lors de l'analyse des graphiques, il faut examiner les transformations dans le même ordre.

INDICATEURS DE RÉUSSITE

- Formuler la relation générale entre les coordonnées d'un point et celles du point obtenu par réflexion par rapport à l'axe des x, l'axe des y ou la droite $y = x$.
- Esquisser le résultat d'une réflexion (rabattement) du graphique de la fonction $y = f(x)$ par rapport à l'axe des x, l'axe des y ou la droite $y = x$, étant donné le graphique de la fonction $y = f(x)$ où l'équation de $y = f(x)$ n'est pas donnée.
- Formuler, à l'aide du raisonnement inductif, et expliquer une règle générale relative à la réflexion (rabattement) du graphique d'une fonction $y = f(x)$ par rapport à l'axe des x, l'axe des y ou la droite $y = x$.
- Esquisser les graphiques des fonctions $y = -fy = f(-x)$ et $x = f(-y)$, étant donné le graphique de la fonction $y = f(x)$ où l'équation de $y = f(x)$ n'est pas donnée.
- Représenter, sous la forme d'une équation, une fonction dont le graphique est une réflexion (rabattement) du graphique de la fonction $y = f(x)$ par rapport à l'axe des x, l'axe des y ou la droite $y = x$.

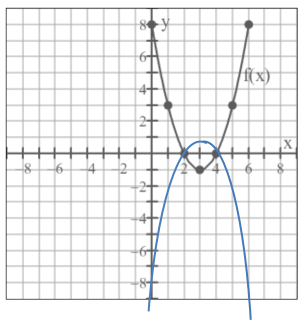
RAS **RF4 : Démontrer une compréhension des effets de réflexions sur les graphiques de fonctions et leurs équations respectives, y compris des réflexions par rapport à l'axe des *x*, à l'axe des *y*, ou à la droite *y* = *x*.** [C, L, R, V]

Stratégies pédagogiques suggérées

- Fournir des graphiques présentant divers types de fonctions et demander aux élèves d'effectuer le test de la droite horizontale pour chacun afin de déterminer si la réciproque sera une fonction ou non. Demander aux élèves de trouver la réciproque en transposant les coordonnées y et x de points clés sur le graphique et de faire le test de la droite verticale sur le nouveau graphique pour confirmer leur prédiction.

Questions (Q) et activités (Act) d'enseignement et d'évaluation suggérées

Q Utilise le graphique de $y = f(x)$ ci-après pour esquisser le graphique de $y = -f(x)$.



Réponse : indiquée en bleu dans le graphique

$y = f(x)$

x	y
0	8
1	3
2	0
3	−1
4	0
5	3
6	8

$y = -f(x)$

x	y
0	−8
1	−3
2	0
3	1
4	0
5	−3
6	−8

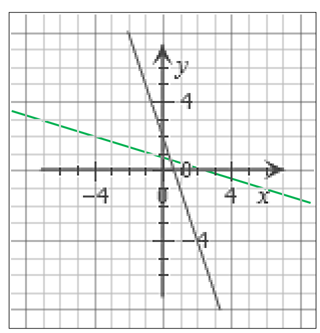
Q Esquisse le graphique de $y = 2 - 3x$, puis esquisse sa réflexion sur la droite $y = x$. Le nouveau graphique est-il une fonction? Trouve l'équation du nouveau graphique.

Réponse : $y = f^{-1}(x)$ *ou*

$x = 2 - 3y$ *indiquée en vert sur le graphique. Le nouveau graphique est une fonction.*

$y = f^{-1}(x)$

x	y
2	0
-1	1



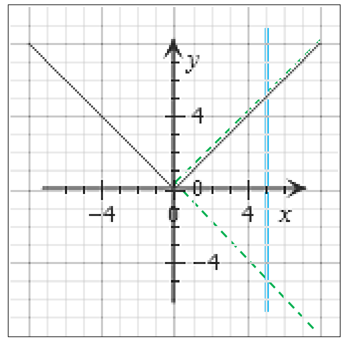
RAS **RF4 : Démontrer une compréhension des effets de réflexions sur les graphiques de fonctions et leurs équations respectives, y compris des réflexions par rapport à l'axe des *x*, à l'axe des *y*, ou à la droite *y* = *x*.** [C, L, R, V]

Q Esquisse le graphique de $y = |x|$, puis esquisse sa réflexion sur la droite $y = x$. Le nouveau graphique est-il une fonction? Trouve l'équation pour le nouveau graphique.

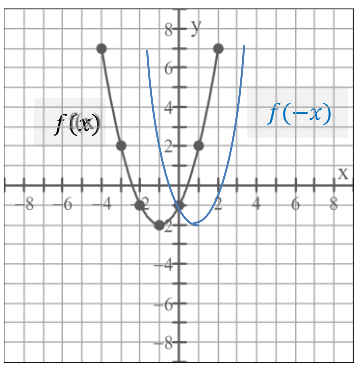
Réponse :
$y = f^{-1}(x)$ *ou* $x = |y|$
indiquée en vert sur le graphique.
Le nouveau graphique n'est pas une fonction c ar elle échoue au test de la droite verticale.

$y = f^{-1}(x)$

x	y
0	0
4	4
4	-4



Q Utilise le graphique de $y = f(x)$ ci-après pour esquisser le graphique de $y = f(-x)$.



Réponse : indiquée en bleu dans le graphique

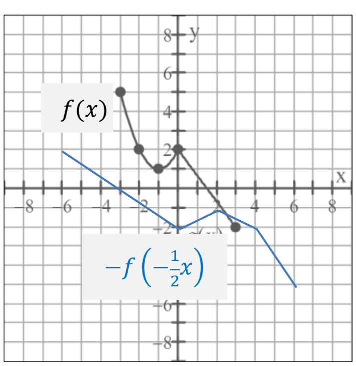
$y = f(x)$

x	y
0	−1
1	2
2	7
−1	−2
−2	−1
−3	2
−4	7

$y = f(-x)$

x	y
0	−1
−1	2
−2	7
1	−2
2	−1
3	2
4	7

Q Utilise le graphique de $y = f(x)$ ci-après pour esquisser le graphique de $y = -f\left(-\frac{1}{2}x\right)$.



Réponse : indiquée en bleu dans le graphique
$(x, y) \longrightarrow (-2x, -y)$

$y = f(x)$

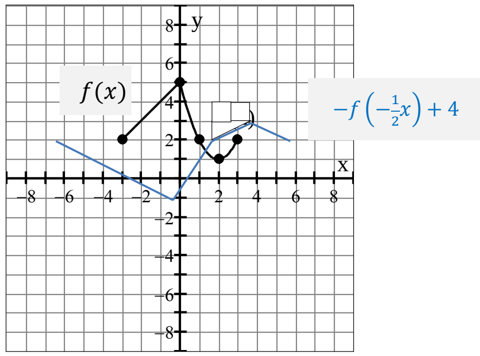
x	y
−3	5
−2	2
−1	1
0	2
3	−2

$y = -f\left(-\frac{1}{2}x\right)$

x	y
6	−5
4	−2
2	−1
0	−2
−6	2

RAS **RF4 : Démontrer une compréhension des effets de réflexions sur les graphiques de fonctions et leurs équations respectives, y compris des réflexions par rapport à l'axe des *x*, à l'axe des *y*, ou à la droite *y* = *x*.** [C, L, R, V]

Q Utilise le graphique de $f(x)$ pour esquisser le graphique de $y = -f\left(\frac{1}{2}x\right) + 4$.



Réponse : indiquée en bleu dans le graphique
$(x, y) \longrightarrow (2x, -y + 4)$

$y = f(x)$

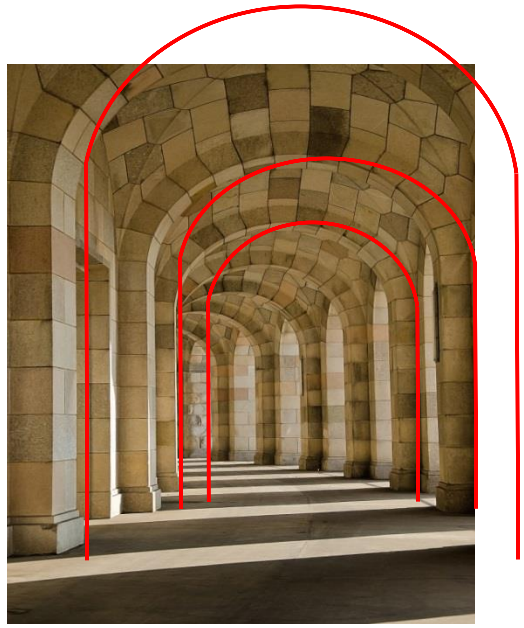
x	y
-3	2
0	5
1	2
2	1
3	2

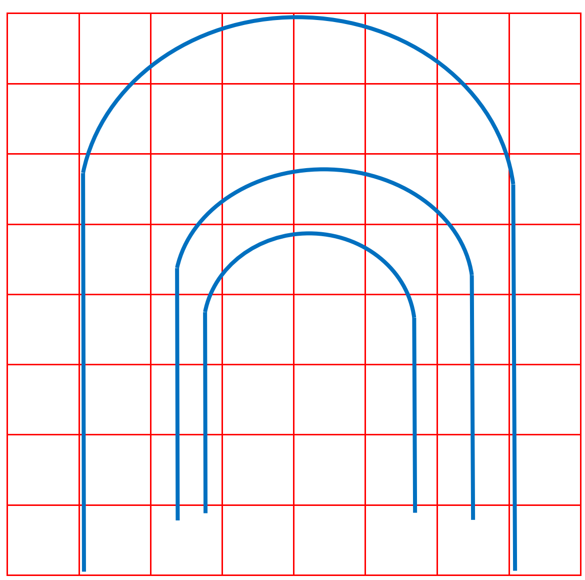
$y = -f\left(\frac{1}{2}x\right) + 4$

x	y
-6	2
0	-1
2	2
4	3
6	2

RAS **RF4 : Démontrer une compréhension des effets de réflexions sur les graphiques de fonctions et leurs équations respectives, y compris des réflexions par rapport à l'axe des *x*, à l'axe des *y*, ou à la droite *y* = *x*.** [C, L, R, V]

Act Déterminer le facteur d'étirement entre chacun des piliers et des arches illustrés.





Réponse : Lorsqu'on superpose les arches sur la grille, la plus grande (l'originale) mesure 8 unités de haut et 6 unités de large.

La deuxième plus grande mesure 5 unités de haut et 4 unités de large $(x, y) \longrightarrow \left(\frac{2}{3}x, \frac{5}{8}y\right)$

La plus petite mesure 4 unités de haut et 3 unité de large $(x, y) \longrightarrow \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$

RAS **RF5 : Démontrer une compréhension des réciproques de relations. [C, L, R, V]**

[C] Communication **[CE]** Calcul mental et estimation **[L]** Liens **[R]** Raisonnement **[RP]** Résolution de problèmes **[T]** Technologie **[V]** Visualisation

RF 5: Démontrer une compréhension des réciproques de relations.

Portée et séquence des résultats

Pré-calcul 110	Pré-calcul A 120	Pré-calcul B 120
RF2 : Représenter graphiquement et analyser des fonctions valeur absolue (limitées aux fonctions linéaires et quadratiques) pour résoudre des problèmes. **RF3 :** Analyser les fonctions quadratiques de la forme $\mathrm{y = a(x-p)^2 + q}$ et déterminer le sommet, le domaine et l'image, la direction de l'ouverture, l'axe de symétrie et les coordonnées à l'origine. **RF4 :** Analyser des fonctions quadratiques de la forme $\mathrm{y = ax^2 + bx + c}$ pour déterminer les caractéristiques du graphique correspondant, y compris le sommet, le domaine et l'image, la direction de l'ouverture, l'axe de symétrie, les coordonnées à l'origine, pour résoudre des problèmes.	**RF5 :** Démontrer une compréhension des réciproques de relations.	**RF8 :** Monter une boîte à outils pour les fonctions qui compare divers types de fonctions ainsi que la composition de ces fonctions.

EXPLICATIONS DÉTAILLÉES

Lorsqu'une réflexion du graphique d'une fonction est réalisée par rapport à la droite $y = x$, le graphique obtenu est la réciproque de la fonction donnée. Les valeurs x et y de la fonction et de sa réciproque sont transposées.

Le domaine du graphique initial devient l'image de la réciproque, et l'image du graphique initial devient le domaine de la réciproque. Pour la fonction f ayant le domaine A et l'image B, la fonction réciproque, si elle existe, est représentée par f^{-1} et compte le domaine B et l'image A. De plus, f^{-1} transforme y en x, mais uniquement si f transforme x en y.

Il est possible d'obtenir l'équation de la réciproque en transposant y et x : par exemple, $y = x^2 \rightarrow\ x = y^2$. La réciproque de $y = x^2$ n'est pas une fonction parce que, pour chaque valeur de la variable indépendante (x), abstraction faite de 0, il existe deux valeurs pour la variable dépendante (y).

Si le graphique d'une fonction quadratique est déjà tracé, il est possible de tracer le graphique de sa réciproque en représentant graphiquement les paires ordonnées ayant les valeurs x et y transposées. Il est possible de le faire à la main ou à l'aide de la technologie.

L'équation réciproque $y^2 = x$ peut aussi être écrite comme $y = \pm\sqrt{x}$ où $y = \sqrt{x}$ est l'équation de la partie supérieure du graphique et $y = -\sqrt{x}$ est l'équation de la partie inférieure. Si le domaine du graphique initial, $y = x^2$, est limité à $x \geq 0\ ou\ x \leq 0$, la réciproque sera $y = \sqrt{x}$ ou $y = -\sqrt{x}$ respectivement et sera une fonction. Il est important de noter qu'il s'agit de la première fois que les élèves voient les fonctions racines. Celles-ci seront étudiées en détail plus loin dans *Mathématiques pré-calcul A 120*.

RAS **RF5 : Démontrer une compréhension des réciproques de relations. [C, L, R, V]**

INDICATEURS DE RÉUSSITE

N.B. : Des fonctions réciproques dont les élèves doivent se familiarisées (possiblement ayant des domaines restreints) comprennent des fonctions linéaires, quadratiques, radicales et logarithmiques/exponentielles avec des bases variées.

- Expliquer comment le graphique de la droite $y = x$ peut être utilisé pour esquisser la réciproque d'une relation.
- Expliquer comment la transformation $(x, y) \rightarrow (y, x)$ peut être utilisée pour esquisser la réciproque d'une relation.
- Esquisser, à partir du graphique de la relation, le graphique de sa réciproque.
- Déterminer si une relation et sa réciproque sont des fonctions.
- Déterminer les restrictions qui doivent être apportées au domaine d'une fonction pour que sa réciproque soit une fonction.
- Déterminer l'équation et esquisser le graphique de la réciproque étant donné l'équation d'une relation linéaire ou quadratique.
- Expliquer la relation entre les domaines et les images d'une relation et de sa réciproque.
- Déterminer, algébriquement ou graphiquement, si deux fonctions sont des réciproques l'une de l'autre.
- Déterminer la réciproque des fonctions linéaires.

Stratégies pédagogiques suggérées

- Demander aux élèves d'explorer les transformations de $f(x) = 2x + 1$, de préparer une table de valeurs, puis d'esquisser le graphique de la fonction. Trouver la réciproque de la fonction, préparer une nouvelle table de valeurs correspondantes, puis esquisser le graphique de la réciproque. Demander aux élèves de faire la réflexion et de réagir à ce qui a été fait.
- Répéter le processus ci-dessus avec la fonction quadratique, $y = x^2$, qu'ils ont déjà étudiée. Leur demander de faire la réflexion sur la droite $y = x$ et d'écrire l'équation de la réciproque. Certains élèves prendront $x = y^2$, trouveront la valeur de y et tenteront d'en esquisser le graphique à l'aide de la technologie. Beaucoup esquisseront un graphique et s'attendront à voir une parabole latérale. Leur demander d'expliquer ce qui se produit ici.

RAS **RF5 : Démontrer une compréhension des réciproques de relations. [C, L, R, V]**

Questions (Q) et activités (Act) d'enseignement et d'évaluation suggérées

Q Trouve l'équation de la réciproque pour chacun des éléments suivants.

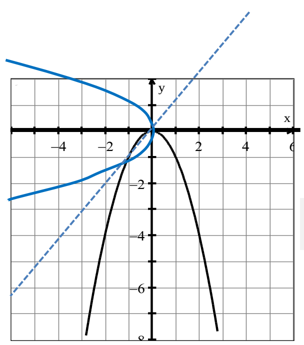
a) $f(x) = 6x$ b) $f(x) = \frac{x-3}{2}$ c) $f(x) = \frac{1}{3}(x-4)$ d) $f(x) = (x+3)^2$

Réponses : a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{6}x$ b) $f^{-1}(x) = 2x + 3$ c) $f^{-1}(x) = 3x + 4$ d) $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{x} - 3$

Q Pour chacun des graphiques suivants :

i. Esquisse la relation réciproque.
ii. Décris le domaine et l'image de la fonction et de sa réciproque.
iii. Explique pourquoi la réciproque est une fonction ou pourquoi ce n'en est pas une. S'il ne s'agit pas d'une fonction, comment limiterais-tu le domaine de la fonction initiale pour garantir que la réciproque soit une fonction?
iv. Indique l'équation de la fonction inverse.

