

# Suggesties voor onderzoekscompetenties

Pieter Belmans, Matthias Roels

6 januari 2014

## 1 Fouriertransformaties

In de slides wordt er gebruik gemaakt van Fourierreeksen en Fouriertransformaties, zonder deze al te grondig te definiëren. Het kan dus interessant zijn om hier verder op te bouwen.

Fourierreeksen beter uitwerken: in dit deel is het de bedoeling dat de studenten Fourierreeksen nauwkeuriger gaan definiëren. Hierbij is volgende definitie nodig:

**Definitie 1.** De projectie van een periodische functie  $f(t)$  op een basisgolf is gedefinieerd als

$$\langle \sin(nt), f(t) \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nt) f(t) dt,$$

en analoog voor  $\cos(nt)$ .

De Fourierreeks van een periodische functie wordt dan gegeven door:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \sin(nt))$$

met

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \\ A_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt, \\ B_n &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) dt. \end{aligned}$$

Als voorbeeld kan de Fourierreeks van de zaagtandgolf of de blokgolf berekend worden.

In computertoepassingen zal er nooit met de echte reeks gewerkt worden, maar met een eindig aantal termen. Om na te gaan of die eindige som van sinussen en cosinussen het periodische signaal goed benaderd is er nood aan een notie van een afstand tussen twee functies. Dit kan

ook eventueel onderzocht worden. De afstand die in de analyse vaak gebruikt wordt is de volgende:

$$\|f - s\| := \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f(t) - s(t))^2 dt},$$

waarbij  $s(t)$  het benaderde signaal is.

Welke complexe analyse is er nodig om fouriertransformaties te begrijpen?

Wat is een fouriertransformatie? Wat is een discrete fouriertransformatie? Welke gebruiken we in de analyse van geluid?

Hoe berekenen we een fouriertransformatie? Hoe wordt een fouriertransformatie in het echt berekend? Wat is FFT?

Analyse van spectra van andere instrumenten.

Wat zijn nog toepassingen van fouriertransformaties? Denk aan beeldanalyse, patroonherkenning, ...

## 2 Vergelijking gelijkzwevende en reine stemming

In de slides wordt er hier kort aandacht aan besteed. Essentieel hierbij is het rekenen met logaritmes (in grondtal 2). Mogelijke vragen die gesteld kunnen worden zijn:

Wat zijn de verschillen voor de andere intervallen?

Wat gebeurt er bij een verdeling in meer of minder dan 12 delen?

Deze twee vragen zijn een eenvoudige berekening, gebaseerd op de breuken die bij de reine stemming gebruikt worden, zie [http://en.wikipedia.org/wiki/Just\\_intonation](http://en.wikipedia.org/wiki/Just_intonation). De vergelijkende studie die wordt gesuggereerd kan zeer goed dienen om vertrouwd te raken met wiskundige software:

Hoe kunnen we de verschillen visueel maken?

Hoe kunnen we de verschillen kwantificeren?

Kunnen we de verschillen hoorbaar maken?

Interessant bronmateriaal is te vinden op <http://ppexpressivo.co.uk> en <http://xenharmonic.wikispaces.com>.

### 3 Vergelijking van historische stemmingen

Verdergaand op de vorige onderzoeksvragen kunnen ook andere stemmingen onderzocht worden. Telkens dienen de volgende vragen beantwoord te worden:

Hoe wordt deze stemming opgebouwd?

Waarom wordt deze constructie gebruikt?

Hoe verhoudt deze stemming zich tot de reine en de gelijkzwevende stemming?

Centraal in de antwoorden op deze vragen staan volgende vragen:

Wat zijn komma's?

Wat is het wolfsinterval?

Telkens kan bekeken worden hoe een bepaalde stemming omgaat met deze problemen.

Interessante stemmingen (op basis van historische of wiskundig belang) zijn:

1. pythagorische stemming
2. middentoonsstemmingen (*meantone tuning*)
3. welgetemperde stemmingen (*well-tempered tuning*)

Wederom zijn <http://ppexpressivo.co.uk> en <http://xenharmonic.wikispaces.com> goede bronnen.

### 4 *Musica universalis*

Deze suggestie voor onderzoekscompetenties is enkel van toepassing op klasgroepen die Latijn volgen. De wiskundige inhoud is hier beperkter, het betreft eerder historisch onderzoek.

In de slides wordt volgend tekstfragment vermeld:

Sed Pythagoras interdum et musica ratione appellat quantum absit a terra luna, ab ea ad Mercurium dimidium spatii et ab eo ad Veneris, a quo ad solem sescuplum, a sole ad Martem tonum [id est quantum ad lunam a terra], ab eo ad Iovem dimidium et ab eo ad Saturni, et inde sescuplum ad signiferum; ita septem tonis effici quam διὰ πᾶσων ἁρμονίαν hoc est universitatem concentus; in ea Saturnum Dorio moveri phthongo, Iovem Phrygio et in reliquis similia, iucunda magis quam necessaria subtilitate.

Plinius de oudere, *Naturalis Historia*, 77–79 n.C.

Een eerste stap is dus

Vertaal en interpreteer dit fragment.

Daarna zijn er meerdere zaken die onderzocht kunnen worden.

Wat leert dit fragment (aangevuld met ander bronmateriaal ons) over de wereldvisie van Pythagoras?

Wat zijn nog manifestaties van dit wereldbeeld? (Denk aan: Kepler, Plato, ...)

Hoe is dit wereldbeeld geëvolueerd tot het huidige wereldbeeld?

Wat is numerologie?