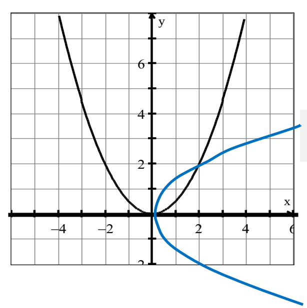
a)



$f(x) = -x^2$

Réponses : i) graphique réciproque indiqué en bleu
ii) Fonction : Domaine $\{x | x \in R\}$ Image $\{y | y \leq 0, y \in R\}$
Réciproque : Domaine $\{x | x \leq 0, x \in R\}$ Image $\{y | y \in R\}$
iii) La réciproque n'est pas une fonction car elle échoue au test de la droite verticale et le graphique original échoue au test de la ligne horizontale. La réciproque serait une fonction si, dans la fonction originale
$D = \{x \geq 0, x \in R\}$ *ou* $D = \{x \leq 0, x \in R\}$
iv) $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{-x}$

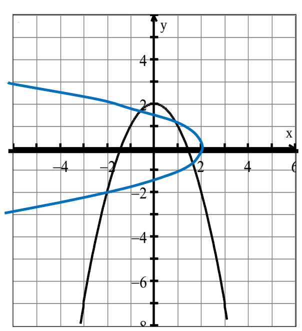
b)



$f(x) = \frac{1}{2}x^2$

Réponses : i) graphique réciproque indiqué en bleu
ii) Fonction : Domaine $\{x | x \in R\}$ Image $\{y | y \geq 0, y \in R\}$
Réciproque : Domaine $\{x | x \geq 0, x \in R\}$ Image $\{y | y \in R\}$
iii) La réciproque n'est pas une fonction car elle échoue au test de la droite verticale et le graphique original échoue au test de la ligne horizontale. la réciproque serait une fonction si, dans la fonction originale
$D = \{x \geq 0, x \in R\}$ *ou* $D = \{x \leq 0, x \in R\}$
iv) $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{2x}$

c)

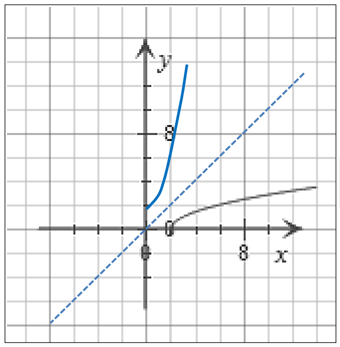


$f(x) = -x^2 + 2$

Réponses : i) graphique réciproque indiqué en bleu
ii) Fonction : Domaine $\{x | x \in R\}$ Image $\{y | y \leq 2, y \in R\}$
Réciproque : Domaine $\{x | x \leq 2, x \in R\}$ Image $\{y | y \in R\}$
iii) La réciproque n'est pas une fonction car elle échoue au test de la droite verticale et le graphique original échoue au test de la ligne horizontale. La réciproque serait une fonction si, dans la fonction originale
$D = \{x \geq 0, x \in R\}$ *ou* $D = \{x \leq 0, x \in R\}$
iv) $f^{-1}(x) = \pm\sqrt{-(x-2)}$

RAS **RF5 : Démontrer une compréhension des réciproques de relations. [C, L, R, V]**

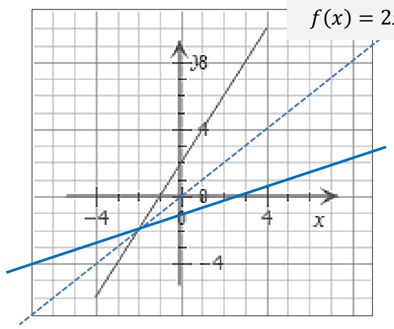
d)



$f(x) = \sqrt{x-2}$

Réponses : i) graphique réciproque indiqué en bleu
ii) Fonction : Domaine $\{x|x \geq 2, x \in R\}$
Image $\{y|\ y \geq 0, y \in R\}$
Réciproque : Domaine $\{x|x \geq 0, x \in R\}$
Image $\{y|y \geq 2, y \in R\}$
iii) Oui, la réciproque est une fonction.
iv) $f^{-1}(x) = x^2 + 2$

e)



$f(x) = 2x + 2$

Réponses i) graphique réciproque indiqué en bleu
ii) Pour les deux fonctions : Domaine $\{x|x \in R\}$
Image $\{y|\ y \in R\}$
iii) Oui, la réciproque est une fonction.
iv) $f^{-1} = \frac{1}{2}x + 2$

RAS **RF6: Tracer le graphique et analyser des fonctions racine (limitées à des fonctions ne contenant qu'un radical).** [L, R, T, V]

[C] Communication **[CE]** Calcul mental et estimation **[L]** Liens **[R]** Raisonnement
[RP] Résolution de problèmes **[T]** Technologie **[V]** Visualisation

RF6: Tracer le graphique et analyser des fonctions racine (limitées à des fonctions ne contenant qu'un radical).

Portée et séquence des résultats

Pré-calcul 110	Pré-calcul A 120	Pré-calcul B 120
AN2 : Résoudre des problèmes portant sur des radicaux et des expressions radicales et comportant des radicandes numériques et algébrique **AN3 :** Résoudre des problèmes renfermant des équations radicales (se limitant aux racines carrées).	**RF6 :** Tracer le graphique et analyser des fonctions racine (limitées à des fonctions ne contenant qu'un radical).	**RF7:** Démontrer une compréhension de la composition de fonctions et des opérations avec des fonctions. **RF8 :** Monter une boîte à outils pour les fonctions qui compare divers types de fonctions ainsi que la composition de ces fonctions.

EXPLICATIONS DÉTAILLÉES

Les élèves ont étudié les propriétés des radicaux afin de simplifier les expressions comportant des radicaux et résoudre des équations contenant des radicaux. Les élèves connaîtront les transformations à partir de *Mathématiques pré-calcul 110* en lien avec les fonctions quadratiques.

Dans l'objectif RF5, les élèves apprennent à prendre la réciproque d'une fonction en mettant l'accent sur les fonctions linéaires et quadratiques. Dans le cadre de ce résultat d'apprentissage, on présentera aux élèves les fonctions racines lorsque la réciproque de $y = x^2$ est divisée en deux fonctions, $y = \pm\sqrt{x}$.

Les élèves esquisseront les graphiques de fonctions racines. Leur compréhension des transformations d'autres fonctions englobera les graphiques de fonctions racines. À l'aide d'un tableau de valeurs, ils appliqueront des transformations et esquisseront des graphiques.

Les élèves seront initiés à la fonction $y = \sqrt{f(x)}$, limitée aux fonctions linéaires et quadratiques et ils compareront le domaine et l'image de la fonction $y = f(x)$. Les **points invariants** de $y = \sqrt{f(x)}$ et de $y = f(x)$ se trouvent à $y = 0$ et à $y = 1$.

Les élèves emploieront les graphiques de fonctions racines pour déterminer des solutions approximatives à des équations contenant des radicaux et résoudre des problèmes comportant des radicaux.

Les fonctions racines composées de la racine carrée de fonctions trigonométriques, polynomiales et valeur absolue seront expliquées davantage dans *Mathématiques pré-calcul B 120.*

RAS **RF6: Tracer le graphique et analyser des fonctions racine (limitées à des fonctions ne contenant qu'un radical).** [L, R, T, V]

INDICATEURS DE RÉUSSITE

- Esquisser, à l'aide d'une table de valeurs, le graphique de la fonction $= \sqrt{x}$, et en énoncer le domaine et l'image.
- Esquisser le graphique d'une fonction de la forme $y = a\sqrt{b(x-h)} + k$ en appliquant des transformations au graphique de la fonction $y = x$, et en énoncer le domaine et l'image.
- Esquisser le graphique d'une fonction de la forme $y = \sqrt{f(x)}$, étant donné le graphique de la fonction $y = f(x)$ et expliquer les stratégies utilisées.
- Comparer le domaine et l'image de la fonction $y = \sqrt{f(x)}$ au domaine et à l'image de la fonction $y = f(x)$, et expliquer pourquoi les domaines et les images peuvent être différents.
- Décrire la relation entre les racines d'une équation comportant des radicaux et les abscisses à l'origine du graphique de la fonction racine correspondante.
- Déterminer, graphiquement, une solution approximative d'une équation comportant des radicaux.

Stratégies pédagogiques suggérées

- Demander aux élèves d'appliquer des transformations à l'aide d'une table de valeurs, en vue de créer des graphiques, et à l'aide de règles de transformation.
- Pour stimuler l'intérêt de certains élèves, on peut pousser ce résultat d'apprentissage plus loin en leur demandant d'écrire l'équation d'une fonction racine à partir d'un graphique ou de la description d'un graphique.
- Demander aux élèves de modéliser les transformations de fonctions à l'aide de cure-pipes ou de pailles.

RAS **RF6: Tracer le graphique et analyser des fonctions racine (limitées à des fonctions ne contenant qu'un radical).** [L, R, T, V]

Questions (Q) et activités (Act) d'enseignement et d'évaluation suggérées

Q Esquisse le graphique a) à l'aide d'une table de valeurs. Montre ensuite comment on peut obtenir les graphiques b) et c) à partir de a).

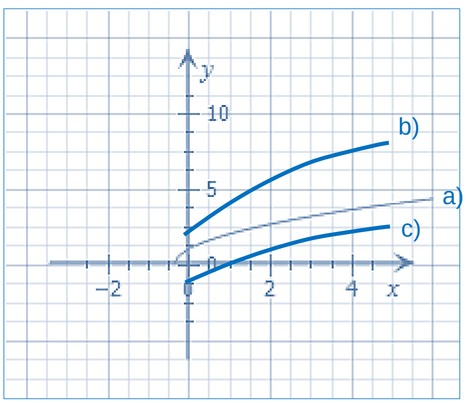
a) $y = \sqrt{3x+1}$

b) $y = 2\sqrt{3x+1}$

c) $y = 2\sqrt{3x+1} - 5$

Réponses :

$a)\ y = \sqrt{3x+1}$		$b)\ y = 2\sqrt{3x+1}$		$c)\ y = 2\sqrt{3x+1} - 5$	
x	y	x	$y \times 2$	x	$y \times 2 - 5$
0	1	0	2	0	-3
1	2	1	4	1	-1
2	$\sqrt{7} \cong 2{,}65$	2	$2\sqrt{7} \cong 5{,}29$	2	$2\sqrt{7} - 5 \cong 0{,}29$
3	$\sqrt{10} \cong 3{,}16$	3	$2\sqrt{10} \cong 6{,}32$	3	$2\sqrt{10} - 5 \cong 1{,}32$
4	$\sqrt{13} \cong 3{,}61$	4	$2\sqrt{13} \cong 7{,}21$	4	$2\sqrt{13} - 5 \cong 2{,}21$
5	4	5	8	5	3



Q Pour les fonctions racines ci-dessus :

a) Utilise le graphique pour estimer la valeur de y lorsque $x = 1{,}5, 3{,}5$.

b) Utilise le graphique pour estimer la valeur de x lorsque $y = 5, 7, 8$.

RAS **RF6: Tracer le graphique et analyser des fonctions racine (limitées à des fonctions ne contenant qu'un radical).** [L, R, T, V]

Q Fais l'exercice suivant :

a) Esquisse le graphique de $f(x) = 3x + 5$.

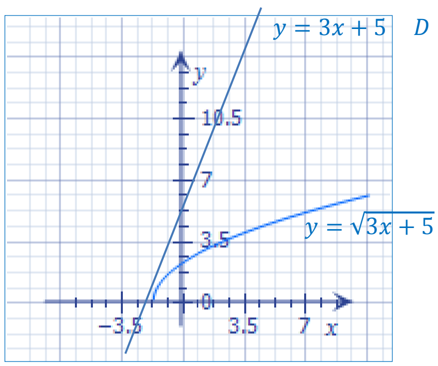
b) Inscris le domaine et l'image de $f(x)$.

c) À l'aide du graphique de $f(x)$, esquisse le graphique de $g(x) = \sqrt{3x + 5}$.

d) Indique le domaine et l'image de $g(x)$.

e) Compare le domaine et l'image de $f(x)$ et de $g(x)$.

Réponses :



$D = \{x|x \in R\}$ $I = \{y|y \in R\}$

$D = \left\{x \middle| x \geq -\frac{5}{3}, x \in R\right\}$ $I = \{y|y \geq 0, y \in R\}$

Q Esquisse le graphique de ce qui suit :

a) $y = \sqrt{x^2 - 9}$

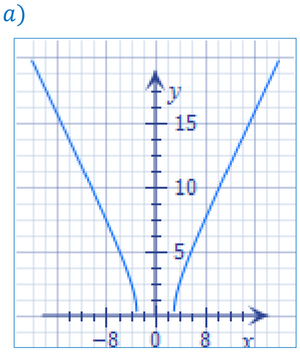
b) $y = \sqrt{16 - x^2}$

c) $y = \sqrt{x^2 - x - 12}$

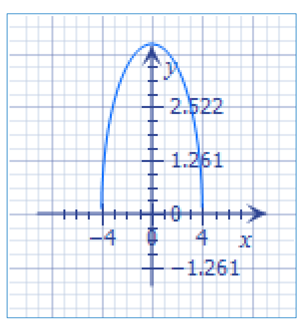
d) $y = \sqrt{15 - 2x - x^2}$

Réponses :

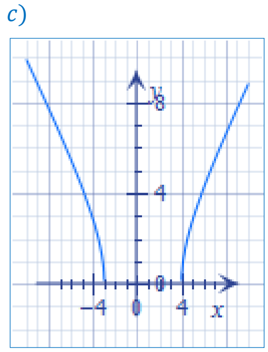
a)



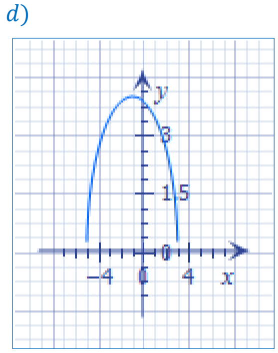
b)



c)



d)



RAS **RF7: Démontrer une compréhension fonctions exponentielles.** [CE, L, R, V]

[C] Communication **[CE]** Calcul mental et estimation **[L]** Liens **[R]** Raisonnement
[RP] Résolution de problèmes **[T]** Technologie **[V]** Visualisation

RF7: Démontrer une compréhension fonctions exponentielles.

Portée et séquence des résultats

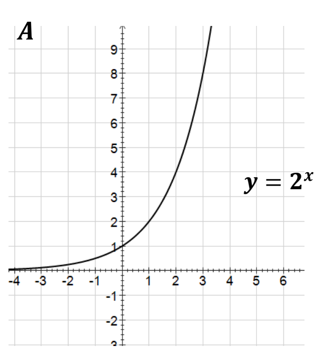
10 année et Pré-calcul 110	Pré-calcul A 120	Pré-calcul B 120
AN3 : Démontrer une compréhension des puissances ayant des exposants entiers et rationnels. (NRF10) **RF3 :** Analyser les fonctions quadratiques de la forme $y = a(x - p)^2 + q$ et déterminer le sommet, le domaine et l'image, la direction de l'ouverture, l'axe de symétrie et les coordonnées à l'origine. (PC110) **RF4 :** Analyser des fonctions quadratiques de la forme $y = ax^2 + bx + c$ pour déterminer les caractéristiques du graphique correspondant, y compris le sommet, le domaine et l'image, la direction de l'ouverture, l'axe de symétrie, les coordonnées à l'origine, pour résoudre des problèmes. (PC110) **N4 :** Démontrer une compréhension des intérêts simples et composés (GMF10)	**RF7 :** Démontrer une compréhension fonctions exponentielles.	**RF8 :** Monter une boîte à outils pour les fonctions qui compare divers types de fonctions ainsi que la composition de ces fonctions.

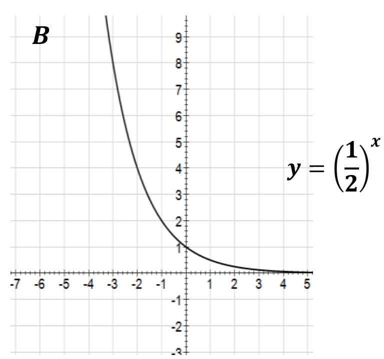
EXPLICATIONS DÉTAILLÉES

Les **fonctions exponentielles** prennent la forme générale $y = c^x$ où $c > 0$. Les élèves auront vu les fonctions exponentielles auparavant, en sciences et en mathématiques, pour décrire des situations comme la croissance de la population, les intérêts composés, la décroissance radioactive et la valeur de dépréciation. Il est important de **revoir les lois des exposants** avant de travailler de façon plus approfondie avec les fonctions exponentielles.

Les élèves devront déterminer les caractéristiques des graphiques de fonctions exponentielles, y compris le domaine, l'image, l'asymptote horizontale et les coordonnées à l'origine. Il faudrait insister sur l'importance et la signification de l'asymptote horizontale pour les graphiques de fonctions exponentielles.

Quand $c > 1$, la fonction exponentielle modélise la croissance exponentielle, p. ex. $y = 2^x$ tel qu'indiqué sur le graphique A ci-dessous. Quand $c < 1$, la fonction exponentielle modélise la décroissance exponentielle p. ex. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ comme en fait état le graphique B, ci-dessous.





RAS **RF7: Démontrer une compréhension fonctions exponentielles.** [CE, L, R, V]

Pour les fonctions exponentielles de la forme, $y = c^x$,$c > 0$,

Domaine	$\{x \mid x \in R\}$
Image	$\{y \mid y > 0\}$
Ordonnée à l'origine	$(0, 1)$
asymptote	Axe des x

Les élèves exploreront les effets des transformations sur les graphiques des fonctions exponentielles. Ils développeront la capacité à esquisser ces graphiques avec et sans l'aide de la technologie, et apprendront à manipuler l'équation exponentielle, $y = a(c)^{b(x-h)} + k$, afin de produire tout graphique donné.

Le tableau suivant résume les effets des paramètres a, b, k et h sur les graphiques de fonctions exponentielles. Ces paramètres devraient faire l'objet d'une discussion en lien avec le travail précédent sur les transformations des fonctions.

Paramètre	Transformation
a	• Étirement vertical par rapport à l'axe x par un facteur de $\lvert a \rvert$ • Pour $a < 0$, réflexion dans l'axe des x
b	• Étirement horizontal par rapport à l'axe des y par un facteur de $\frac{1}{\lvert b \rvert}$ • Pour $b < 0$, réflexion dans l'axe des y
k	• Translation verticale vers le haut ou vers le bas par k unités
h	• Translation horizontale vers la gauche ou la droite par h unités

<u>INDICATEURS DE RÉUSSITE</u>

- Esquisser, avec ou sans l'aide de la technologie, un graphique d'une fonction exponentielle de la forme $y = c^x,\ c > 0$.
- Identifier les caractéristiques du graphique d'une fonction exponentielle de la forme $y = c^x,\ c > 0$, y compris le domaine, l'image, l'asymptote horizontale et les coordonnées à l'origine, et expliquer la signification de l'asymptote horizontale.
- Esquisser le graphique d'une fonction exponentielle en appliquant un ensemble de transformations au graphique de $y = c^x,\ c > 0$ et indiquer les caractéristiques du graphique.

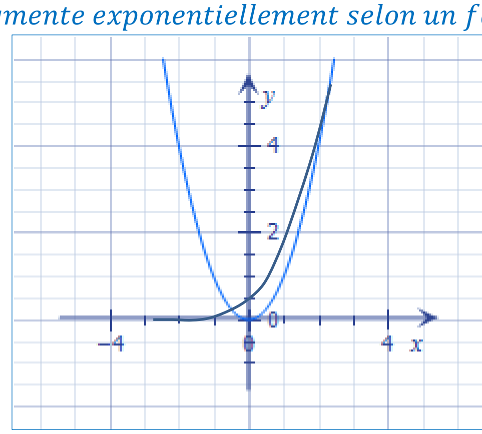
RAS **RF7: Démontrer une compréhension fonctions exponentielles.** [CE, L, R, V]

Stratégies pédagogiques suggérées

- Pour les fonctions exponentielles, demander aux élèves d'explorer des exemples de la vie réelle, comme la diminution exponentielle de la concentration d'un médicament dans la circulation sanguine (*p. ex. Investigation 5, p. 127 Mathematical Modeling, Book 3*), ou l'augmentation exponentielle de la valeur d'une donnée recouvrable (*Investigation 7, p. 134 Mathematical Modeling, Book 3*).
- Demander aux élèves de recourir à la technologie graphique pour créer un graphique et une table de valeurs afin de comparer diverses équations exponentielles comme : $y = 2^x,\ y = 2^x - 3,\ y = 2^x + 4,\ y = 2^{\frac{x}{3}},\ y = 2^{2x}$.
- La ressource documentaire actuelle de l'élève (MHR Mathématiques pré-calcul 12) propose un excellent exercice d'investigation à la p. 346, « Exploration: la transformation d'une fonction exponentielle ».
- En commençant par l'équation exponentielle de base $f(x) = ac^{b(x-h)} + k$, demander aux élèves de changer un facteur à la fois et de voir quel effet cela exerce sur le graphique. Les élèves devraient faire au moins deux manipulations de chaque (a, b, k et h), puis consigner leurs résultats. Les élèves devraient essayer des valeurs négatives pour a, b, k et h, afin de voir l'effet d'un nombre négatif sur chacune des variables. Ils devraient également explorer les fonctions avec la base e.

Questions (Q) et activités (Act) d'enseignement et d'évaluation suggérées

Q Sur le même ensemble d'axes, esquisse les graphiques de $y = x^2$ et de $y = 2^x$.Écris une phrase pour décrire les différences que tu remarques entre les deux graphiques.
$Réponses:\ y = x^2\ est\ une\ parabole,$
$y = 2^x\ augmente\ exponentiellement\ selon\ un\ facteur\ de\ 2$



Q Pour les points (x, y) sur le graphique de la fonction $y = 4^x$, trouve les valeurs manquantes :

$(-2, y),\ (-1, y),\ (0, y),\ (1, y),\ (2, y),\ (3, y),\ (x, 1/8),\ (x, 1/4),\ (x, 1),\ (x, 4),\ (x, 1024).$

Réponses : $\left(-2, \frac{1}{16}\right), \left(-1, \frac{1}{4}\right), (0, 1), (1, 4), (2, 16), (3, 64), \left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{8}\right), \left(-1, \frac{1}{4}\right), (0, 1), (1, 4), (5, 1024)$

RAS **RF7: Démontrer une compréhension fonctions exponentielles.** [CE, L, R, V]

Q Pour chacune des fonctions ci-dessous, qui sont dans la forme $f(x) = a(c)^{b(x-h)} + k$, détermine les transformations (paramètres) a, b, h et k.

a) $f(x) = 3(2)^x - 4$ b) $h(x) = 5^{x+1} + 3$ c) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{2(x-1)}$

d) $f(x) = -\frac{1}{2}3^{(x+1)} + 7$ e) $y = 2{,}5(0{,}75)^{\frac{x-3}{5}} - 4$

Réponses : $a)\ a = 3, b = 1, h = 0, k = -4$ $b)\ a = 1, b = 1, h = -1, k = 3$ $c)\ a = 1, b = 2, h = 1, k = 0$

$d)\ a = -\frac{1}{2}, b = 1, h = -1, k = 7$ $e)\ a = 2{,}5, b = \frac{1}{5}, h = 3, k = -4$

Q Détermine les caractéristiques suivantes du graphique de chaque fonction :

i) le domaine et l'image
ii) l'ordonnée à l'origine (au dixième près)
iii) l'équation de l'asymptote
iv) l'abscisse à l'origine (au dixième près)

a) $y = 4(3)^{x-2} + 2$

b) $y = 2\left(\frac{1}{2}\right)^{x+3} - 3$

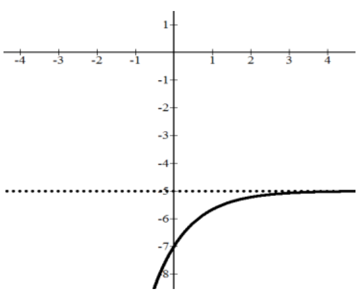
Réponses $a)\ i)\ \{x|x \in R\}\ \{y|y > 2, y \in R\}\ \ ii)\ 2\frac{4}{9} = 2.\overline{4}\ (0{,}2.\overline{4})\ \ iii)\ y = 2\ \ iv)$ *Aucun*

$b)\ i)\ \{x|x \in R\}\ \{y|y > -3, y \in R\}\ \ ii) - 2\frac{3}{4} = -2.\overline{8}\ (0{,}2.\overline{8})\ \ iii)\ y = -3\ \ iv)\ (-3.6{,}0)$

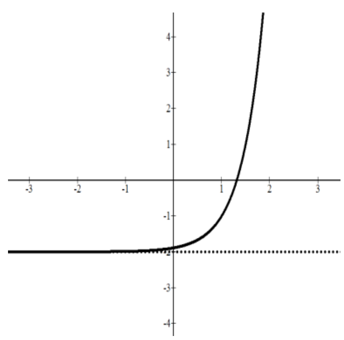
Q Apparie chaque graphique à sa fonction correspondante :

a) $y = 3^{2(x-1)} - 2$ b) $y = 2^{x-2} + 1$ c) $y = -4^{x+2}$ d) $y = -2(3)^{-x} - 5$

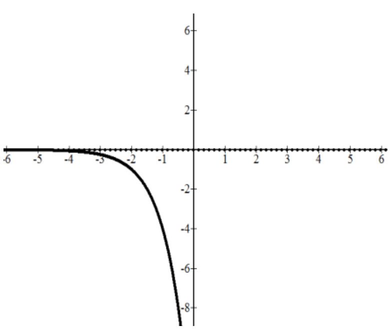
i)



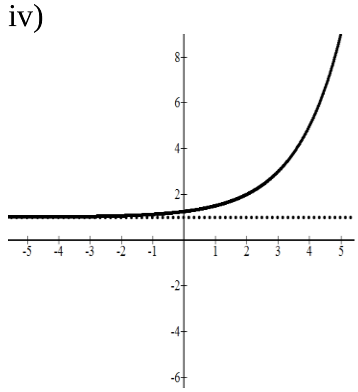
ii)



iii)



iv)



Réponses : *a) et ii)* *b) et iv)* *c) et iii)* *d) et i)*

RAS **RF8 : Démontrer une compréhension des logarithmes.** [CE, L, R]

[C] Communication **[CE]** Calcul mental et estimation **[L]** Liens **[R]** Raisonnement
[RP] Résolution de problèmes **[T]** Technologie **[V]** Visualisation

RF8 : Démontrer une compréhension des logarithmes.

Portée et séquence des résultats

10 année	Pré-calcul A 120	Pré-calcul B 120
AN3 : Démontrer une compréhension des puissances ayant des exposants entiers et rationnels. (NRF10) **N4 :** Démontrer une compréhension des intérêts simples et composés (GMF10)	**RF8 :** Démontrer une compréhension des logarithmes.	**RF8 :** Monter une boîte à outils pour les fonctions qui compare divers types de fonctions ainsi que la composition de ces fonctions.

EXPLICATIONS DÉTAILLÉES

La réciproque d'une fonction exponentielle $y = c^x$ est $x = c^y$. Cette réciproque est également une fonction appelée **une fonction logarithmique**, pour laquelle on dit que y est le logarithme de base c de x, et qu'on écrit comme suit $y = \log_c x$ $(c > 0, c \neq 1)$. Ces fonctions peuvent s'exprimer dans une forme logarithmique ou exponentielle.

Forme logarithmique — Forme exponentielle

exposant

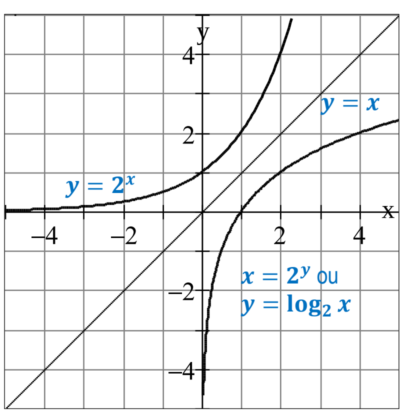
$y = \log_c x$ — $x = c^y$

base

Les élèves devraient voir qu'un logarithme est un exposant sur une base donnée. Par exemple, le $\log_3 9 = 2$ parce que 2 est l'exposant pour la base 3 qui serait égal à 9, $3^2 = 9$.

Les élèves compareront les caractéristiques des graphiques logarithmiques et exponentiels, qui incluront le domaine, l'image, les asymptotes horizontales ou verticales et les coordonnées à l'origine.

Les graphiques de la fonction exponentielle $y = 2^x$ et sa fonction logarithmique réciproque $y = \log_2 x$ se reflètent l'une et l'autre de chaque côté de la ligne $y = x$, comme en fait état le graphique ci-dessous.



Point sur la courbe exponentielle $y = 2^x$	Point correspondant sur la fonction réciproque $y = \log_2 x$
$\left(-3, \frac{1}{8}\right)$	$\left(\frac{1}{8}, -3\right)$
$\left(-2, \frac{1}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4}, -2\right)$
$\left(-1, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, -1\right)$
$(0, 1)$	$(1,0)$
$(1, 2)$	$(2, 1)$
$(2, 4)$	$(4, 2)$
$(3, 8)$	$(8, 3)$

RAS **RF8 : Démontrer une compréhension des logarithmes.** [CE, L, R]

Il faudrait insister sur l'importance et la signification de l'asymptote horizontale pour les graphiques de fonctions exponentielles et de l'asymptote verticale pour les graphiques logarithmiques. Le concept des limites peut être présenté, mais on l'étudiera de façon plus officielle dans *Mathématiques pré-calcul B 120*.

Le tableau suivant résume les caractéristiques des fonctions exponentielles et logarithmiques.

	Exponentiel	Logarithmique
Fonctions	$y = c^x, c > 0, c \neq 1$	$y = \log_c x, c > 0, c \neq 1$
Domaine	$x \in R$	$x > 0$
Image	$y > 0$	$y \in R$
Coordonnée à l'origine	$(0, 1)$	$(1, 0)$
Croissant	lorsque $c > 1$	lorsque $c > 1$
Décroissant	lorsque $0 < c < 1$	lorsque $0 < c < 1$
Asymptote	axe des x	axe des y

Les **logarithmes communs** ont une base de 10 et peuvent s'écrire avec ou sans la base, $\log_{10} x$ ou simplement $\log x$. Les élèves devraient très bien connaître cette convention. Les logarithmes naturels ont une base de e et s'écrivent $\log_e x = \ln x$.

Comme cette base est très importante pour les futures études en calcul et en sciences, les élèves devraient acquérir de l'expérience avec les questions sur la base e. La base e est un nombre irrationnel égal à 2,71828.

INDICATEURS DE RÉUSSITE

- Démontrer graphiquement qu'une fonction logarithmique et une fonction exponentielle ayant la même base se sont des réciproques l'une de l'autre.
- Esquisser, avec ou sans l'aide de la technologie, le graphique d'une fonction logarithmique de la forme $y = \log_c x, c > 1, c \neq 1$.
- Identifier les caractéristiques du graphique d'une fonction logarithmique de la forme $y = \log_c x, c > 1, c \neq 1$, y compris le domaine, l'image, l'asymptote verticale et les coordonnées à l'origine, et expliquer la signification de l'asymptote verticale.
- Convertir une expression logarithmique à sa forme exponentielle, et vice versa.
- Déterminer la valeur exacte d'un logarithme, tel que $\log_2 8$, sans l'aide de la technologie.
- Estimer la valeur d'un logarithme, à l'aide de points de repère, et expliquer le raisonnement, ex. : vu que $\log_2 8 = 3$ et que $\log_2 16 = 4$, alors $\log_2 9$ est entre 3 et 4, ou 3,1 ou 3,2.
- Identifie les caractéristiques du graphique de $y = e^x$ and $y = \ln x$
- Déterminer les valeurs approximatives des logarithmes naturels ou de puissances de base e à d'une calculatrice.

RAS **RF8 : Démontrer une compréhension des logarithmes.** [CE, L, R]

Stratégies pédagogiques suggérées

- Il faudrait consacrer du temps à la définition formelle du logarithme, au moyen de calculs et de graphiques de relations réciproques comme $y = 2^x$ et $y = \log_2 x$, $y = 3^x$ et $y = \log_3 x$, $y = 10^x$ et $y = \log_{10} x$.

- La présentation des logarithmes devrait se faire progressivement.
  1) Recourir à des exemples pour susciter la discussion sur les gros et les petits nombres. (Bonne source d'idées : http://www.vendian.org/envelope/).
  2) Poser des questions qui amènent les élèves à comprendre que le nombre de chiffres avant la décimale ainsi que le nombre de zéros suivant la décimale indiquent la taille des nombres, et que cette information est véhiculée avec une notation exponentielle. Passer en revue la notation scientifique.
  3) Présenter la terminologie et la notation pour les logarithmes. Le lien entre la forme logarithmique et la forme exponentielle devrait être expliqué, et les élèves devraient s'exercer à les convertir l'une dans l'autre.
  4) Demander aux élèves d'explorer les logarithmes avec la base 10 : $\log_{10} 10 = 1$ parce que $10^1 = 10$; $\log_{10} 0{,}01 = -2$ parce que $10^{-2} = 0{,}01$; $\log_{10} 1 = 0$ parce que $10^0 = 1$ et ainsi de suite.
  5) Demander aux élèves d'explorer les logarithmes avec une base plus petite, comme 2. Commencer par examiner les puissances de 2, ce qui mènera à une discussion sur $\log_2$. Demander aux élèves de déterminer une série de logarithmes : $\log_2 2 = 1$ parce que $2^1 = 2$; $\log_2 16 = 4$ parce que $2^4 = 16$; $\log_2 1 = 0$ parce que $2^0 = 1$; $\log_2 \frac{1}{8} = -3$ parce que $2^{-3} = \frac{1}{8}$ et ainsi de suite.
  6) Demander aux élèves d'explorer les logarithmes avec la base e.
     $\ln e = 1$ parce que $\log_e e = 1$, $\ln e^5 = 5$ *parce que* $\log_e e^5 = 5$,
     $\ln 1 = 0$ parce que $e^0 = 1$, $\ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$ *parce que* $\log_e e^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$ ..... et ainsi de suite.

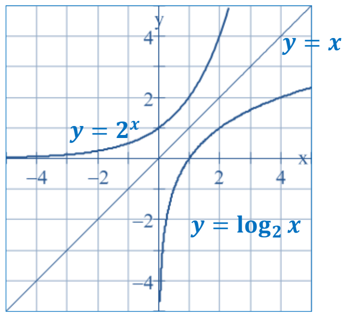
- Les élèves devraient évaluer les expressions logarithmiques afin de développer des points de repère pour les solutions de nombres entiers. Une fois établies, ces points de repère devraient servir à trouver les valeurs approximatives d'autres expressions logarithmiques.

RAS **RF8 : Démontrer une compréhension des logarithmes.** [CE, L, R]

Questions (Q) et activités (Act) d'enseignement et d'évaluation suggérées

Q Sur le même ensemble d'axes, esquisse les graphiques de $y = 2^x$ et de $y = \log_2 x$, puis esquisse ensuite la droite $y = x$. Explique comment tu sais que les deux courbes réfléchissent des images de chaque côté de la droite $y = x$?

Réponses : Les deux courbes sont les réciproques l'une et de l'autre, les valeurs x et y sont inversées.



Q Simplifie les expressions suivantes :

a) $\log_{10} 10^3$ b) $\log_{10} 10^{-1}$ c) $\log_2 2^4$ d) $\log_5 5^{-2}$

e) $\log_{10} 10^{0,5}$ f) $\log_{10} 10^{-1,5}$ g) $\log_2 2^{3,6}$ h $\log_5 5^{-2,1}$

Réponses : $a)\ 3$ $b)\ -1$ $c)\ 4$ $d)\ -2$ $e)\ 0,5$ $f)\ -1,5$ $g)\ 3,6$ $h)\ -2,1$

Q Exprime chacun des éléments suivants dans une autre forme, soit exponentielle ou logarithmique.

a) $\log_2 16 = 4$ b) $\log_{27} 3 = \frac{1}{3}$ c) $49^{\frac{1}{2}} = 7$ d) $4^3 = 64$

Réponses : $a)\ 2^4 = 16$ $b)\ 27^{\frac{1}{3}} = 3$ $c)\ \log_{49} 7 = \frac{1}{2}$ $d)\ \log_4 64 = 3$

Q Évalue chacun des éléments suivants :

a) $\log_2 8$ b) $\log_3 81$ c) $\log_5 \sqrt{5}$

d) $\log_2 \left(\frac{1}{32}\right)$ e) $\log_2 4^{25}$ f) $\log_x x^{\frac{2}{3}}$

Réponses : $a)\ 3$ $b)\ 4$ $c)\ \frac{1}{2}$ $d)\ -5$ $e)\ 50$ $f)\ \frac{2}{3}$

Q Écris une expression qui est équivalente à $y = 2\log\left(\frac{4}{x}\right)$.

Réponses : $y = \log_{10}\left(\frac{4}{x}\right)^2$ *ou* $10^y = \left(\frac{4}{x}\right)^2$

Q Utilise des expressions logarithmiques de référence pour estimer $\log_2 11$.

Réponses : $\log_2 8 = 3,$ $\log_2 16 = 4,$ 11 *est plus près de* 8 $\therefore \log_2 11 \approx 3,4$

Q Évalue ce qui suit :

a) $\ln e^5$ b) $\ln e^{-4}$ c) $\ln e^{10}$ d) $\ln e^{-1}$

e) $\ln e$ f) $4 \ln e$ g) $2\, ln1$ h) $3 \ln e^2$

Réponses : $a)\ 5$ $b)\ -4$ $c)\ 10$ $d)\ -1$ $e)\ 1$ $f)\ 4$ $g)\ 0$ $h)\ 6$

SCO **RF9 : Tracer le graphique et analyser des fonctions logarithmiques.** [C, L, T, V]

[C] Communication **[CE]** Calcul mental et estimation **[L]** Liens **[R]** Raisonnement **[RP]** Résolution de problèmes **[T]** Technologie **[V]** Visualisation

RF9: Tracer le graphique et analyser des fonctions exponentielles et logarithmiques.

Portée et séquence des résultats

10 année	Pré-calcul 110	Pré-calcul A 120	Pré-calcul B 120
AN3 : Démontrer une compréhension des puissances ayant des exposants entiers et rationnels. (NRF10) **N4 :** Démontrer une compréhension des intérêts simples et composés (GMF10)	**RF3 :** Analyser les fonctions quadratiques de la forme $\mathrm{y} = \mathrm{a}(\mathrm{x} - \mathrm{p})^2 + \mathrm{q}$ et déterminer le sommet, le domaine et l'image, la direction de l'ouverture, l'axe de symétrie et les coordonnées à l'origine. **RF4 :** Analyser des fonctions quadratiques de la forme $\mathrm{y} = \mathrm{ax}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{c}$ pour déterminer les caractéristiques du graphique correspondant, y compris le sommet, le domaine et l'image, la direction de l'ouverture, l'axe de symétrie, les coordonnées à l'origine, pour résoudre des problèmes.	**RF9 :** Tracer le graphique et analyser des fonctions exponentielles et logarithmiques.	**RF2 :** Analyser des suites et des séries géométriques pour résoudre des problèmes. **RF8 :** Monter une boîte à outils pour les fonctions qui compare divers types de fonctions ainsi que la composition de ces fonctions.

EXPLICATIONS DÉTAILLÉES

Les élèves exploreront les effets des transformations sur les graphiques des fonctions logarithmiques. Ils développeront la capacité à esquisser ces graphiques avec ou sans l'aide de la technologie, et apprendront à manipuler l'équation logarithmique $y = \mathrm{a}\log_c\big(b(x-h)\big) + k$ afin de produire tout graphique donné.

Le tableau suivant résume les effets des paramètres a, b, k et h sur les graphiques des fonctions logarithmiques. Les élèves devraient comprendre que ces effets sont les mêmes que ceux trouvés pour les fonctions exponentielles.

Paramètre	Transformation
a	• Étirement vertical par rapport à l'axe des x par un facteur de $\lvert a\rvert$ • Pour $a < 0$, réflexion sur l'axe des x
b	• Étirement horizontal par rapport à l'axe des y par un facteur de $\frac{1}{\lvert b\rvert}$ • Pour $b < 0$, réflexion sur l'axe des y
k	• Translation verticale vers le haut ou vers le bas par k unités
h	• Translation horizontale vers la gauche ou la droite par h unités

SCO **RF9 : Tracer le graphique et analyser des fonctions logarithmiques.** [C, L, T, V]

INDICATEURS DE RÉUSSITE

- Esquisser le graphique d'une fonction logarithmique en appliquant un ensemble de transformations au graphique de $y = \log_c x$, $c > 0, c \neq 1$, et indiquer les caractéristiques du graphique.
- Esquisser et énoncer des caractéristiques des graphiques de fonctions exponentielles de base e, et de fonctions logarithmiques naturels, en appliquant des transformations aux graphiques de $y = e^x$ et de $y = \ln x$.

Stratégies pédagogiques suggérées

- En commençant par une équation logarithmique, $y = a\log_c\big(b(x-h)\big) + k$, demander aux élèves de changer un facteur à la fois et de voir quel effet cela exerce sur le graphique. Les élèves devraient faire au moins deux manipulations de chaque (a, b, k et h), puis consigner leurs résultats. Les élèves devraient essayer des valeurs négatives pour a, b, k et h, afin de voir l'effet d'un nombre négatif sur chacune des variables.
- Donner aux élèves un graphique logarithmique et son étirement, et leur demander de déterminer l'équation pour le graphique de l'étirement *(p. ex. n°6, p. 330, Mathématiques pré-calcul 12).*
- Demander aux élèves d'analyser les graphiques e $y = e^x$ et de $y = \ln x$ en créant des graphiques et un tableau semblables à ceux des fonctions $y = 2^x$ et $\log_2 x$ qui sont montrés à la section **RF8**.

SCO **RF9 : Tracer le graphique et analyser des fonctions logarithmiques.** [C, L, T, V]

Questions (Q) et activités (Act) d'enseignement et d'évaluation suggérées

Q Pour les points (x, y) sur le graphique de la fonction $y = \log_4 x$, trouve les valeurs manquantes :
$(x, -2)$, $(x, -1)$, $(x, 0)$, $(x, 1)$, $(x, 2)$, $(x, 3)$, $(\frac{1}{8}, y)$, $(\frac{1}{4}, y)$, $(1, y)$, $(4, y)$, $(64, y)$, $(1024, y)$.

Réponses : $\left(\frac{1}{16}, -2\right), \left(\frac{1}{4}, -1\right), (1,0), (4,1), (16,2), (64,3), \left(\frac{1}{8}, -\frac{3}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, -1\right), (1,0), (4,1), (64,3), (1024,5)$

Q Pour les points (x, y) sur le graphique de la fonction $y = \log_{10} x$, trouve les valeurs manquantes :
$(x, -2)$, $(x, -1)$, $(x, 0)$, $(x, 1)$, $(x, 2)$, $(x, 3)$,$(0{,}001, y)$, $(0{,}1, y)$, $(1, y)$, $(10, y)$, $(100, y)$, $(1000, y)$.

Réponses : $\left(\frac{1}{100}, -2\right), \left(\frac{1}{10}, -1\right), (1,0), (10,1), (100,2), (1000,3), (0.001, -3), (0.1, -1), (1,0), (10,1), (100,2), (1000,3)$

Q Détermine les caractéristiques suivantes du graphique de chaque fonction :
i) le domaine et l'image
ii) l'ordonnée à l'origine (au dixième près)
iii) l'équation de l'asymptote
iv) l'abscisse à l'origine (au dixième près)

a) $y = -2\log(x+1)$
b) $y = \log_3\left(2(x+3)\right)$
c) $y = -3\log(x-2) - 4$
d) $y = \log(x+3) + 1$
e) $y = 2(3)^{x-4} + 1$
f) $y = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 5$
g) $y = \ln(x-4) - 2$
h) $y = -\ln(x+2) + 3$

Réponses :
a) i) $\{x|x > -1, x \in R\}$ $\{y|y \in R\}$ ii) $(0,0)$ iii) $x = -1$ iv) $(0,0)$
b) i) $\{x|x > -3, x \in R\}$ $\{y|y \in R\}$ ii) $(0; 1{,}6)$ iii) $x = -3$ iv) $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$
c) i) $\{x|x > 2, x \in R\}$ $\{y|y \in R\}$ ii) non défini, aucune ordonnée à l'origine iii) $x = 2$ iv) $(2,0)$
d) i) $\{x|x > -3, x \in R\}$ $\{y|y \in R\}$ ii) $(0; 1{,}5)$ iii) $x = -3$ iv) $(-2{,}9; 0)$
e) i) $\{x|x \in R\}$ $\{y|y > 1, y \in R\}$ ii) $(0,1)$ iii) $y = 1$ iv) non défini, aucune abscisse à l'origine
f) i) $\{x|x \in R\}$ $\{y|y > -5, y \in R\}$ ii) $(0; -3{,}5)$ iii) $y = -5$ iv) $(-1{,}7; 0)$
g) i) $\{x|x > 4, x \in R\}$ $\{y|y \in R\}$ ii) non défini, aucune ordonnée à l'origine iii) $x = 4$ iv) $(11{,}4; 0)$
h) i) $\{x|x > -2, x \in R\}$ $\{y|y \in R\}$ ii) $(0; 2{,}3)$ iii) $x = -2$ iv) $(18{,}1; 0)$

RAS **RF10 : Démontrer une compréhension des lois des logarithmes du produit, du quotient et des puissances.** [C, L, R, T]

[C] Communication **[CE]** Calcul mental et estimation **[L]** Liens **[R]** Raisonnement
[RP] Résolution de problèmes **[T]** Technologie **[V]** Visualisation

RF10 : Démontrer une compréhension des lois des logarithmes du produit, du quotient et des puissances.

Portée et séquence des résultats

Pré-calcul A 120	Pré-calcul B 120
RF10 : Démontrer une compréhension des lois des logarithmes d'un produit, d'un quotient et d'une puissance.	**RF8 :** Monter une boîte à outils pour les fonctions qui compare divers types de fonctions ainsi que la composition de ces fonctions.

EXPLICATIONS DÉTAILLÉES

Les lois des logarithmes nous permettent de travailler facilement avec des expressions et des équations logarithmiques. Comme les logarithmes sont des exposants, les lois des logarithmes sont liées aux lois des exposants. Les élèves devraient être en mesure d'expliquer ce lien au moyen d'exemples.

$\log_c(xy) = \log_c x + \log_c y$ *Loi du logarithme d'un produit*
$\log_c\left(\frac{x}{y}\right) = \log_c(x) - \log_c(y)$ *Loi du logarithme d'un quotient*
$\log_c(x)^r = \mathrm{r}\log_c(x)$ pour tout nombre réel r. *Loi du logarithme d'une puissance*

Selon ce qu'ils connaissent de la résolution des logarithmes, les élèves devraient avoir du temps pour explorer et développer les lois des logarithmes. Toutefois, le principal résultat escompté est le suivant : que les élèves soient en mesure d'appliquer ces lois à la résolution d'expressions logarithmiques avec et sans l'aide de la technologie. Ces lois s'appliquent également au logarithme naturel $\ln x$.

INDICATEURS DE RÉUSSITE

- Développer et formuler des lois générales pour les logarithmes à l'aide d'exemples numériques et des lois des exposants.
- Formuler chacune des lois des logarithmes.
- Déterminer, à l'aide des lois des logarithmes, une expression équivalente à une expression logarithmique.
- Déterminer, à l'aide de la technologie, la valeur approximative d'une expression logarithmique, telle que $\log_2 9$.

RAS **RF10 : Démontrer une compréhension des lois des logarithmes du produit, du quotient et des puissances.** [C, L, R, T]

Stratégies pédagogiques suggérées

- Demander aux élèves de travailler sur différentes stratégies afin de résoudre un problème donné. Par exemple, pour résoudre : $3\log_8 x + \log_8 5 = \log_8 625$.

Strategie 1

$3\log_8 x + \log_8 5 = \log_8 625$
$\log_8 x^3 + \log_8 5 = \log_8 625$
$\log_8 5x^3 = \log_8 625$
$5x^3 = 625$
$x^3 = 125$
$x = 5$

Strategie 2

$3\log_8 x + \log_8 5 = \log_8 625$
$\log_8 x^3 + \log_8 5 = \log_8 625$
$\log_8 5x^3 = \log_8 625$
$\log_8 5x^3 - \log_8 625 = 0$
$\log_8 \left(\frac{5x^3}{625}\right) = 0$
$\left(\frac{5x^3}{625}\right) = 8^0 = 1$
$5x^3 = 625$
$x^3 = 125$
$x = 5$

- Demander aux élèves de se pencher sur les différences dans les méthodes de solution pour :
$\log_2 x + \log_2 3 = \log_2 9$ et $\log_2 x + \log_2 3 = 9$.

Questions (Q) et activités (Act) d'enseignement et d'évaluation suggérées

Q Écris chacune des expressions suivantes en tant que simple énoncé logarithmique :

a) $\log_3 x + 2\log_3 7$ b) $\log_5 x - \log_5 y$ c) $\log_2 5x + \log_2 7x$

d) $\log_3 54 - 4\log_3 2$ e) $\ln 10 + \ln 6 - \ln 15$

Réponses : a) $\log_3 49x$ b) $\log_5\left(\frac{x}{y}\right)$ c) $\log_2 35x^2$ d) $\log_3\left(\frac{27}{8}\right)$ e) $\ln 4$

Q Écris au long chacun des éléments suivants :

a) $\log(abc)$ b) $3\log(6x)$ c) $2\ln\left(\frac{a}{b}\right)$

Réponses : a) $\log a + \log b + \log c$ b) $3\log x + 3\log 6$ c) $2\ln a - 2\ln b$

Q Simplifie chacun des éléments suivants :

a) $\log 3 + \log 7$ b) $\log x + \log(x+2)$ c) $a\log(xz) + a\log(xy)$

d) $\ln 20 - \ln 10$ e) $2\ln e - 3\ln 1 + \ln e^6$

Réponses : a) $\log 21$ b) $\log(x^2+2x)$ c) $a\log x^2y^2$ d) $\ln 2$ e) $8\ln e$

RAS **RF11 : Résoudre des problèmes comportant des équations exponentielles et logarithmiques.** [C, L, R, RP]

[C] Communication	**[CE]** Calcul mental et estimation	**[L]** Liens	**[R]** Raisonnement
[RP] Résolution de problèmes	**[T]** Technologie	**[V]** Visualisation	

RF11 Résoudre des problèmes comportant des équations exponentielles et logarithmiques.

Portée et séquence des résultats

10 année	Pré-calcul A 120	Pré-calcul B 120
AN3 : Démontrer une compréhension des puissances ayant des exposants entiers et rationnels. (NRF10) **N4 :** Démontrer une compréhension des intérêts simples et composés (GMF10)	**RF11 :** Résoudre des problèmes comportant des équations exponentielles et logarithmiques.	**RF2:** Analyser les séquences et les séries géométriques pour résoudre las problèmes. **RF8 :** Monter une boîte à outils pour les fonctions qui compare divers types de fonctions ainsi que la composition de ces fonctions.

EXPLICATIONS DÉTAILLÉES

Pour résoudre des équations exponentielles et logarithmiques, diverses méthodes sont possibles, y compris le changement d'une forme à une autre.

Pour les équations exponentielles, il peut être utile d'exprimer les éléments avec des identiques. Par exemple :

$4^{x+1} = 8^{3x}$

$(2^2)^{x+1} = (2^3)^{3x}$

$2^{2x+2} = 2^{9x}$ Comme les deux bases sont identiques, les exposants sont égaux et les bases peuvent être exclues

$2x + 2 = 9x$

$x = \frac{2}{7}$

Les logarithmes sont utiles pour la résolution d'équations exponentielles dans lesquelles les bases ne peuvent être identiques. Par exemple :

$8(3^{2x}) = 568$

$3^{2x} = 71$

$\log 3^{2x} = \log 71$

$2x(\log 3) = \log 71$

$x = \frac{\log 71}{2\log 3}$

$x \approx 1.94$

Quand les expressions logarithmiques ont la même base, les **arguments**, (2x+5) et 11, comme dans l'exemple suivant, sont égaux :

$\log_6(2x + 5) = \log_6 11$
$2x + 5 = 11$
$x = 3$

Quand les expressions logarithmiques deforme $x = a^{log_a m}$ ont la même base a,la base sera supprimée de la réponse finale. Par exemple, pour résoudre $x = 5^{log_5 3}, x = 10^{log\, 2^3}, x = 2^{log_2 7^{-3}}$ et $x = e^{ln\, 6}$, commencer par exprimer sous forme logarithmique :

$\log_5 x = \log_5 3$	$\log_{10} x = \log_{10} 2^{-3}$	$\log_2 x = \log_2 7^{-3}$	$\log_e x = \ln 6$
$x = 3$	$x = 2^{-3}$	$x = 7^{-3}$	$\ln x = \ln 6$
			$x = 6$

RAS **RF11 : Résoudre des problèmes comportant des équations exponentielles et logarithmiques.**
[C, L, R, RP]

Les équations logarithmiques et exponentielles peuvent toutes deux être également résolues graphiquement, soit en esquissant le graphique d'une fonction simple et en trouvant les abscisses à l'origine, soit en esquissant le graphique des fonctions qui correspondent à chaque côté du signe égal puis en déterminant x aux points d'intersection des deux graphiques.

INDICATEURS DE RÉUSSITE

- Déterminer la solution d'une équation exponentielle dans laquelle les bases sont des puissances les unes des autres.
- Déterminer, à l'aide d'une variété de stratégies, la solution d'une équation exponentielle dans laquelle les bases ne sont pas des puissances les unes des autres.
- Déterminer la solution d'une équation logarithmique et vérifier la solution.
- Expliquer pourquoi une solution d'une équation logarithmique peut être une solution étrangère.
- Résoudre un problème comportant de la croissance ou la décroissance exponentielle.
- Résoudre un problème comportant l'application d'équations exponentielles aux prêts, aux hypothèques et aux placements.
- Résoudre un problème comportant les échelles logarithmiques telles que l'échelle de Richter et l'échelle de pH.
- Résoudre un problème en modélisant une situation comportant une équation exponentielle ou logarithmique.
- Résoudre des problèmes comportant des expressions e^x et $\ln x$.

Stratégies pédagogiques suggérées

- Fournir des occasions aux élèves pour qu'ils s'exercent à résoudre des problèmes du monde réel qui portent sur des fonctions exponentielles. Parmi les exemples, citons les problèmes portant sur la dépréciation, les niveaux de pH, l'échelle de Richter, la demi-vie des éléments radioactifs et les intérêts composés.
- D'autres questions comportant la base e et $\ln x$ se trouvent dans *Mathematical Modeling, Book 4*.
- Les élèves peuvent trouver la mnémonique suivante utile :
  $B^e = n \quad \log_B n = e$ comme « Ben the log bunny »

RAS **RF11 : Résoudre des problèmes comportant des équations exponentielles et logarithmiques.** [C, L, R, RP]

Questions (Q) et activités (Act) d'enseignement et d'évaluation suggérées

Q Simplifie les expressions suivantes :

a) $10^{\log_{10} 0.01}$ b) $4^{\log_4 1/16}$ c) $2^{\log_2 8}$ d) $2^{\log_2 2^{-3}}$
e) $3^{\log_3 80}$ f) $10^{\log_{10} 0{,}071}$ g) $4^{\log_4 0{,}111}$ h) $2^{\log_2 10}$
i) $25^{\log_5 9}$ j) $3^{\log_9 16}$ k) $2^{\log_2 5+\log_2 6}$ l) $5^{2\log_5 3-\log_5 12}$

Réponses :
$a)\ 0{,}01\quad b)\ \frac{1}{16}\quad c)\ 8\quad d)\ 2^{-3}\quad e)\ 80\quad f)\ 0{,}071\quad g)\ 0{,}111\quad h)\ 10\quad i)\ 81\quad j)\ 4\quad k)\ 30\quad l)\ \frac{3}{4}$

Q Fais le calcul suivant :

a) $e^{\ln 5}$ b) $e^{\ln 10}$ c) $e^{2\ln 3}$ d) $e^{3\ln 2}$
e) $e^{-2\ln 4}$ f) $e^{\ln 10-\ln 2}$ g) $e^{5\ln 2}$ h) $e^{-\ln 3}$
i) $e^{\ln 8+\ln 7}$ j) $e^{4\ln 5-5\ln 4}$ k) $e^{2\ln 3+\ln 5}$

Réponses : $a)\ 5\quad b)\ 10\quad c)\ 9\quad d)\ 8\quad e)\ \frac{1}{16}\quad f)\ 5\quad g)\ 32\quad h)\ \frac{1}{3}\quad i)\ 56\quad j)\ \frac{625}{1024}\quad k)\ 45$

Q On a déjà commencé la résolution de l'équation ci-dessous. Termine-la. Résous en utilisant une approche différente, et explique l'approche que tu préfères et pourquoi.

$16(2^x) = 1024$
$2^x = 64$
$\log(2^x) = \log 64$

Réponse : *À faire avec cette méthode :* $x\log 2 = \log 64,\quad x = \log 64/\log 2 = 6$

Autre méthode plus efficace : $\frac{16(2^x)}{16} = \frac{1024}{16},\quad 2^x = 64,\quad 2^x = 2^6,\quad x = 6$

Q Pour lesquelles des équations suivantes les valeurs y sont-elles équivalentes?

a) $\log_{32} y = \frac{2}{5}$ b) $\log_{16} 2 = y$ c) $\log_y 81 = \frac{4}{3}$ d) $\log_8 y = \frac{2}{3}$

Réponses : $a)\ y = 4\quad b)\ y = \frac{1}{4}\quad c)\ y = 27\quad d)\ y = 4\quad \therefore$ *a) et d) sont équivalents.*

Q La population d'une petite ville est de 125. Si on projette qu'elle doublera tous les 50 ans, combien cela prendra-t-il de temps avant que la ville atteigne une population de 8 000?

Réponse : $y = a(c)^x\quad 8000 = 125(2)^{\frac{x}{50}}\quad x = 300$ *ans.*

Q Une tasse de café contient environ 100 mg de caféine. Lorsqu'on boit le café, la caféine est absorbée dans la circulation sanguine, puis métabolisée dans le corps. Toutes les 5 heures, la quantité de caféine dans la circulation sanguine diminue de 50 %. Combien cela prend-il d'heures avant que la caféine soit réduite à 15 mg?

Réponse : $y = a(c)^x\quad 15 = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}}\quad x \approx 13{,}7$

Q Si $\log x = q$, écris $\frac{1}{3}\log x^5$ en fonction de q.

Réponse : $\frac{1}{3}\log x^5 = \frac{5}{3}q$

Q Détermine l'abscisse à l'origine pour le graphique de $y = b\log_c(ax)$.

Réponse : quand $y = 0,\quad x = \frac{1}{a}$

RAS **RF11 : Résoudre des problèmes comportant des équations exponentielles et logarithmiques.** [C, L, R, RP]

Q Dispose les éléments suivants en ordre croissant :

$\log 1000 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \quad 49^{\frac{1}{2}} \quad 2^{-1}$

$Réponse : 2^{-1} \quad \log 1000 \quad 49^{\frac{1}{2}} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

Q Résous.

a) $x^{\frac{3}{2}} + 2 = 29$ b) $2^{x+2} = 32^{2x-5}$

$Réponse : \ a) \ x = 9 \quad b) \ x = 3$

Q Résous pour x par méthode algébrique.

$\log_2 x + \log_2(x-7) = 3$

$Réponse : \ (x-8)(x+1) = 0 \ \therefore x = 8 \ et \ \cancel{x = -1}$ racine étrangère

Q i) Résous pour x sans calculatrice.
ii) Trouve la solution approximative pour x au moyen d'une calculatrice.

a) $e^x = 16$ b) $e^{3x} = 27$ c) $e^{2x} = 5$ d) $e^{5x} = 9$
e) $4e^{2x} = 5$ f) $e^{5-3x} = 2$ g) $e^{x+1} = 7$ h) $e^{2x-1} = 3$
i) $4 - 2e^x = -22$

Réponses :
$a) \ x = \ln 16 \approx 2{,}77 \quad b) \ x = \frac{\ln 27}{3} \approx 1{,}099 \quad c) \ x = \frac{\ln 5}{2} \approx 0{,}805 \quad d) \ x = \ln \frac{\ln 9}{5} \approx 0{,}44$
$e) \ x = \frac{\ln\left(\frac{5}{4}\right)}{2} \approx 0{,}11 \quad f) \ x = \frac{5 - \ln 2}{3} \approx 1{,}44 \quad g) \ x = \ln 7 - 1 \approx 0{,}95 \quad h) \ x = \frac{\ln 3 + 1}{2} \approx 1{,}05$
$i) \ x = \ln 13 \approx 2{,}56$

Q i) Résous pour x sans calculatrice.
ii) Trouve la solution approximative pour x au moyen d'une calculatrice.

a) $\ln x = -1$ b) $\ln x = \frac{1}{3}$ c) $\ln x = 5$
d) $\ln(2x-1) = 3$ e) $\ln(x+2) = 4$ f) $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = 2$
g) $\ln x = \ln 5 + \ln 8$ h) $5 + 2\ln x = 6$ i) $\ln x^2 = 2\ln 4 - 4\ln 2$
j) $-5 + 2\ln 3x = 5$

Réponses :
$a) \ x = \frac{1}{e} \approx 0{,}37 \quad b) \ x = e^{\frac{1}{3}} \approx 1{,}40 \quad c) \ x = e^5 \approx 148{,}4 \quad d) \ x = \frac{e^3+1}{2} \approx 10{,}54$
$e) \ x = e^4 - 2 \approx 52{,}6 \quad f) \ x = \frac{1}{e^2} \approx 0{,}14 \quad g) \ x = 40 \quad h) \ x = e^{\frac{1}{2}} \approx 1{,}65$
$i) \ x = \pm 1 \quad j) \ x = \frac{e^5}{3} \approx 49{,}5$

Q Résous pour x.

a) $e^{\ln(x+1)} = 5$ b) $e^{\ln 5x} = 10$ c) $e^{\ln(4x+2)} = 14$
d) $e^{\ln x^2 + \ln x} = 8$ e) $e^{\ln 2x} = 6$ f) $\log_{10} e^x = 1$
g) $\log_5 e^{2x} = 3$ h) $\ln(e^{2x-1}) = 5$ i) $\ln(e^{5x+2}) = 22$

Réponses :
$a) \ x = 4 \quad b) \ x = 2 \quad c) \ x = 3 \quad d) \ x = 2 \quad e) \ x = 3 \quad f) \ x = \ln 10 \quad g) \ x = \frac{\ln 125}{2} \ h) \ x = 3 \quad i) \ x = 4$

RAS **RF11 : Résoudre des problèmes comportant des équations exponentielles et logarithmiques.** [C, L, R, RP]

Q Les chimistes définissent l'acidité ou l'alcalinité d'une substance selon la formule $pH = -log[H\char`^+]$ où $[H^{+}]$ est la concentration des ions d'hydrogène, mesurée en moles par litre. Les solutions ayant une valeur en pH de moins de 7 sont acides, celles supérieures à 7 sont basiques et celles égales à 7 (eau) sont neutres.

a) Le jus de pomme a une concentration des ions d'hydrogène de $[\mathrm{H}^{+}] = 0{,}0003$. Trouve la valeur pH et détermine si le jus est basique ou acide.

b) Un test d'ammoniac montre que la concentration des ions d'hydrogène est de $[\mathrm{H}^{+}] = 1{,}3 \times 10^{-9}$. Trouve la valeur en pH et détermine si l'ammoniac est basique ou acide.

$Réponses : a)\ pH = -\log(0{,}0003) = 3{,}52\ \ \therefore acide \qquad b)\ pH = -\log(1{,}3 \times 10^{-9}) = 8{,}89\ \ \therefore basique$

Q a) Une solution ayant un pH de 5 est 1000 fois plus basique qu'une solution ayant un pH de ______.

b) Une solution ayant un pH de 9 est 10 fois plus basique qu'une solution ayant un pH de ______.

$Réponses :\ a)\ 2 \qquad b)\ 10$

Q La « sonie » se mesure en décibels (dB) et se calcule au moyen de la formule $dB = 10\log(I \div I_0)$ où I_0 est l'intensité du seuil acoustique (c'est-à-dire le son qu'on peut à peine percevoir), et I est l'intensité en termes de multiples de l'intensité du seuil acoustique.

L'exposition prolongée aux sons supérieurs à 85 décibels peut entraîner des dommages auditifs ou une perte auditive, et le tir d'un fusil à percussion annulaire $.22$ présente une intensité d'environ $I = (2.5\ \times 1013)I_0$.Calcule les décibels et détermine s'il vaut la peine de porter des protecteurs d'oreilles au champ de tir.

$Réponse :\ dB = 10\log\left(\frac{2.5\times10^{13}\ I_0}{I_0}\right) = 133{,}98\ dB\ \ \therefore Vous\ devriez\ \ porter\ une\ protection\ auditive.$

Q L'intensité des séismes se mesure sur l'échelle de Richter et est calculée comme $R = log[I \div I_0]$, où I_0 représente la secousse seuil, qui est à peine perceptible, et I représente l'intensité exprimée en multiples de cette intensité seuil.

Un sismographe installé à la maison indique qu'une activité d'une magnitude de $I = 989$ s'est produite en ton absence. Sachant que le passage d'un camion lourd peut donner une magnitude de 3 ou de 3.5 sur l'échelle de Richter et que des tremblements de terre moyens atteignent une magnitude de 4 ou plus sur l'échelle de Richter, qu'est-ce qui est probablement arrivé en ton absence?

$Réponse :\ R = \log\left(\frac{989\ I_0}{I_0}\right) \approx 3 \quad \therefore Il\ est\ plus\ probable\ que\ ce\ soit\ un\ grondement\ de\ camion\ .$

Q La température en $\mathrm{°C}$ d'une tasse de chocolat chaud, t minutes après sa préparation, est exprimée par l'équation $T(t) = 92e^{-0{,}06t}$.

a) Détermine la température du chocolat chaud 8 minutes après qu'il a été versé.

b) Combien de temps faudra-t-il attendre avant que la température du chocolat chaud baisse à $50\,°C$?

$Réponse ::\ a)\ T(18) = 92e^{-0{,}06(8)} = 56{,}9\mathrm{°C} \qquad b)\ 50\mathrm{°C} = 92e^{-0{,}06t} \quad t = \frac{\ln\frac{50}{92}}{-0{,}06} \approx 10{,}3\ minutes$

RAS **RF11 : Résoudre des problèmes comportant des équations exponentielles et logarithmiques.** [C, L, R, RP]

Q La croissance d'une culture de bactéries peut être modélisée par l'équation $N(t) = N_0e^{0,105t}$, où $N(t)$ représente la quantité de bactéries après t heures et N_0 représente la quantité initiale de bactéries.

a) Si la culture compte 300 bactéries au départ, quelle est la population estimative dans 12 heures?
b) Combien de temps faudra-t-il à la population pour doubler?

Réponses : $a)\ \ N_0 = 300\ \ N(12) = 300e^{0,105(12)} \approx 1058\ bactéries$
$b)\ N = 600 \quad 600 = 300e^{0,105t} \quad t = \frac{\ln 2}{0,105} \approx 6,6\ heures$

Q Un élément radioactif se désintègre de façon exponentielle selon la formule $A = A_0e^{-0,04463t}$, où A représente la quantité présente après t jours et A_0 représente la quantité initiale. Si la quantité initiale est $80\ g$,

a) Détermine la quantité qui reste après 45 jours.
b) Après combien de temps l'élément radioactif sera-t-il réduit à 20 % de sa quantité initiale?

Réponses : $a)\ \ A = 80e^{-0,04463(45)} \approx 10,74\ g \qquad b)\ \ 0,20 = e^{-0,04463t} \quad t = \frac{\ln 0,20}{-0,04463} \approx 36\ jours$

RAS **T1 : Démontrer une compréhension des angles en position standard exprimés en degrés et en radians.** [CE, L, R, V]

[C] Communication	**[CE]** Calcul mental et estimation	**[L]** Liens	**[R]** Raisonnement
[RP] Résolution de problèmes	**[T]** Technologie	**[V]** Visualisation	

Trigonométrie

T1: Démontrer une compréhension des angles en position standard exprimés en degrés et en radians.

Portée et séquence des résultats

Pré-calcul 110	Pré-calcul A 120
T1 : Démontrer une compréhension des angles en position standard [de 0° à 360°].	**T1 :** Démontrer une compréhension des angles en position standard exprimés en degrés et en radians.

EXPLICATIONS DÉTAILLÉES

Dans *Mathématiques pré-calcul 110*, les élèves ont déterminé la mesure des angles exprimés en degrés et en position standard de $0°$ à 360.

Ils vont approfondir cette notion pour définir les angles en **radians** et pour déterminer la relation entre les degrés et les **radians**. Ils détermineront la mesure de tous les angles qui sont **coterminaux** que des angles en position standard.

Les points seront définis en fonction de **coordonnées polaires**; c'est-à-dire, par rapport à l'angle de rotation à partir de l'origine et de la **longueur de l'arc**.

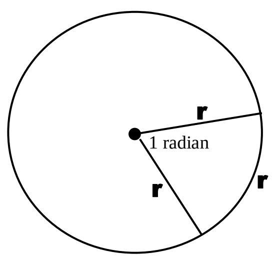
Le **radian** est la mesure de l'angle au centre d'un cercle sous-tendu par un arc dont la longueur est égale au rayon (r) du cercle.

Une rotation complète $= 360° = 2\pi\ radians$

Une demi-rotation $= 180° = \pi\ radians$

Le tiers d'une rotation $= 120° = \frac{2\pi}{3}\ radians$

Le quart d'une rotation $= 90° = \frac{\pi}{2}\ radians$



Si les degrés ne sont pas indiqués, on suppose qu'il s'agit de **radians**. On obtient un **radian** en divisant une unité de distance par elle-même et, par conséquent, les **radians** n'ont pas d'unités. Par exemple, le **radian** $\frac{\pi}{2}$ s'exprime simplement par $\frac{\pi}{2}$.

Les élèves devraient déterminer comment convertir les degrés en **radians**, et les **radians** en degrés à l'aide du raisonnement proportionnel. Ils doivent comprendre que :

Pour convertir les **radians → degrés** : multiplier par $\frac{180°}{\pi}$.

Pour convertir les **degrés → radians** : multiplier par $\frac{\pi}{180°}$.

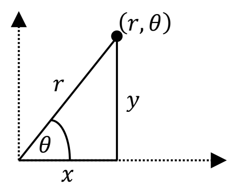
RAS **T1 : Démontrer une compréhension des angles en position standard exprimés en degrés et en radians.** [CE, L, R, V]

Dans les cours de sciences, on effectue les conversions en employant ce qu'on appelle la méthode du *facteur de conversion* où les unités sont placées de manière à faire en sorte que les unités communes s'annulent, laissant la bonne unité. Par exemple, lorsque l'on convertit $60°$ en mesure en **radians**, les unités de degrés s'annulent, ce qui ne laisse que les **radians**.

$$60° \times \frac{\pi\, radians}{180°} = \frac{\pi}{3}\, radians \ \mathbf{ou}\ \frac{\pi}{3}$$

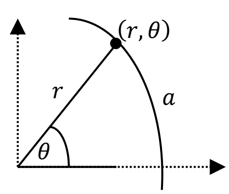
Les élèves doivent aussi bien maîtriser les conversions des angles à l'aide d'une calculatrice.

Les **<u>coordonnées polaires</u>** expriment l'emplacement d'un point formé par (r, θ) où r est la distance à partir l'origine jusqu'au point et θ est l'angle mesuré à partir l'axe des x positif jusqu'au point en **degrés** ou en **radians,** mesuré dans le sens antihoraire. Il faut aussi aborder les points $(-r, \theta), (r, -\theta)$ et $(-r, -\theta)$.



La distance r est aussi l'hypoténuse d'un triangle rectangle en rapport avec les coordonnées de x et de y et liant θ à des rapports trigonométriques. En particulier, $x^2 + y^2 = r^2$, $\cos\theta = x/r$ et $\sin\theta = y/r$. Il s'agit d'une introduction aux coordonnées polaires plutôt qu'une introduction aux nombres complexes.

La **<u>longueur d'un arc</u>** est représentée par la formule $\boldsymbol{a = \theta r}$, et est la relation entre la **longueur de l'arc**, (a), **l'angle central** (θ) en **radians** et le **rayon** (r). La **longueur de l'arc** et le **rayon** doivent être exprimés dans la même unité.



Les **<u>angles coterminaux</u>** seront aussi explorés. Il s'agit d'une paire d'angles qui ont les mêmes côtés terminaux. En additionnant ou en soustrayant des rotations complètes de façon répétée, $\pm 360°(n)$ pour les degrés et $\pm 2\pi(n)$ pour les **radians**, un nombre infini d'**angles coterminaux** sont créés pour un angle donné.

Par exemple, $60°$ est **coterminal** avec $420°$ et $-300°$ ($60° \pm 360°$), ou, en **radians**, $\frac{\pi}{3}$ est **coterminal** avec $\frac{7\pi}{3}$ et $\frac{-5\pi}{3}$ $\left(\frac{\pi}{3} \pm 2\pi\right)$.

RAS **T1 : Démontrer une compréhension des angles en position standard exprimés en degrés et en radians.** [CE, L, R, V]

INDICATEURS DE RÉUSSITE

- Esquisser un angle (positif ou négatif) en position standard dont la mesure est exprimée en degrés.
- Décrire la relation parmi différentes façons d'exprimer la mesure d'un angle, particulièrement en degrés et en radians.
- Esquisser, en position standard, un angle dont la mesure est de 1 radian.
- Esquisser, en position standard, un angle dont la mesure est exprimée sous la forme de *k* radians, où $\in Q$.
- Exprimer en radians la mesure d'un angle (valeur exacte ou décimale approximative) étant donné sa mesure en degrés.
- Exprimer en degrés la mesure d'un angle (valeur exacte ou décimale approximative) étant donné sa mesure en radians.
- Déterminer la mesure, en degrés ou en radians, de tous les angles d'un domaine donné ayant le même côté terminal qu'un angle en position standard.
- Déterminer la forme générale des mesures, en degrés ou en radians, de tous les angles ayant le même côté terminal qu'un angle en position standard.
- Expliquer la relation entre la mesure en radians d'un angle en position standard et la longueur de l'arc intercepté d'un cercle de rayon r, et résoudre des problèmes connexes.
- Convertir entres des coordonnées polaires et des coordonnées rectangulaires.

Stratégies pédagogiques suggérées

- Pour permettre aux élèves de visualiser ce à quoi ressemble $1\ radian$, construire un triangle équilatéral en utilisant trois cure-pipes ayant tous des angles de $60°$. En formant un arc avec la base du triangle, l'angle central deviendra légèrement inférieur à $60°$, ce qui montrera aux élèves que $1\ radian$ correspond à environ $57{,}2958°$.
- Les sites Web peuvent présenter d'autres explications et des exemples de questions supplémentaires pour ce résultat d'apprentissage,

- Le manuel *Mathématiques pré-calcul 12* ne couvre pas les coordonnées polaires. Toutefois, ce sujet est abordé dans la ressource précédente, *Mathematical Modeling, Book 4*, section 5.2.

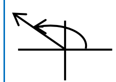
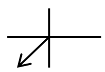
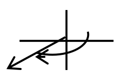
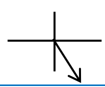
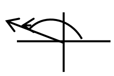
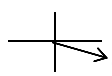
RAS **T1 : Démontrer une compréhension des angles en position standard exprimés en degrés et en radians.** [CE, L, R, V]

Questions (Q) et activités (Act) d'enseignement et d'évaluation suggérées

Q Esquisse chacun des angles suivants : $\frac{3\pi}{4}, \frac{13\pi}{4}, \frac{-5\pi}{6}, \frac{11\pi}{3}, \frac{8\pi}{9}, \frac{-25\pi}{12}$.

a) Détermine dans quel quadrant se trouve le côté terminal.
b) Nomme un angle coterminal positif et un angle coterminal négatif en radians.
c) Indique la mesure de l'angle et ses angles coterminaux en degrés.

Réponses :

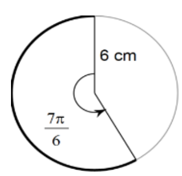
$\theta(rad)$	Esquisse	$\theta(deg)$	Coterminal positif		Coterminal négatif	
			radian	degré	radian	degré
$\frac{3\pi}{4}$	 QII	$135°$	$\frac{11\pi}{4}$	$495°$	$\frac{-5\pi}{4}$	$-225°$
$\frac{13\pi}{4}$	 QIII	$585°$	$\frac{5\pi}{4}$	$225°$	$\frac{-3\pi}{4}$	$-135°$
$\frac{-5\pi}{6}$	 QIII	$-150°$	$\frac{7\pi}{6}$	$210°$	$\frac{-17\pi}{6}$	$-510°$
$\frac{11\pi}{3}$	 QIV	$660°$	$\frac{5\pi}{3}$	$300°$	$\frac{-\pi}{3}$	$-60°$
$\frac{8\pi}{9}$	 QII	$160°$	$\frac{26\pi}{9}$	$520°$	$\frac{-10\pi}{9}$	$-200°$
$\frac{-25\pi}{12}$	 QIV	$-375°$	$\frac{23\pi}{12}$	$345°$	$\frac{-\pi}{12}$	$-15°$

Q Donne les éléments suivants en ordre croissant. Explique ton raisonnement et montre tout ton travail.

$3\ radians$ $\quad 190°$ $\quad \frac{5\pi}{4}\ radians$ $\quad 58°$ $\quad \frac{5\pi}{9}$

Réponse : $58° < \frac{5\pi}{9} < 3\ radians < 190° < \frac{5\pi}{4}$

Q Trouve la longueur de l'arc.



Réponse : $a = 7\pi\ cm \approx 22\ cm$

Q Convertis $A(5,-7)$ en coordonnées polaires.

Réponse $r^2 = (5)^2 + (-7)^2 \quad r = \sqrt{74}$

$\tan\theta_r = \frac{7}{5} \quad \theta_r = 54° \quad \theta = 360° - 54° = 306°\ OU\ 5{,}34\ radians$

$\therefore \quad A(5,-7) \longrightarrow A(\sqrt{74}, 306°)\ OU\ A(\sqrt{74},; 5{,}34)$

Q Convertis chaque ensemble de coordonnées polaires en coordonnées rectangulaires.

a) $A(7, 135°)$ $\quad$ b) $B\left(2, -\frac{11\pi}{6}\right)$ $\quad$ c) $C\left(-4, \frac{2\pi}{3}\right)$

Réponses : a) $A\left(\frac{-7\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{2}\right)$ *b)* $B(\sqrt{3}, 1)$ *c)* $C(2, -2\sqrt{3})$

RAS T2 : Développer et appliquer l'équation du cercle unitaire. [L, R, V]

[C] Communication **[CE]** Calcul mental et estimation **[L]** Liens **[R]** Raisonnement
[RP] Résolution de problèmes **[T]** Technologie **[V]** Visualisation

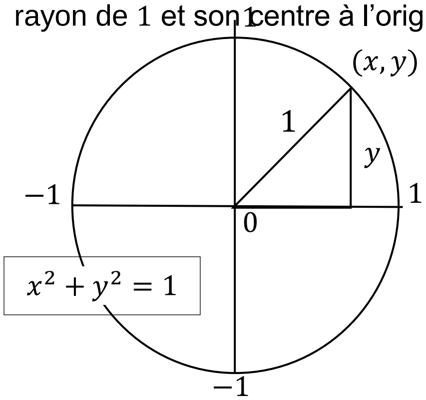
T2: Développer et appliquer l'équation du cercle unitaire.

Portée et séquence des résultats

Pré-calcul 110	Pré-calcul A 120
T2 : Résoudre des problèmes comportant les rapports trigonométriques de base (sinus, cosinus et tangente) pour des angles de 0° à 360° en position standard.	**T2 :** Développer et appliquer l'équation du cercle unitaire.

EXPLICATIONS DÉTAILLÉES

Pour ce résultat d'apprentissage, on présente aux élèves le cercle unitaire avec un rayon de 1 et son centre à l'origine $(0{,}0)$ sur le plan cartésien.



Tracer une droite perpendiculaire à partir d'un point (x, y) sur le cercle à l'axe des x permet de créer un triangle rectangle avec l'origine.

À partir du théorème de Pythagore, l'équation du cercle unitaire est $x^2 + y^2 = 1$. Pour les cercles ayant un rayon autre que 1, l'équation du cercle est $x^2 + y^2 = r^2$.

Dans *Mathématiques pré-calcul 11*, les élèves ont appris les trois principaux rapports trigonométriques sur un plan des coordonnées, $sinus\ \theta = \frac{y}{r}$, $cosinus\ \theta = \frac{x}{r}$ et $tangente\ \theta = \frac{y}{x}$. Vu que le cercle unitaire a un rayon de 1, que $\sin\theta = \frac{y}{1} = y$ et que $\cos\theta = \frac{x}{1} = x$, et que chaque point (x, y) sur le cercle unitaire peut être exprimé dans la forme $(\cos\theta, \sin\theta)$.

Dans le présent résultat d'apprentissage, les élèves approfondiront leurs connaissances des rapports trigonométriques pour y inclure les trois rapports trigonométriques inverses :

$\boldsymbol{Cosécante\ (csc)}$ est l'inverse du rapport du sinus : $csc\ \theta = \frac{r}{y}$.

$\boldsymbol{Sécante\ (sec)}$ est l'inverse du rapport du cosinus : $sec\ \theta = \frac{r}{x}$.

$\boldsymbol{Cotangente\ (cot)}$ est l'inverse du rapport de la tangente : $cot\ \theta = \frac{x}{y}$.

INDICATEURS DE RÉUSSITE

- Formuler l'équation du cercle unitaire à partir du théorème de Pythagore.
- Décrire les six rapports trigonométriques à l'aide d'un point $P(x, y)$ qui représente l'intersection du côté terminal d'un angle et du cercle unitaire.
- Généraliser l'équation du cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon r.

RAS T2 : Développer et appliquer l'équation du cercle unitaire. [L, R, V]

Stratégies pédagogiques suggérées

- Collectivement, développer l'équation d'un cercle de centre à l'origine et $rayon = 1$. Passer ensuite à un cercle de rayon $rayon > 1$. Déterminer les valeurs de x, de y et de r pour divers points sur chaque cercle, puis mettre ces valeurs en relation avec le théorème de Pythagore et avec les trois principaux rapports trigonométriques.

Questions (Q) et activités (Act) d'enseignement et d'évaluation suggérées

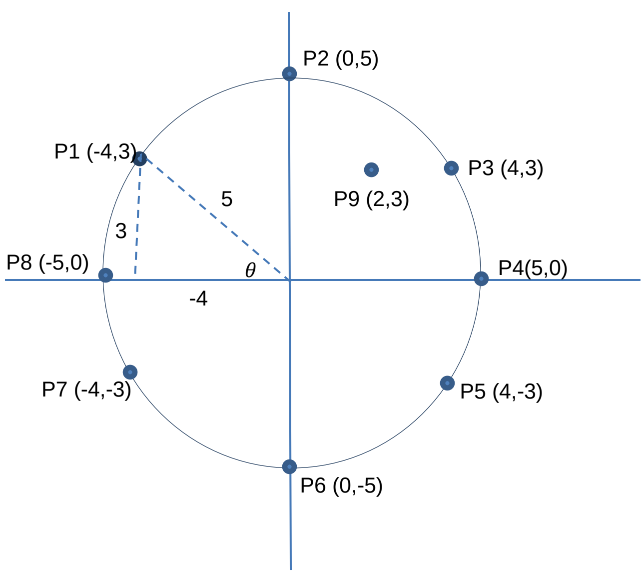
Q Le point $\left(\frac{2}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ est-il sur le cercle unitaire? Comment le sais-tu?

Réponse : $\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{-4}{5}\right)^2 = \frac{20}{25} \neq 1$ $\therefore$ *le point ne se trouve pas sur le cercle unitaire*

Q Le point $P(-4, 3)$, tracé sur un plan des coordonnées, est sur un cercle centré à l'origine $(0,0)$.

a) Calcule le rayon du cercle.
b) Détermine l'équation du cercle.
c) Définis d'autres points sur le cercle dans les trois autres quadrants et sur les axes des x et des y.
d) Isole un point qui n'est pas sur ce cercle.
e) Détermine les six rapports trigonométriques de θ du triangle formé à P(-4,3).

Réponses :
a) $(-4)^2 + (3)^2 = 25$ $\quad \therefore r = 5$
b) $x^2 + y^2 = 5^2$
c) *P2 – P8, voir le diagramme. D'autres points pourraient être determinés, mais ces points peuvent être trouvés rapidement si un élève comprend le concept.*
d) *P9* $(2,3)$
e) Pour $P(-4,3)$ $\quad \sin\theta = \frac{3}{5}$ $\quad \cos\theta = \frac{-4}{5}$ $\quad \tan\theta = \frac{-4}{3}$ $\quad \text{cosec}\,\theta = \frac{5}{3}$ $\quad \sec\theta = \frac{-5}{4}$ $\quad \text{cotan}\,\theta = \frac{-3}{4}$



SCO **T3 : Résoudre des problèmes à l'aide des six rapports trigonométriques d'angles exprimés en radians et en degrés.** [CE, R, RP, T, V]

[C] Communication **[CE]** Calcul mental et estimation **[L]** Liens **[R]** Raisonnement
[RP] Résolution de problèmes **[T]** Technologie **[V]** Visualisation

T3 : Résoudre des problèmes à l'aide des six rapports trigonométriques d'angles exprimés en radians et en degrés.

Portée et séquence des résultats

Pré-calcul 110	Pré-calcul A 120
T2 : Résoudre des problèmes à l'aide des trois rapports trigonométriques de base pour des angles de 0° à 360° en position standard.	**T3 :** Résoudre des problèmes à l'aide des six rapports trigonométriques d'angles exprimés en radians et en degrés.

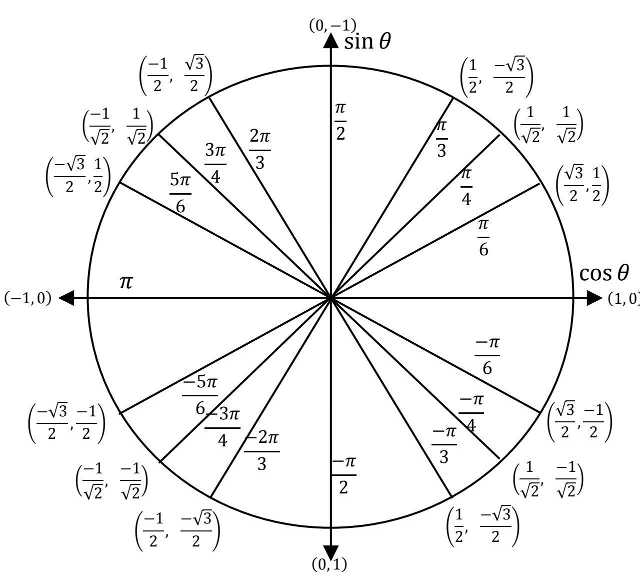
EXPLICATIONS DÉTAILLÉES

Les élèves créeront des régularités pour déterminer, à l'aide de la technologie, les valeurs approximatives du sinus, du cosinus, de la tangente, de la cosécante, de la sécante et de la cotangente d'un angle quelconque à l'aide d'une calculatrice scientifique. Ils devront s'assurer de sélectionner le bon mode sur la calculatrice : $degrés$ ou $radians$.

Les élèves détermineront, à l'aide du cercle unitaire ou des triangles particuliers, les valeurs exactes du $sinus, du\ cosinus, de\ la\ tangente, de\ la\ cosécante, de\ la\ sécante$ et de la $cotangente$ d'angles dont la mesure est exprimée en degrés qui sont des multiples de $0°, 30°, 45°, 60°$ ou de $90°$, ou d'angles dont la mesure est exprimée en $radians$ qui sont des multiples de $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$ ou de $\frac{\pi}{2}$, et devront expliquer la stratégie. Il est possible de calculer le cercle unitaire à partir des triangles particuliers en utilisant des triangles semblables.

Les élèves découvriront que les angles ont dans chaque quadrant un angle de référence correspondant, dont la valeur absolue est la même pour chaque rapport trigonométrique en établissant le lien avec les triangles formés en reliant une droite perpendiculaire à partir du point (x, y) sur le cercle à l'axe des x. Ils verront aussi que chaque rapport sera positif ou négatif selon le quadrant dans lequel il se trouve.

Le diagramme suivant résume les valeurs du sinus et du cosinus des angles particuliers.



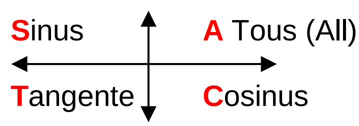
SCO **T3 : Résoudre des problèmes à l’aide des six rapports trigonométriques d’angles exprimés en radians et en degrés.** [CE, R, RP, T, V]

Les élèves ont seulement besoin d’apprendre les angles quadrantaux et les angles du premier quadrant. Il est possible d’obtenir les valeurs des trois autres quadrants en se servant des angles de référence et de la règle de CAST. Par exemple : $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Les angles correspondants, $\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\ et\ \frac{11\pi}{6}$, ont la même valeur absolue du $cosinus$, mais sont négatifs ou positifs selon le quadrant dans lequel chacun se trouve.

$$\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Le quadrant dans lequel chaque rapport est positif se résume par la règle de CAST, qui était présenté pour la première fois dans *Mathématiques pré-calcul 110* et qui est maintenant élargie afin de comprendre les rapports trigonométriques inverses.



Les élèves devraient comprendre que la règle de CAST n’est qu’un moyen rapide de se rappeler dans quels quadrants x et y sont positifs ou négatifs, parce que les signes des fonctions trigonométriques sont déterminés par les signes des valeurs de x et de y utilisées pour les calculer.

Étant donné un point sur le côté terminal d’un angle en position standard, les élèves doivent pouvoir calculer le rapport trigonométrique et l’angle.

Pour ce résultat d’apprentissage, on peut présenter aux élèves les méthodes pour rationaliser le dénominateur. La rationalisation du dénominateur est une façon d’estimer une valeur, par exemple $\frac{1}{\sqrt{2}}$. En le rationalisant à $\frac{\sqrt{2}}{2}$, il est possible de faire une estimation : $\sqrt{2}$ se situe entre $\sqrt{1}$ et $\sqrt{4}$ ou entre 1 et 2, et plus près de 1 ou environ $1{,}3$. Par conséquent $\frac{\sqrt{2}}{2} \cong \frac{1.3}{2} = 0{,}65$, soit une bonne estimation de $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bien qu’il ne soit plus nécessaire de rationaliser le dénominateur pour faire l’estimation des valeurs comme $\frac{1}{\sqrt{2}}$ en raison de l’accès actuel aux technologies, ces compétences en rationalisation demeurent pertinentes à mesure que les élèves progressent en mathématiques, p. ex. pour résoudre des équations comportant des radicaux dans le dénominateur, calculer les réciproques de nombres complexes et d’autres techniques en mathématiques abstraites.

SCO **T3 : Résoudre des problèmes à l'aide des six rapports trigonométriques d'angles exprimés en radians et en degrés.** [CE, R, RP, T, V]

INDICATEURS DE RÉUSSITE

- Déterminer, à l'aide de la technologie, la valeur approximative d'un rapport trigonométrique de tout angle dont la mesure est exprimée en degrés ou en radians.
- Déterminer, à l'aide du cercle unitaire ou des triangles particuliers, la valeur exacte d'un rapport trigonométrique des angles dont la mesure est exprimée en degrés qui sont des multiples de 0º, 30º, 45º, 60º ou 90º ou pour des angles dont la mesure est exprimée en radians, qui sont des multiples de $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \text{ou } \frac{\pi}{2}$, et expliquer la stratégie.
- Déterminer, avec ou sans l'aide de la technologie, à partir de la valeur d'un rapport trigonométrique, les mesures exprimés en degrés ou en radians, des angles d'un domaine particulier.
- Expliquer comment déterminer les valeurs exactes des six rapports trigonométriques à partir des coordonnées d'un point situé sur le côté terminal d'un angle en position standard.
- Déterminer en degrés ou en radians les mesures des angles dans un domaine particulier à partir d'un point situé sur le côté terminal d'un angle en position standard.
- Déterminer, à partir de la valeur d'un rapport trigonométrique dans un domaine particulier, les valeurs exactes des autres rapports trigonométriques.
- Esquisser un schéma représentant un problème comportant des rapports trigonométriques.
- Résoudre un problème à l'aide des rapports trigonométriques.

SCO **T3 : Résoudre des problèmes à l'aide des six rapports trigonométriques d'angles exprimés en radians et en degrés.** [CE, R, RP, T, V]

Questions (Q) et activités (Act) d'enseignement et d'évaluation suggérées

Q Remplis le tableau suivant pour une rotation de $P(1,0)$, et un centre de $(0,0)$:

angle de rotation en $degrés$	angle de rotation en $radians$	Image de P (1, 0)		
		Exprimée par (x, y)	Exprimée en décimale	Exacte
$45°$				
		$(\cos 225°, \sin 225°)$		
			$(0{,}707;\ -0{,}707)$	
		$(\cos 270°, \sin 270°)$		
				$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$330°$				
				$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

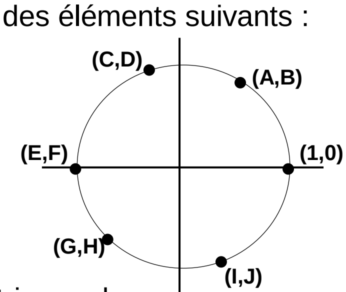
Réponses :

angle de rotation en $degrés$	angle de rotation en $radians$	Image de P (1, 0)		
		Exprimée par (x, y)	Exprimée en décimale	Exacte
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$(\cos 45°, \sin 45°)$	$(0{,}707;\ 0{,}707)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$225°$	$\frac{5\pi}{4}$	$(\cos 225°, \sin 225°)$	$(-0{,}707;\ -0{,}707$	$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$315°$	$\frac{7\pi}{4}$	$(\cos 315°, \sin 315°)$	$(0{,}707, ; -0{,}707)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$270°$	$\frac{3\pi}{2}$	$(\cos 270°, \sin 270°)$	$(0, -1)$	$(0, -1)$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$(\cos 30°, \sin 30°)$	$(0{,}866;\ 0{,}5)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$330°$	$\frac{11\pi}{6}$	$(\cos 330°, \sin 330°)$	$(0{,}866;\ -0{,}5)$	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$
$145°$	$\frac{3\pi}{4}$	$(\cos 145°, \sin 145°)$	$(-0{,}707;\ 0{,}707)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Q Quelle coordonnée pourrait représenter la valeur de chacun des éléments suivants :

a) $\cos 290°$ b) $\sin 180°$ c) $\cos 110°$
d) $\sin 225°$ e) $\cos(-70°)$ f) $\cos 420°$

Réponses : a) I b) F c) C d) H e) I f) A



Q Calcule les valeurs exactes des 5 autres rapports trigonométriques de

$\sec\theta = -\frac{13}{12}, \pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$.

Réponses Answer: $x = -12,\ r = 13,\ y = -5\ \therefore\ \cos\frac{-12}{13}\quad \sin\frac{-5}{13}\quad \tan\frac{5}{12}\quad \csc\frac{-13}{5}\quad \cot\frac{12}{5}$

SCO **T3 : Résoudre des problèmes à l'aide des six rapports trigonométriques d'angles exprimés en radians et en degrés.** [CE, R, RP, T, V]

Q Évalue les expressions suivantes en indiquant la réponse comme une valeur exacte.

a) $3\sin 45° + \cos^2 30°$ b) $\sin\frac{5\pi}{4}\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

Réponses : a) $\frac{6\sqrt{2}+3}{4}$ b) $-\frac{\sqrt{6}}{4}$

Q Explique pourquoi $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est appelée une valeur exacte, tandis que $0{,}707$ n'est qu'approximative.

Réponse : La valeur $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est exacte parce que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel, ce qui signifie qu'en tant que décimale, il se perpétue et ne se répète jamais. Donc, $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ne peut être exprimé de façon exacte comme décimale. La valeur $0{,}707$ est la valeur de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ arrondie au millième près.

Q *(pour te mettre au défi)*

a) Si $\cot\theta = -\sqrt{3}$, dans quels quadrants le côté terminal pourrait-il se trouver?

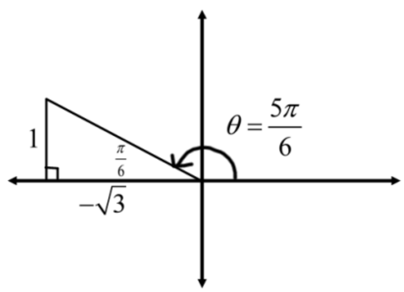
b) Trace un diagramme étiqueté pour illustrer chaque cas et calcule la valeur de θ en position standard.

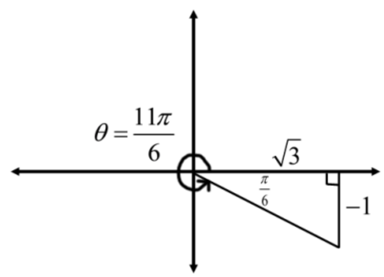
c) Calcule $\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta$ pour chaque θ trouvé.

Réponse :

a) *Quadrants II et IV.*

b) *Cas 1 (Quadrant II) Cas 2 (Quadrant IV)*





c) *Cas 1*

$\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta$

$= \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\sqrt{3}\right) - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}$

$= \frac{-2\sqrt{3}-3}{4}$

Cas 2

$\sin\theta\cot\theta - \cos^2\theta$

$= \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\sqrt{3}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{4}$

$= \frac{2\sqrt{3}-3}{4}$

RAS **T4 : Représenter graphiquement et analyser les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente pour résoudre des problèmes.** [L, RP, T, V]

[C] Communication **[CE]** Calcul mental et estimation **[L]** Liens **[R]** Raisonnement
[RP] Résolution de problèmes **[T]** Technologie **[V]** Visualisation

T4: Représenter graphiquement et analyser les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente pour résoudre des problèmes.

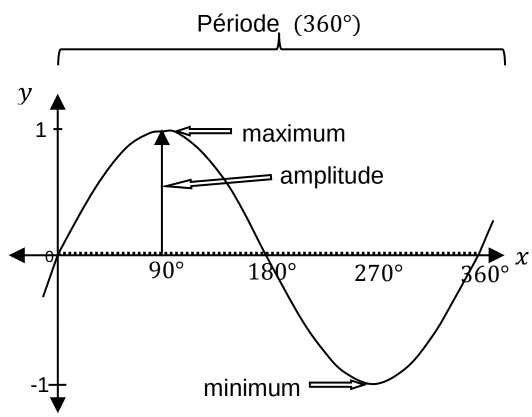
Portée et séquence des résultats

Pré-calcul 110	Pré-calcul A 120
T1 : Démontrer une compréhension des angles en position standard [0° à 360 **T2 :** Résoudre des problèmes comportant les rapports trigonométriques de base (sinus, cosinus et tangente) pour des angles de 0° à 360° en position standard.	**T4 :** Représenter graphiquement et analyser les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente pour résoudre des problèmes.

EXPLICATIONS DÉTAILLÉES

Ce résultat d'apprentissage initiera les élèves à diverses caractéristiques des graphiques de fonctions trigonométriques. Ces fonctions sont **périodiques**, c.-à-d. qu'elles se répètent sur une **période** donnée. Les courbes **sinusoïdales** oscillent de façon répétée de haut en bas à partir d'une ligne centrale et peuvent décrire des activités d'oscillation, comme la marée qui monte et qui redescend avec le temps, la hauteur d'une personne sur une grande roue qui monte et descend, ou la hauteur d'un point sur un objet roulant qui roule sur une distance horizontale.

L'**axe sinusoïdal** d'une courbe sinusoïdale est l'axe central horizontal de la courbe, à mi-chemin entre les valeurs maximales et minimales. L'**amplitude** est la distance verticale maximale du graphique d'une fonction sinusoïdale, au-dessus et en dessous de l'axe sinusoïdal de la courbe. Le graphique de la fonction $y = \sin x$ est illustré ci-dessous.



L'axe des x est l'axe sinusoïdal; le graphique est périodique, continu; il a un domaine $\{x|x \in R\}$ et une image $\{y|-1 \leq y \leq 1, y \in R\}$; il a un maximum de $+1$ et un minimum de -1; il a une amplitude de 1, une période de $360°$ ou 2π; et le point d'intersection avec l'axe des y est de 0. Les points clés sur le graphique devraient être liés aux valeurs sinusoïdales pour les angles quadrantaux sur le cercle unitaire.

RAS **T4 : Représenter graphiquement et analyser les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente pour résoudre des problèmes.** [L, RP, T, V]

Le fait de changer la valeur de a, b, c ou d dans la fonction sinusoïdale $y = a\sin\big(b(x - c)\big) + d$ donnera lieu à une translation ou à un étirement de la fonction $y = \sin x$ originale.

a représente l'amplitude ou l'étirement vertical. $Amplitude = |a|$

b affecte la longueur de la période ou l'étirement horizontal. $Période = \frac{360°}{|b|}$ ou $\frac{2\pi}{|b|}$. En raison de la nature périodique des fonctions trigonométriques, elles sont idéales pour illustrer un étirement horizontal.

c est la valeur de la translation horizontale, à droite si $c > 0$ ou à gauche si $c < 0$.

d est la valeur de la translation verticale en haut ou en bas, et change également l'axe sinusoïdal, en haut si $d > 0$ ou en bas si $d < 0$.

Les fonctions trigonométriques fourniront une bonne révision des paramètres qui causent les translations et les étirements des fonctions (de RF1 à RF4).

INDICATEURS DE RÉUSSITE

- Esquisser, avec ou sans l'aide de la technologie, le graphique de $y = \sin x$, de $y = \cos x$ ou de $y = \tan x$.
- Déterminer les caractéristiques (l'amplitude, les asymptotes, le domaine, la période, l'image et les zéros) du graphique de $y = \sin x$, de $y = \cos x$ ou de $y = \tan x$.
- Déterminer l'effet de la variation de la valeur de a sur les graphiques de $y = a\sin x$ et $y = a\cos x$.
- Déterminer l'effet de la variation de la valeur de d sur les graphiques de $y = \sin x + d$ et $y = \cos x + d$.
- Déterminer l'effet de la variation de la valeur de c sur les graphiques de $y = \sin(x + c)$ et $y = \cos(x + c)$.
- Déterminer l'effet de la variation de la valeur de b sur les graphiques de $y = \sin bx$ et $y = \cos bx$.
- Esquisser, sans l'aide de la technologie, le graphique de $y = a\sin(x + c) + d$ ou de $y = a\cos(x + c) + d$ à l'aide de transformations et expliquer les stratégies.
- Déterminer les caractéristiques (l'amplitude, les asymptotes, le domaine, la période, le changement de phase, l'image et les zéros) du graphique d'une fonction trigonométrique de la forme $y = a\sin(x + c) + d$ ou $y = a\cos(x + c) + d$.
- Déterminer les valeurs de a, b, c et d de fonctions de la forme $y = a\sin(x + c) + d$ ou $y = a\cos(x + c) + d$ correspondant à un graphique donné et écrire l'équation de la fonction.
- Déterminer une fonction trigonométrique qui modélise une situation pour résoudre un problème.
- Expliquer le lien entre les caractéristiques du graphique d'une fonction trigonométrique et les conditions d'une situation problématique.
- Résoudre un problème en analysant le graphique d'une fonction trigonométrique.

RAS **T4 : Représenter graphiquement et analyser les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente pour résoudre des problèmes.** [L, RP, T, V]

Stratégies pédagogiques suggérées

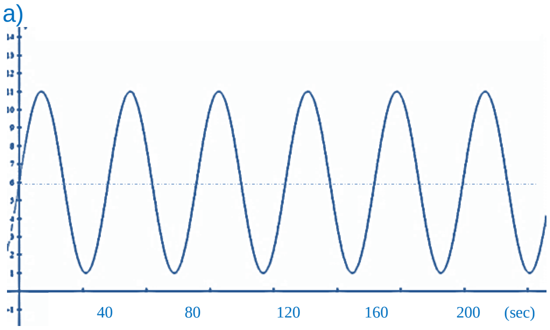
- Demander aux élèves de créer des ensembles de données sinusoïdales en roulant et en mesurant des objets, et en consignant leur hauteur et leur distance le long d'une surface.
- Apparier les cartes aux graphiques et aux équations pour les fonctions sinus et cosinus.
- Utiliser un logiciel interactif, qui permet la manipulation des coefficients (a, b, c et d) à partir de l'équation qui doit être illustrée graphiquement. Ce logiciel est accessible en ligne sur divers sites tels que : http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=174 ou http://www.intmath.com/trigonometric-graphs/1-graphs-sine-cosine-amplitude.php.
- Dans votre salle de classe, affichez un graphique étiqueté de sinus et de cosinus avec les équations correspondantes.
- Au fur et à mesure que les élèves établissent des liens entre les graphiques et leurs équations, un bon outil de cumul interactif peut être utilisé, comme celui accessible à l'adresse : http://illuminations.nctm.org/ActivityDetail.aspx?ID=215.

Questions (Q) et activités (Act) d'enseignement et d'évaluation suggérées

Q Une grande roue a une hauteur maximale de $11\ m$, un rayon de $5\ m$ (qui permet un dégagement de $1{,}0\ m$ dans le bas) et effectue une rotation toutes les $40\ sec$. Quand le tour commence, tu te trouves à mi-chemin du haut de la roue.

a) Esquisse un graphique qui montre ta hauteur au-dessus du sol en fonction du temps en utilisant une fonction sinus.
b) Quel est ton point le plus bas lorsque la roue tourne? Explique pourquoi ce doit être un nombre positif.
c) À quelle hauteur seras-tu après 2,5 minutes?

Réponses : a)



b) la distance la plus basse à laquelle tu descends lorsque la roue tourne est de 1 *mètre. Ce chiffre doit être positif, sinon tu descendrais sous terre*

c) Un cycle prend 40 *secondes, et cela t'amènera à* 6 *mètres de hauteur.* $2{,}5$ *minutes ou* 150 *secondes ou* $3{,}75$ *cycles de* 40 *secondes, ce qui t'amènerait au point le plus bas, ou à* 1 *mètre.*
(*OU* $y = 5\sin 9x + 6$, *alors* $y = 5\sin(9 * 150s) + 6 = 1$)

RAS **T4 : Représenter graphiquement et analyser les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente pour résoudre des problèmes.** [L, RP, T, V]

Q Un ressort oscille en hauteur selon la fonction $y = \left(\frac{1}{2}\right) sin(144(t - 45)) + 5$ où t représente le temps en secondes et y représente la hauteur en mètres.

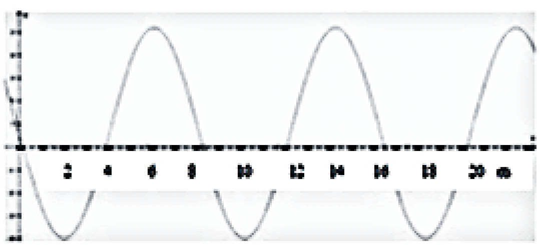
a) Quelle est l'amplitude de l'oscillation?
b) Quelle est la période de l'oscillation?
c) Quelle est la hauteur maximale atteinte par la roue?

Réponses : $a)\ amplitude = \frac{1}{2}$ $\quad b)\ Période = \frac{360}{144} = 2{,}5\ s$ $\quad c)\ 5{,}5\ m$

Q Tommy a une balançoire dans l'arbre près de la rivière dans sa cour arrière. La balançoire est une simple corde suspendue à une branche d'arbre. Lorsque Tommy se balance, il fait un mouvement de va-et-vient qui surplombe la rivière. Un jour, sa mère (qui suivait un cours de mathématiques pour adulte) décide de modéliser son mouvement à l'aide de son chronomètre. Elle découvre qu'après $2\ sec$, Tommy est à une extrémité de sa balançoire, $4\ m$ à partir de la rive mais au-dessus du sol. Après $6\ sec.$, il atteint l'autre extrémité de sa balançoire, $5{,}2\ m$ à partir de la rive mais au-dessus de l'eau.

a) Esquisse un graphique de cette fonction sinusoïdale.
b) Écris l'équation qui exprime la distance de la rive par rapport au temps.
c) Prédis la distance lorsque le
   i) temps est de $6{,}8\ sec.$
   ii) temps est de $15\ sec.$
   iii) temps est de $30\ sec.$
d) Où était Tommy lorsque sa mère a démarré le chronomètre?

Réponses : a)

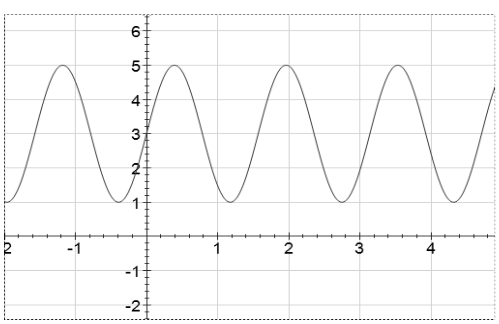


b) $y = -4{,}6 \sin 45x + 0{,}6$

$c)\ i)\ 4{,}3\ m\ (au\ dessus\ de\ l'eau) \quad ii)\ 3{,}9\ m\ (au\ dessus\ de\ l'eau) \quad iii)\ 5{,}3\ m\ (au\ dessus\ de\ l'eau)$

$d)\ 0{,}6\ m\ (au\ dessus\ de\ l'eau)$

Q Écris une équation sinusoïdale possible pour le graphique suivant.



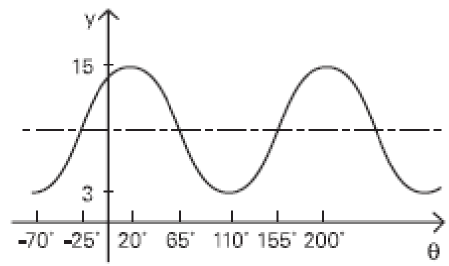
Réponse : $a = 2 \quad b = {}^{2\pi}/_{\frac{3}{2}} \quad c = 0 \quad d = 3 \qquad \therefore\ y = 2\sin\left(\frac{4\pi}{3}x\right) + 3$

RAS **T4 : Représenter graphiquement et analyser les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente pour résoudre des problèmes.** [L, RP, T, V]

Act Demander aux élèves de disposer un bout de papier adhésif sur le bord inférieur d'une cannette vide. Faire rouler la cannette sur une courte distance le long d'une règle d'un mètre posée au sol. Mesurer la distance horizontale parcourue et la hauteur du ruban adhésif à divers intervalles pendant la rotation. Prendre au moins dix mesures pendant les deux premières révolutions. Demander aux élèves de tracer les paires de coordonnées sur un graphique. Ils devraient tracer les liens entre le diamètre et la circonférence de la cannette ainsi qu'entre l'amplitude et la période du graphique. Une explication plus poussée et des questions de suivi sont également disponibles à l'adresse suivante :
http://www.ed.gov.nl.ca/edu/k12/curriculum/documents/mathematics/math2204/3.pdf

Q a) Écris l'équation qui représente le graphique ci-dessous, en utilisant $y = \sin\theta$ comme modèle, avec θ mesuré en degrés.

b) Écris l'équation à nouveau en utilisant $y = \cos\theta$.



Réponse a) $y = 6\sin 2(\theta + 25°) + 9$
b) $y = 6\cos 2(\theta - 20°) + 9$

Q a) Crée un tableau de valeurs pour θ et y en utilisant $0 \leq {}^{\circ}\ \theta \leq 360°$ et l'équation $\frac{1}{2}(y-1) = \cos\theta$.

b) Crée un tableau des valeurs en utilisant $0° \leq \theta \leq 360°$ et l'équation $y - 1 = \cos\theta$.

c) Décris la relation entre les valeurs y dans les deux tableaux ci-dessus.

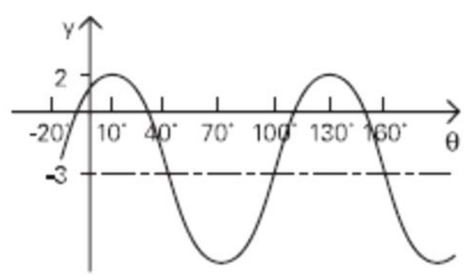
Réponses :

	θ	$0°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
a)	y	3	1	−1	1	3
b)	y	2	1	0	1	2

c) *La deuxième équation a une amplitude équivalant à la moitié de la première équation.*

Q Pour le graphique que voici :

a) Indique l'équation pour l'axe sinusoïdal.
b) Indique l'amplitude.
c) Indique la période, le domaine et l'image.
d) Écris l'équation pour ce graphique en montrant une réflexion pour $y = \sin\theta$ sur l'axe des x.
e) Utilise le langage des transformations pour décrire comment ce graphique est lié à $y = \sin\theta$.



f) Fais une estimation des points d'intersection à partir du graphique.
g) Indique les valeurs pour θ aux endroits où le graphique augmente.

Réponses : a) $y = -3$ b) $amp. = 5$ c) $pér. = 120°$ $D\{x|x \in R\}$ $R\{y|-8 \leq y \leq 2, y \in R\}$

d) $y = -5\sin 3(x - 40°) - 3$

e) *C'est une réflexion avec un étirement vertical de* 5, *une translation verticale de* −3, *un étirement horizontal de* 3 *et une translation horizontale de* 40°.

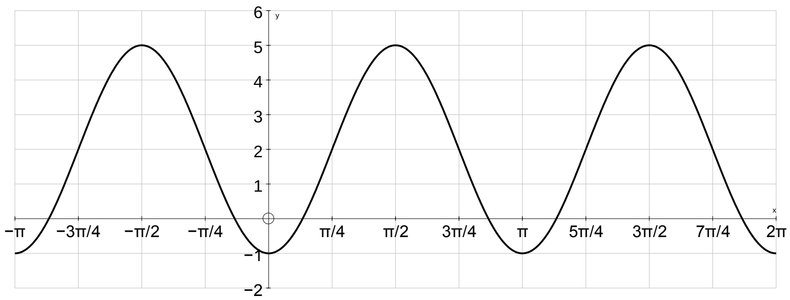
f) *points d'intersection avec l'axe des* $x \approx -8°\ \ 32°\ \ 112°\ \ 152°$

g) *passer de* $0°$ *à* $12°$ *et de* $72°$ *à* $132°$

RAS **T4 : Représenter graphiquement et analyser les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente pour résoudre des problèmes.** [L, RP, T, V]

Q Pour le graphique suivant :

a) Détermine la période, l'amplitude et l'équation de l'axe sinusoïdal.
b) Écris d'abord une fonction sinus positive, puis une fonction sinus négative pour le graphique.
c) Écris d'abord une fonction cosinus positive, puis une fonction cosinus négative pour le graphique.



Réponses : a) $pér. = \pi$ $amp. = 3$ axe $sinusoïdal\ y = 2$

b) $y = 3\sin 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 2$ $y = -3\sin 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$

c) $y = 3\cos 2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$ $y = -3\cos 2(x) + 2$

RAS **T5 : Résoudre, algébriquement et graphiquement, des équations trigonométriques du premier et du second degré dont le domaine est exprimé en degrés et en radians.** [L, R, RP, T, V]

[C] Communication **[CE]** Calcul mental et estimation **[L]** Liens **[R]** Raisonnement
[RP] Résolution de problèmes **[T]** Technologie **[V]** Visualisation

T5 : Résoudre, algébriquement et graphiquement, des équations trigonométriques du premier et du second degré dont le domaine est exprimé en degrés et en radians.

Portée et séquence des résultats

Pré-calcul 110	Pré-calcul A 120
RF1 : Décomposer en facteurs les expressions polynomiales **RF5 :** Résoudre des problèmes faisant appel à des équations quadratiques	**T5 :** Résoudre, algébriquement et graphiquement, des équations trigonométriques du premier et du second degré dont le domaine est exprimé en degrés et en radians.

EXPLICATIONS DÉTAILLÉES

Lorsqu'on résout des équations trigonométriques par méthode algébrique, le cercle unitaire peut servir à déterminer les valeurs exactes de θ.

Les touches des fonctions trigonométriques réciproques d'une calculatrice fourniront des mesures approximatives pour θ, lorsqu'on connaît les valeurs pour $\sin\theta$, $\cos\theta$ ou $\tan\theta$, où $\theta \in R$.

Les solutions déterminées graphiquement devraient être comparées à la solution algébrique. Les élèves devraient comprendre qu'en raison de la nature périodique des fonctions trigonométriques, de multiples solutions se présenteront.

Pour résoudre une équation trigonométrique comportant $\operatorname{cosec}\theta$, $\sec\theta$ ou $\operatorname{cotan}\theta$, les élèves pourraient devoir travailler avec les fonctions inverses connexes.

INDICATEURS DE RÉUSSITE

- Vérifier, avec ou sans l'aide de la technologie, qu'une valeur donnée est une solution d'une équation trigonométrique.
- Déterminer algébriquement la solution d'une équation trigonométrique et exprimer, dans la mesure du possible, la solution sous forme exacte.
- Déterminer, à l'aide de la technologie, la solution approximative d'une équation trigonométrique sur un domaine restreint.
- Établir le lien entre la solution générale d'une équation trigonométrique et les zéros de la fonction trigonométrique correspondante (se limiter aux fonctions sinus et cosinus).
- Déterminer, à l'aide de la technologie, la solution générale d'une équation trigonométrique donnée.
- Identifier et corriger toute erreur dans la solution d'une équation trigonométrique.

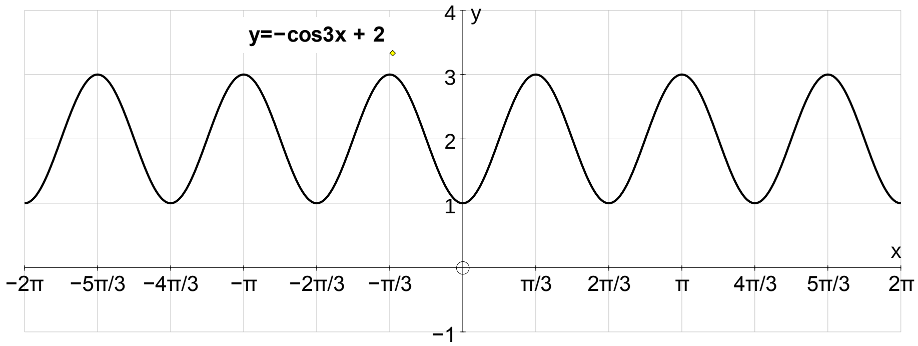
Stratégies pédagogiques suggérées

- Ce thème est abordé de façon approfondie dans la ressource précédente, *Mathematical Modeling, Book 2*, section 4.1, publiée par Nelson.

RAS **T5 : Résoudre, algébriquement et graphiquement, des équations trigonométriques du premier et du second degré dont le domaine est exprimé en degrés et en radians.** [L, R, RP, T, V]

Questions (Q) et activités (Act) d'enseignement et d'évaluation suggérées

Q a) À partir du graphique ci-dessous ($-2\pi \leq x \leq 2\pi$), trouve les valeurs approximatives de x quand $y = 3$.



b) Confirme les conclusions par une solution algébrique, $3 = -\cos 3x + 2$.

Réponses :
$a)\ Quand\ y = 3, \quad x = \frac{-5\pi}{3}, -\pi, \frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \pi\ et\ \frac{5\pi}{3}$
$b)\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}k$ *Quand l'intervalle est de* $-2\pi \leq x \leq 2\pi$, *les solutions comprendraient les réponses en a)*

Q Un bouchon de liège se berce doucement dans les vagues de la superbe baie de Fundy. Sa hauteur au-dessus et au-dessous du niveau normal de l'eau par rapport au temps peut être exprimée par la fonction sinusoïdale $y = 3\,sin\,180x$, où y représente la hauteur du bouchon en centimètres et x représente le temps en secondes.

Au moyen d'une calculatrice graphique, trouve toutes les heures possibles auxquelles le bouchon serait $2\ cm$ au-dessus du niveau normal de l'eau. Esquisse le graphique et explique-le.

Réponse : Quand $\mathrm{y} = 2 \quad \frac{2}{3} = \mathrm{sinus}\ 180x \quad 180x = 41{,}8°\ ou\ 138{,}2° + 360°k \quad x = 0{,}23°\ or\ 0{,}77° + 2k$
Ce sont les points auxquels le graphique (et le bouchon) est plus haut que 2 cm.

Q Résous chacune des équations trigonométriques suivantes pour $0° \leq \theta \leq 360°$.

a) $\sin^2 x - 2\sin x - 3 = 0$ b) $2\cos^2 x + 5\cos x - 3 = 0$

Réponses : $a)\ (\sin x + 1)(\sin x - 3) = 0 \quad \sin x = -1\ ou\ 3\ (racine\ étrangère) \quad x = 270°$
$b)\ (2\sin x - 1)(\sin x + 3) = 0 \quad \sin x = \frac{1}{2}\ ou -3(racine\ étrangère) \quad x = 30°\ et\ 150°$

Q Résous l'équation suivant. Indique la réponse en mesure radian.

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Réponse : $x = \begin{cases} \frac{\pi}{3} + \pi n, n\epsilon I \\ \frac{2\pi}{3} + \pi n, n\epsilon I \end{cases}$

SCO T6 : Démontrer des identités trigonométriques, y compris : les identités inverses; les identités des quotients; les identités de Pythagore; les identités de la somme ou de la différence (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente); les identités de l'angle double (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente) [R, T, V]

[C] Communication **[CE]** Calcul mental et estimation **[L]** Liens **[R]** Raisonnement
[RP] Résolution de problèmes **[T]** Technologie **[V]** Visualisation

T6 : Démontrer des identités trigonométriques, y compris : es identités inverses; les identités des quotients; les identités de Pythagore; les identités de la somme ou de la différence (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente); les identités de l'angle double (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente)

Portée et séquence des résultats

Pré-calcul A 120
T6 Démontrer des identités trigonométriques, y compris : es identités inverses; les identités des quotients; les identités de Pythagore; les identités de la somme ou de la différence (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente); les identités de l'angle double (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente)

EXPLICATIONS DÉTAILLÉES

Pour ce résultat d'apprentissage, on présentera aux élèves les **identités trigonométriques**.

Les élèves devraient acquérir une bonne compréhension de la différence entre les équations et les identités. Les équations peuvent être résolues pour certaines valeurs d'une variable. Par exemple, $2x^2 + 3 = 11$ est une équation. Il y a deux solutions, -2 et 2, qu'on peut vérifier par substitution dans l'équation, en gardant à l'esprit qu'une équation quadratique ne peut avoir plus de deux racines distinctes. Celles-ci sont les seules valeurs pour x qui sont valides.

Une identité correspond a tout énoncé d'égalité qui est vrai pour toutes les valeurs de la variable x. Par exemple, $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$. Toute valeur de x peut être utilisée et cette identité sera valable. Les identités trigonométriques sont celles qui comportent des rapports trigonométriques.

Pour déterminer les identités, on travaille sur chaque côté séparément, jusqu'à ce que les membres du côté gauche et du côté droit apparaissent comme identiques. Il est important que les preuves soient formelles. Les élèves doivent clairement montrer tous leurs processus à mesure qu'ils élaborent leurs preuves.

Il est important de souligner aux élèves qu'ils ne peuvent présumer que les deux expressions sont égales avant d'en avoir fait la preuve. Par exemple, il n'est pas permis de procéder à la multiplication croisée, d'élever au carré les deux côtés d'une identité et de comparer les numérateurs des deux côtés de l'identité.

Une des erreurs courantes que commettent les élèves est de laisser tomber le symbole pour l'angle comme dans sin par rapport à $sin\,\theta$. Il faudrait insister sur le fait que le symbole de l'angle est une partie importante de l'identité et de la preuve.

Les valeurs non permises des identités trigonométriques apparaissent lorsqu'il y a un dénominateur dans l'identité. Les valeurs non permises de toute identité trigonométrique peuvent être déterminées en trouvant toutes les valeurs de θ qui donneraient un dénominateur de zéro. Cela est comparable à trouver les valeurs non permises pour les expressions rationnelles étudiées dans *Mathématiques pré-calcul 110*.

SCO T6 : Démontrer des identités trigonométriques, y compris : les identités inverses; les identités des quotients; les identités de Pythagore; les identités de la somme ou de la différence (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente); les identités de l'angle double (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente) [R, T, V]

Par exemple, l'identité trigonométrique $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ n'est pas définie à $\sin\theta = 0$. Elle survient à 0° et à $180°$ et lors de chaque rotation subséquente de $180°$. Par conséquent, les valeurs non permises pour cette identité en degrés seraient $\theta \neq 0° + 180°n, n \in I$. En $radians, \theta \neq 0 + \pi n, n \in I$.

Les élèves utiliseront les identités suivantes pour démontrer les identités trigonométriques :

Identités inverses

$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ $\operatorname{cotan} x = \frac{1}{\tan x}$

Identités des quotients

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ $\operatorname{cotan} x = \frac{\cos x}{\sin x}$

Identités de Pythagore

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Longrightarrow \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$
$\Longrightarrow \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \Longrightarrow \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$
$\Longrightarrow 1 = \sec^2\theta - \tan^2\theta$

(Cette identité peut être formulée à partir de $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ en divisant chaque terme par $cos^2\theta$).

$1 + \operatorname{cotan}^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta \Longrightarrow 1 = \operatorname{cosec}^2\theta - \operatorname{cotan}^2\theta$
$\Longrightarrow \operatorname{cotan}^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$

(Cette identité peut être formulée à partir de $\sin^2\theta + \cos^2 = 1$ en divisant chaque terme par $sin^2\theta$).

Identités de la somme et de la différence

$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$

$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A\tan B}$

$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

$$\tan(A-B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A\tan B}$$

Identités de l'angle double

$\sin 2A = 2\sin A\cos A$
(Cette identité peut être formulée à partir de $sin(A + A)$.)

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$
(Cette identité peut être formulée à partir de $cos(A + A)$.)

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$$
(Cette identité peut être formulée à partir de $tan(A + A)$ ou de $\frac{\sin 2A}{\cos 2A}$.

SCO T6 : Démontrer des identités trigonométriques, y compris : les identités inverses; les identités des quotients; les identités de Pythagore; les identités de la somme ou de la différence (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente); les identités de l'angle double (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente) [R, T, V]

INDICATEURS DE RÉUSSITE

- Expliquer la différence entre une identité trigonométrique et une équation trigonométrique.
- Vérifier une identité trigonométrique numériquement pour une valeur donnée en degrés ou en radians.
- Expliquer pourquoi la vérification de l'égalité entre les deux membres d'une identité trigonométrique pour des valeurs données ne suffit pas pour conclure que l'identité est valable.
- Déterminer la validité potentielle d'une identité trigonométrique graphiquement à l'aide de la technologie.
- Déterminer les valeurs non permises d'une identité trigonométrique.
- Démontrer la validité d'une identité trigonométrique algébriquement.
- Déterminer la valeur exacte d'un rapport trigonométrique à l'aide des identités de la somme, de la différence et de l'angle double.

Stratégies pédagogiques suggérées

- Une activité qui donne une compréhension accrue des identités est Focus D (Trident Fish), vue dans la ressource précédente, *Mathematical Modeling, Book 4*, page 245. De plus, la section « Vérifiez votre compréhension » de la page 247 peut être utile.
- Pour mieux comprendre la façon dont les identités d'angles composés et d'angles doubles sont formulées, se reporter à Investigation $7B$ à la page 248, y compris aux questions de la partie « Investigation » et de la partie « Vérifiez votre compréhension ». $Focus\ E$ à la page 251 de *Mathematical Modeling, Book 4* est également utile.

SCO T6 : Démontrer des identités trigonométriques, y compris : les identités inverses; les identités des quotients; les identités de Pythagore; les identités de la somme ou de la différence (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente); les identités de l'angle double (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente) [R, T, V]

Questions (Q) et activités (Act) d'enseignement et d'évaluation suggérées

Q Démontre les identités suivantes :

a) $\cos\theta\tan\theta = \sin\theta$

b) $\frac{\cot\theta}{\tan\theta} = \frac{1-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta}$

c) $\cot^2\theta = \frac{\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta}$

d) $\frac{\operatorname{cosec} x}{\sec x} = \cot x$

e) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x$

f) $2\sin^2\theta - 1 = \sin^2\theta - \cos^2\theta$

g) $\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$

h) $\cos^2 t = \sin^2 t + 2\cos^2 t - 1$

i) $\tan\theta = \tan^2\theta\cot\theta$

j) $\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \sec^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta$

Réponses :

	MG	MD
a)	$\cos\theta\tan\theta = \cos\theta\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \sin\theta$	$\sin\theta$
b)	$\frac{\cot\theta}{\tan\theta} = \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$	$\frac{1-\sin^2\theta}{1-\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}$
c)	$\cot^2\theta$	$\frac{\cos^2\theta}{1-\cos^2\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} = \cot^2\theta$
d)	$\frac{\operatorname{cosec} x}{\sec x} = \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{\cos x}} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$	$\cot x$
e)	$(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x\cos x + \cos^2 x$ $= 1 + 2\sin x\cos x$	$1 + 2\sin x\cos x$
f)	$2\sin^2\theta - 1$	$\sin^2\theta - \cos^2\theta = \sin^2\theta - (1-\sin^2\theta)$ $= 2\sin^2\theta - 1$
g)	$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}$ $= \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}$
h)	$\cos^2 t$	$\sin^2 t + 2\cos^2 t - 1$ $= 1 - \cos^2 t + 2\cos^2 t - 1$ $= \cos^2 t$
i)	$\tan\theta$	$\tan^2\theta\cot\theta = \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $= \tan\theta$
j)	$\sec^2\theta + \operatorname{cosec}^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}$ $= \frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$	$\sec^2\theta\operatorname{cosec}^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\sin^2\theta}$ $= \frac{1}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$

SCO T6 : Démontrer des identités trigonométriques, y compris : les identités inverses; les identités des quotients; les identités de Pythagore; les identités de la somme ou de la différence (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente); les identités de l'angle double (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente) [R, T, V]

Q Démontre chacune des identités :

a) $\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = \cos\theta - \sin\theta$

b) $\operatorname{cosec} 2\theta = \frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} + \tan\theta$

c) $\frac{\sin 2x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x} = \operatorname{cosec} x$

d) $\frac{\operatorname{cotan}\alpha - \tan\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha - \sec^2\alpha$

e) $\frac{\sin x + \cos x \operatorname{cotan} x}{\operatorname{cotan} x} = \sec x$

f) $(1+\tan x)^2 = \sec^2 x + 2\tan x$

Réponses :

	MG	MD
a)	$\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = \frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos\theta+\sin\theta} = \frac{(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)}{(\cos\theta+\sin\theta)}$ $= \cos\theta - \sin\theta$	$\cos\theta - \sin\theta$
b)	$\operatorname{cosec} 2\theta$	$\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta} + \tan\theta = \frac{1-2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta} + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $= \frac{1-2\sin^2\theta+2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$ $= \frac{1}{\sin 2\theta} = \operatorname{cosec} 2\theta$
c)	$\frac{\sin 2x}{\cos x} + \frac{\cos 2x}{\sin x} = \frac{2\sin x\cos x}{\cos x} + \frac{1-2\sin^2 x}{\sin x} = 2\sin x +$ $\frac{1-2\sin^2 x}{\sin x} = \frac{2\sin^2 x+1-2\sin^2 x}{\sin x} = \frac{1}{\sin x} = \operatorname{cosec} x$	$\operatorname{cosec} x$
d)	$\frac{\operatorname{cotan}\alpha-\tan\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)-\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}}{\sin\alpha\cos\alpha}$ $= \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} - \frac{1}{\cos^2\alpha} = \operatorname{cosec}^2\alpha - \sin^2\alpha$	$\operatorname{cosec}^2\alpha - \sec^2\alpha$
e)	$\frac{\operatorname{Sin} x+\cos x\operatorname{cotan} x}{\operatorname{cotan} x} = \frac{\sin x}{\operatorname{cotan} x} + \cos x$ $= \frac{\sin^2 x}{\cos x} + \cos x = \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos x}$ $= \frac{1}{\cos x} = \sec x$	$\sec x$
f)	$(1+\tan x)^2 = 1 + 2\tan x + \tan^2 x$ $= 2\tan x + \sec^2 x$	$\sec^2 x + 2\tan x$

Q Trouve la valeur exacte de **:**

a) $\cos\frac{7\pi}{12}$

b) $\cos 165°$

Réponses :

$$a)\ \cos\frac{7\pi}{12} = \cos\left(\frac{3\pi}{12}+\frac{4\pi}{12}\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

$$b)\ \cos(165°) = -\cos 15°$$
$$= -\cos(45° - 30°) = -[\cos 45° \cos 30° \sin 45° \sin 30°]$$
$$= \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\right] = \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

RÉSUMÉ DES RÉSULTATS D'APPRENTISSAGE

Mathématiques pré-calcul A 120

[C] Communication**[RP]** Résolution de problèmes**[L]** Liens **[R]**Raisonnement
[CE] Calcul mental et estimation, **[T]** Technologie **[V]** Visualisation

Les relations et les fonctions

Résultat d'apprentissage général : Développer le raisonnement numérique et algébrique à l'aide de l'étude des relations.

Résultats spécifiques

RF1. Démontrer une compréhension de l'effet des translations verticales et horizontales sur les graphiques de fonctions et leurs équations respectives. [C, L, R, V]

RF2. Démontrer une compréhension des effets des étirements horizontaux et verticaux sur les graphiques de fonctions et leurs équations respectives. [C, L, R, V]

RF3. Appliquer des translations et des étirements aux graphiques et équations de fonctions. [C, L, R, V]

RF4. Démontrer une compréhension des effets des réflexions sur les graphiques de fonctions et leurs équations respectives, y compris des réflexions par rapport à l'axe des x, à l'axe des y ou à la droite y = x. [C, L, R, V]

RF5. Démontrer une compréhension des valeurs inverses de relations. [C, L, R, V]

RF6. Tracer le graphique et analyser des fonctions racine (limitées à des fonctions ne contenant qu'un radical). [L, R, T, V]

RF7. Démontrer une compréhension des fonctions exponentielles.

RF8. Démontrer une compréhension des logarithmes. [L, CE, R]

RF9: Tracer le graphique et analyser des fonctions exponentielles et logarithmiques. . [C, L, T, V]

RF10. Démontrer une compréhension des lois du produit, du quotient et des logarithmes.[C, L, R,T]

RF11. Résoudre des problèmes comportant des équations exponentielles et logarithmiques. [C, L, RP, R]

Trigonométrie

Résultat d'apprentissage général : Développer le raisonnement trigonométrique.

Résultats spécifiques

T1. Démontrer une compréhension des angles dans une position standard, exprimés en degrés et en radians. [L, CE, R, V]

T2. Concevoir et appliquer l'équation du cercle unitaire. [L, R, V]

T3. Résoudre des problèmes à l'aide des six rapports trigonométriques pour des angles exprimés en radians et en degrés. [CE, RP, R, T, V]

T4. Représenter graphiquement et analyser les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente pour résoudre des problèmes. [L, RP, T, V]

T5. Résoudre, algébriquement et graphiquement, des équations trigonométriques du premier et du second degré dont le domaine est exprimé en degrés et en radians. [L, RP, R, T, V]

T6. Démontrer des identités trigonométriques, y compris les identités réciproques, les identités des quotients, les identités de Pythagore, les identités de la somme ou de la différence (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente), les identités de l'angle double (limitées au sinus, au cosinus et à la tangente). [R, T, V]

RÉFÉRENCES

Alberta Education, System Improvement Group. *Western and Northern Canadian Protocol (WNCP) Consultation with Post-Secondary Institutions, Business and Industry Regarding Their Requirements for High School Mathematics: Final Report on Findings*. Edmonton, AB:

Alberta Education, 2006. Available at http://www.wncp.ca/math/report_2006.pdf (Accessed September 20, 2007).

Armstrong, Thomas. *7 Kinds of Smart: Identifying and Developing Your Many Intelligences*. New York, NY: Plume, 1993.

Banks, J. A. and C. A. M. Banks. *Multicultural Education: Issues and Perspectives*. 2nd ed. Boston, MA: Allyn and Bacon, 1993.

British Columbia Ministry of Education. *The Primary Program: A Framework for Teaching*. Victoria, BC: British Columbia Ministry of Education, 2000.

Caine, Renate Nummela and Geoffrey Caine. *Making Connections: Teaching and the Human Brain*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development, 1991.

Hope, Jack A. et al. *Mental Math in the Primary Grades*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Publications, 1988.

McAskill, B. et al. *WNCP Mathematics Research Project: Final Report*. Victoria, BC: Holdfast Consultants Inc., 2004. Available at http://www.wncp.ca/math/Final_Report.pdf (Accessed September 20, 2007).

National Council of Teachers of Mathematics. *Computation, Calculators, and Common Sense: A Position of the National Council of Teachers of Mathematics*. May 2005. http://www.nctm.org/uploadedFiles/About_NCTM/Position_Statements/computation.pdf (Accessed September 20, 2007).

Rubenstein, Rheta N. “Mental Mathematics beyond the Middle School: Why? What? How?” *Mathematics Teacher* 94, 6 (September 2001), pp. 442–446.

Shaw, J. M. and M. J. P. Cliatt. “Developing Measurement Sense.” In P. R. Trafton (ed.), *New Directions for Elementary School Mathematics: 1989 Yearbook* (Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1989), pp. 149–155.

Steen, L. A. *On the Shoulders of Giants: New Approaches to Numeracy*. Washington, DC: Mathematical Sciences Education Board, National Research Council, 1990.

Western and Northern Canadian Protocol for Collaboration in Education. *The Common Curriculum Framework for K–9 Mathematics* May 2006. http://www.wncp.ca/english/subjectarea/mathematics/ccf.aspx

Western and Northern Canadian Protocol for Collaboration in Education. *The Common Curriculum Framework for Grades 10-12 Mathematics* January 2008. http://www.wncp.ca/english/subjectarea/mathematics/ccf.aspx